

Licence de Mathématiques, semestre S5
Module de Calcul Intégral - Contrôle continu 1

Durée de l'épreuve : 1/2 heure

L'épreuve est constituée d'un questionnaire et d'un exercice.

On répondra au questionnaire directement sur le document fourni, **sans justifier les réponses**. Toute réponse fautive à une question entraînera un décompte négatif de points. Toute question sans réponse sera notée 0.

Pour l'exercice, la qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte.

Dans toute l'épreuve, m désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Exercice.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} ; \exists n \in \mathbb{N}^* ; |x - a_n| \leq 2^{-n}\} .$$

1. Montrer que A est un borélien de \mathbb{R} .
2. Montrer que $1 \leq m(A) \leq 2$.
3. Calculer la mesure de Lebesgue du complémentaire de A dans \mathbb{R} .
4. Calculer la mesure de Lebesgue de A lorsque $a_n = 0$ pour tout n , puis lorsque $a_n = n$ pour tout n .