UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

Année Universitaire 2006-2007

Licence de Mathématiques, semestre S5

U.E. de Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 45 minutes

Exercice 1

Soit μ l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x^2 \in \mathbb{R}$. On pose $f(y) = \frac{1}{y}$. Montrer que f est intégrable par rapport à la mesure μ et calculer $\int f(y)\, d\mu(y)$.

Exercice 2

Pour tout réel a et tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n(a) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{ax}\, dx = \int \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{ax}\, dx\ .$$

Déterminer la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$. On pourra distinguer les cas $a < 1$ et $a \geq 1$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de boréliens deux à deux disjoints inclus dans $]0, 1]$.

1. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

   est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction g définie par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx} \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

   est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

3. Dans cette question, on considère la fonction h telle que $h(x) = \sqrt{n}$ si $x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$ et $h(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus]0, 1]$. La fonction h est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?