Licence de Mathématiques, semestre S5

U.E. de Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 1/2 heure
Barême indicatif (susceptible de modifications) : 6-5-9.

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et A et B deux éléments de $\mathcal{T}$.

1. Montrer que $\mu(A \cap B) \leq \min\left(\mu(A), \mu(B)\right)$.
2. Montrer que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Exercice 2

Soit α un nombre réel. On pose

$$f_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \mathbb{1}_{[n,2n]} \ .$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que la fonction f_α soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On justifiera soigneusement sa réponse.

Exercice 3

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_\alpha(n) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \exp\left(-\left(\frac{2+(-1)^n}{n}\right) t\right) dt \ .$$

Montrer que la suite $\left(U_\alpha(n)\right)_{n\geq 1}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ et trouver sa limite (on distinguera deux cas selon les valeurs de α).