UNIVERSITE BLAISE PASCAL — Année Universitaire 2006-2007

U.F.R. Sciences et Technologies

Licence de Mathématiques, semestre S5

**U.E. de Calcul Intégral**

Durée de l'épreuve : 45 minutes

Dans toute l'épreuve, $m$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Les deux exercices sont indépendants.

## Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses **en justifiant brièvement** :

1. Si $m(B) = 0$, alors $\mathbb{R} \setminus B$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Si $\mathbb{R} \setminus B$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $m(B) = 0$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left( \frac{t^2+3}{\sqrt{t}} \right) e^{-t} dt$ est absolument convergente.

## Exercice 2

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant vu en TD : si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite de boréliens telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} m(A_n)$ est convergente, alors $m(\limsup A_n) = 0$.

On note $(q_n)_{n\geq 1}$ une numérotation des rationnels. Pour $n \geq 1$, on pose

$$f_n(x) = (1 - 2^n |x - q_n|)^+$$

où $a^+ = \sup(a, 0)$ désigne la partie positive du réel $a$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ .$$

1. Représenter graphiquement la fonction $f_n$.
2. Justifier brièvement que la fonction $f$ est une fonction borélienne à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.
3. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \neq 0 \text{ pour une infinité de } n\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. En déduire que la série $\sum_n f_n(x)$ est presque partout convergente.
4. Montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dm(x)$. On justifiera soigneusement sa réponse. Retrouver alors la conclusion de la question 3.
5. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) \geq 1$. La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?