Sur les mesures engendrées par des chaînes de Markov

Yanick Heurteaux & Andrzej Stos

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Domaine de Chalès, 21-24 Septembre 2014

An introduction to Mandelbrot cascades

Yanick Heurteaux

Abstract In this course, we propose an elementary and self-contained introduc- tion to canonical Mandelbrot random cascades. The multiplicative construction is explained and the necessary and sufficient condition of non-degeneracy is proved. Then, we discuss the problem of the existence of moments and the link with non- degeneracy. We also calculate the almost sure dimension of the measures. Finally, we give an outline on multifractal analysis of Mandelbrot cascades. This course was delivered in september 2013 during a meeting of the “Multifractal Analysis GDR“ (GDR n^{o} 3475 of the french CNRS).

1 Introduction

At the beginning of the seventies, Mandelbrot proposed a model of random mea- sures based on an elementary multiplicative construction. This model, known as canonical Mandelbrot cascades, was introduced to simulate the energy dissipation in intermittent turbulence ([14]). In two notes ([15] and [16]) published in ’74, Man- delbrot described the fractal nature of the sets in which the energy is concentrated and proved or conjectured the main properties of this model. Two years later, in the fundamental paper [12], Kahane and Peyrie`re proposed a complete proof of the results announced by Mandelbrot. In particular, the questions of non-degeneracy, existence of moments and dimension of the measures were rigorously solved.

Mandelbrot also observed that in a multiplicative cascade, the energy is dis- tributed along a large deviations principle: this was the beginnings of the multifractal analysis.

Yanick Heurteaux Clermont Universite´, Universite´ Blaise Pascal, Laboratoire de Mathe´matiques, BP 10448, F- 63000 CLERMONT-FERRAND - CNRS, UMR 6620, Laboratoire de Mathe´matiques, F- 63177 AUBIERE e-mail: Yanick.Heurteaux@math.univ-bpclermont.fr

Quelques notations

- $\ell \geq 2, \quad \mathcal{S} = \{0, \cdots, \ell - 1\}$ = alphabet
- $\mathcal{M}_n$ = mots de longueur n
- $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$
- $|\varepsilon|$ = longueur du mot ε
- $\mathcal{F}_n$ = intervalles ℓ-adics de n-ème génération
- Si $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \in \mathcal{M}_n, \quad I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{\ell^k}, \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{\ell^k} + \frac{1}{\ell^n}\right[\in \mathcal{F}_n$
- Si $\varepsilon \in \mathcal{M}, \quad I_{\varepsilon 0}, \cdots, I_{\varepsilon \ell - 1}$ sont les fils de I_ε
- $I_n(x)$ = unique intervalle de $\mathcal{F}_n$ contenant x
- $|I|$ = longueur de l'intervalle I

Produits de Bernoulli

$$\ell \geq 2, \quad p_0, \ldots, p_{\ell-1} \in]0,1[\quad \text{tels que } p_0 + \cdots + p_{\ell-1} = 1$$

$$\boxed{m\left(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}\right) = p_0^{s_n^0} \cdots p_{\ell-1}^{s_n^{\ell-1}}}$$

où $s_n^k = \#\{j \leq n \; ; \; \varepsilon_j = k\}$

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}[X_n = k] = p_k$ alors

$$\boxed{m\left(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}\right) = \mathbb{P}[X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n]}$$

Généralisation naturelle

(X_n) : chaîne de Markov sur $\mathcal{S}$ de loi initiale $(p_i)_{i\in\mathcal{S}}$ et de matrice de transition $P = (p_{ij})$.

$$\boxed{m\,(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}) = \mathbb{P}[X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n]}$$

$m(I_i) = p_i$, $i \in \mathcal{S}$.

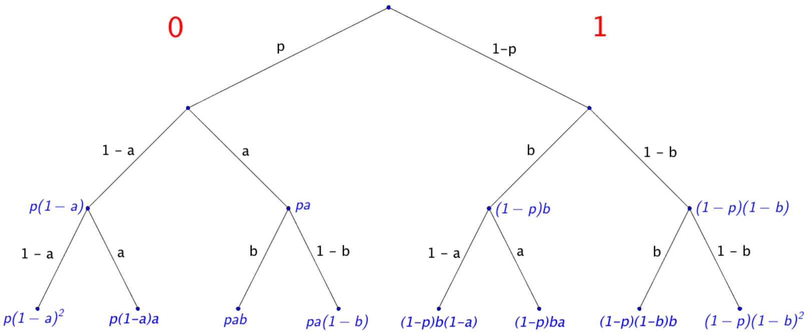
Par la propriété de Markov :

$$m(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}) = p_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} m(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}}).$$

En itérant

$$m(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}) = p_{\varepsilon_1} p_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdots p_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n}. \tag{1.1}$$

Chaîne à deux états



Exemple 0

Produits de Bernoulli

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{\ell-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{\ell-1} \end{pmatrix}$$

Loi initiale : $p = (p_0, \ldots, p_{\ell-1})$.

Cas particulier

Mesure naturelle sur l'ensemble de Cantor

$\ell = 3$

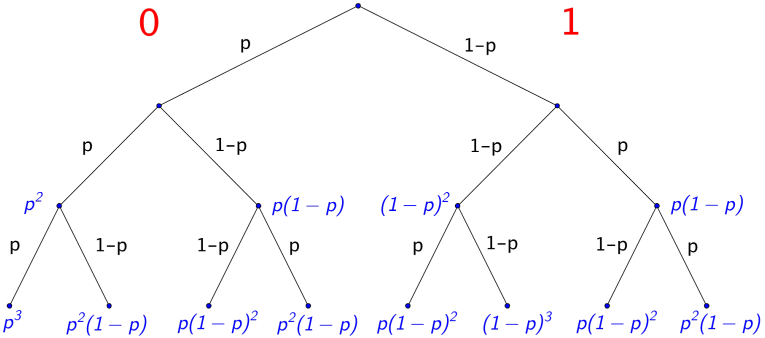
$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Loi initiale : $p = (1/2, 0, 1/2)$.

Exemple 1

$\ell = 2$

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$



Exemple 1

La mesure est doublante

$$m([x-2r,x+2r]) \leq C\, m([x-r,x+r])$$

(la mesure est doublante, Tukia, 1989)

$$f(x) = m([0,x])$$

$$\frac{1}{C} \leq \frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} \leq C$$

(f est quasisymétrique)

m est la mesure harmonique associée à un opérateur symétrique

$$L = \operatorname{div}(A\nabla)$$

Exemple 2

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}_\ell$

$$p_{ij} = 1/2 \quad \text{si } i \text{ et } j \text{ sont voisins}$$

$$(0 \text{ et } \ell - 1 \text{ sont voisins})$$

Exemple : $\ell = 5$

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

m est monofractale de dimension $\frac{\ln 2}{\ln \ell}$

La fonction de structure

$$\tau(q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n \log \ell} \log \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q \right) \tag{2.1}$$

avec la convention usuelle $0^q = 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}$.

Théorème

Supposons la chaîne de Markov irréductible. Alors

$$\tau(q) = \log_\ell(\lambda_q)$$

où λ_q est le rayon spectral de la matrice $P_q = (p_{ij}^q)$.
De plus, la limite existe.

Première conséquence : analyticité de τ

Corollaire

La fonction τ est analytique.

Preuve

$$F(q, x) = \det\left(P_q - xI\right)$$

- $x \mapsto F(q, x)$ est le polynôme caractéristique de P_q
- Soit $q_0 \in \mathbb{R}$. $F(q_0, \lambda_{q_0}) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(q_0, \lambda_{q_0}) \neq 0$
- $q \mapsto \lambda_q$ est donné par le théorème des fonctions implicites autour de q_0
- F est analytique
- $\tau(q) = \log_\ell(\lambda_q)$

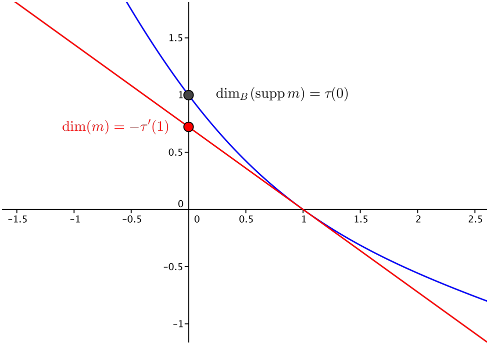
Deuxième conséquence : unidimensionnalité

Corollaire

La mesure m est unidimensionnelle de dimension

$$\dim(m) = -\tau'(1)$$

De plus, $\dim(m) = \dim_B(\operatorname{supp} m)$ si et seulemant si τ est affine.



Marche à deux états

Le cas général

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

$$\tau(q) = -1 + \log_2\left((1-a)^q + (1-b)^q + \sqrt{((1-a)^q - (1-b)^q)^2 + 4a^q b^q}\right).$$

$$\boxed{\dim(m) = \frac{b}{a+b}\, h(a) + \frac{a}{a+b}\, h(b)}$$

où $h(x) = -(x\log_2(x) + (1-x)\log_2(1-x))$.

Remarque $\quad \pi P = \pi \quad$ où $\quad \pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$

Mesures "à la Tukia"

$p = (p_0, \dots, p_{\ell-1})$ = vecteur de probabilités

$$P = \begin{pmatrix} p_{\sigma_0(0)} & p_{\sigma_0(1)} & \cdots & p_{\sigma_0(\ell-1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{\sigma_{\ell-1}(0)} & p_{\sigma_{\ell-1}(1)} & \cdots & p_{\sigma_{\ell-1}(\ell-1)} \end{pmatrix}$$

$$\tau(q) = \log_\ell(p_0^q + \cdots + p_{\ell-1}^q)$$

$$\dim(m) = -\left(p_0 \log_\ell(p_0) + \cdots + p_{\ell-1} \log_\ell(p_{\ell-1})\right)$$

$0 \log_\ell(0) = 0$

Un autre exemple

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim m = -\tau'(1) \approx 0.58 \qquad \text{et} \qquad \dim_B(\operatorname{supp} m) = \tau(0) \approx 0.60 \quad !!$$

Deux raisons possibles :

- $\dim_H(\operatorname{supp} m) < \dim_B(\operatorname{supp} m)$
- La mesure m n'est pas la mesure de dimension maximale

Preuve de $\tau(q) = \log_\ell(\lambda_q)$

$\mathcal{M}_{n,k}$= mots de $\mathcal{M}_n$ se terminant par k.

$$s_{n,k} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_{n,k}} m(I_\varepsilon)^q$$

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} s_{n,k} p_{kj}^q = \sum_{k \in \mathcal{S}} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_{n,k}} m(I_\varepsilon)^q p_{kj}^q = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_{n+1,j}} m(I_\varepsilon)^q = s_{n+1,j}$$

$$\boxed{S_n P_q = S_{n+1}}$$

où $S_n = (s_{n,0}, \ldots, s_{n,\ell-1})$

Preuve de $\tau(q) = \log_\ell(\lambda_q)$

$$S_n P_q = S_{n+1}$$

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_n} m(I_\varepsilon)^q = \sum_{k \in \mathcal{S}} s_{n,k} = \|S_n\|_1 = \|S_1 P_q^{n-1}\|_1$$

Théorème de Perron Frobenius : λ_q est valeur propre simple, avec vecteur propre (à gauche) ν_q à coordonnées > 0

$$\|S_1 P_q^n\|_1 \leq C\|\nu_q P_q^n\|_1 \leq C\lambda_q^n$$

Irréductibilité : " $I + P_q + \cdots + P_q^k > 0$"

$$\|\nu_q P_q^n\|_1 \leq C\|S_1 P_q^n + S_1 P_q^{n+1} + \cdots + S_1 P_q^{n+k}\|_1 \leq C\|S_1 P_q^n\|_1$$

$$\|S_1 P_q^n\|_1 \asymp \lambda_q^n$$

Une formule pour la dimension de m

Entropie : $h_\ell(p) = -\left(p_0 \log_\ell(p_0) + \cdots + p_{\ell-1}\log_\ell(p_{\ell-1})\right)$ où $p = (p_0, \ldots, p_{\ell-1})$

Théorème

$L_k = k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice P

$H = (h_\ell(L_0), \ldots, h_\ell(L_{\ell-1}))$

$$\dim(m) = <\pi \mid H>$$

($\pi = \pi P$ est l'unique vecteur de probabilité invariant)

Outil :

$$-\tau'_+(1) \leq \liminf_{n\to+\infty} H_n \leq \limsup_{n\to+\infty} H_n \leq -\tau'_-(1)$$

où $H_n = \frac{1}{n}\sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)\log_\ell m(I)$

Support de la mesure m

$$\boxed{\operatorname{supp} m = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{p_{\varepsilon_1} p_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdots p_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} > 0} \overline{I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}}}$$

$$\sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^0 = N_n$$

où $N_0 = \#\{I \in \mathcal{F}_n \ ; \ m(I) > 0\}$

$$\tau(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n}{n\log \ell} = \dim_B(\operatorname{supp} m) = \log_\ell \lambda_0$$

$$\dim(m) \leq \dim_B(\operatorname{supp}(m))$$

$\lambda_0 =$ rayon spectral de la matrice P_0

(matrice constituée de 1 et de 0 qui "code supp m")

Question naturelle

$P_0 = (p^0_{ij})$: matrice irréductible constituée de 1 et de 0.
$p = (p^0_0, \dots, p^0_{\ell-1})$: vecteur constitué de 1 et de 0.

$$\mathcal{A}_n = \{\varepsilon \in \mathcal{F}_n \ ; \ p^0_{\varepsilon_1} p^0_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots p^0_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} = 1\}$$

$$\boxed{K = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{A}_n} \overline{I_\varepsilon}}$$

- Existe-t-il m telle que $\dim m = \dim_B(K)$?
- Si oui, quelle est la matrice P associée ?

La première idée n'est pas la bonne

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \; ?$$

$$\tau(q) = -\log_3 2 + \log_3\left(2^{-q} + 3^{-q} + \sqrt{4^{-q} + 6^{1-q} + 9^{-q}}\right)$$

$$\dim_B(K) = \log_3(1+\sqrt{2}) \approx 0.80 \quad \text{et} \quad \dim m = \frac{1}{7}(3+4\log_3 2) \approx 0.79$$

En fait il faut prendre $P = (\sqrt{2}-1) \times \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La réponse viendra du formalisme multifractal

Idée du formalisme multifractal : construire des mesures auxiliaires telles que

$$m_q(I) \asymp |I|^{\tau(q)} m(I)^q \tag{3.1}$$

pour tout intervalle ℓ-adique I de masse positive

Lorsque $q = 0$:

$$m_0(I) \asymp |I|^{\tau(0)}$$

$$\dim(m_0) = \tau(0) = \dim_B(K) = \dim_H(K)$$

Comment construire m_q ?

m : associée à $P = (p_{ij})$ et à $p = (p_0, \ldots, p_{\ell-1})$

$$P_q = (p_{ij}^q) \quad \text{et} \quad P_q \pi_q = \lambda_q \pi_q$$

$$D_q = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{\ell-1} \end{pmatrix} \qquad \text{où } \pi_q = (d_0, \ldots, d_{\ell-1})^t$$

$$\boxed{Q_q = \frac{1}{\lambda_q} D_q^{-1} P_q D_q}$$

$Q_q \mathbf{1} = \frac{1}{\lambda_q} D_q^{-1} P_q D_q \mathbf{1} = \frac{1}{\lambda_q} D_q^{-1} P_q \pi_q = D_q^{-1} \pi_q = \mathbf{1}$

Comment construire m_q ?

m_q : associée à $Q_q = (q_{ij}) = \left(\frac{1}{\lambda_q} d_i^{-1} p_{ij}^q d_j\right)$
et à $v_q = (q_0, \ldots, q_{\ell-1}) = \alpha(p_0^q, \ldots, p_{\ell-1}^q)$ $\quad$ [α : normalisation]

$$\begin{aligned}
m_q(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}) &= q_{\varepsilon_1} q_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdots q_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} \\
&= \alpha p_{\varepsilon_1}^q \left(\frac{1}{\lambda_q} d_{\varepsilon_1}^{-1} p_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^q d_{\varepsilon_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{\lambda_q} d_{\varepsilon_{n-1}}^{-1} p_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n}^q d_{\varepsilon_n}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\lambda_q^{n-1}} d_{\varepsilon_1}^{-1} m(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})^q d_{\varepsilon_n} \\
&\asymp \lambda_q^{-n} m(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})^q \\
&= |I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}|^{\tau(q)} m(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})^q
\end{aligned}$$

La mesure m vérifie le formalisme multifractal

$$\boxed{E_\beta = \left\{ x \ ; \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(m(I_n(x)))}{\log|I_n(x)|} = \beta \right\}}$$

Soit $\beta = -\tau'(q)$

$$m_q(I) \asymp m(I)^q |I|^{\tau(q)}$$

$$\tau_q(t) = \tau(qt) - t\tau(q)$$

$$-\tau_q'(1) = -q\tau'(q) + \tau(q) = \tau^*(\beta)$$

$$\boxed{\frac{\log(m_q(I_n(x)))}{\log|I_n(x)|} = q\,\frac{\log(m(I_n(x)))}{\log|I_n(x)|} + \tau(q) + o(1)}$$

$$\boxed{\dim(E_\beta) = \dim(m_q) = -\tau_q'(1) = \tau^*(\beta)}$$

Retour sur le support de m

$$K = \operatorname{supp}(m)$$

m_0 : associée à $Q_0 = \frac{1}{\lambda_0} D_0^{-1} P_0 D_0$ et à v_0

$$m_0(I) \asymp |I|^{\tau(0)}$$

- m_0 est équivalente à la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{\tau(0)}$ sur K
- m_0 est monofractale et vérifie

$$\dim(m_0) = \tau(0) = \dim_B(K) = \dim_H(K)$$

- m_0 est une mesure portée par K, engendrée par une chaîne de Markov, de dimension maximale

Retour sur l'exemple décrit plus haut

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \pi_0 = (\sqrt{2}, 1, 1)^t$$

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \frac{1}{\lambda_0} D_0^{-1} P_0 D_0 \\
&= \left(\sqrt{2} - 1\right) \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\sqrt{2} - 1\right) \times \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Shift - Invariance - Ergodicité

$$\sigma(x) = \ell x - E(\ell x)$$

$$\sigma\left(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}\right) = I_{\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}$$

$$\sigma(x) = \bigcap_n I_{\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n} \quad \text{si} \quad x = \bigcap_n I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$$

Proposition

Soit P une matrice de transition irréductible et ν l'unique vecteur de probabilités tel que $\nu P = \nu$. Soit m_P associée à P et ν. Alors, m_P est σ-invariante et ergodique.

m_P est σ-invariante

$$
\begin{aligned}
m_P(\sigma^{-1}(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})) &= \sum_{j=0}^{\ell-1} m_P(I_{j\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell-1} \nu_j p_{j\varepsilon_1} \cdots p_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} \\
&= \nu_{\varepsilon_1} p_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdots p_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} \\
&= m_P(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})
\end{aligned}
$$

m_P est ergodique

Soit k tel "$P + \cdots + P^k > 0$"

$$\frac{1}{C} m_P(I) m_P(J) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{K \in \mathcal{F}_j} m_P(IKJ) \leq C m_P(I) m_P(J)$$

(m_P est faiblement quasi-Bernoulli -d'après Testud-)

$$I \in \mathcal{F}_n, \qquad \sum_{j=0}^{k-1} m_P \left(I \cap \sigma^{-(n+j)}(J) \right) \asymp m_P(I) \times m_P(J)$$

Si $\sigma^{-1}(E) = E, \quad k m_P(I \cap E) \asymp m_P(I) \times m_P(E)$

$$\boxed{m_P \left(([0,1] \setminus E) \cap E \right) \asymp m_P \left([0,1] \setminus E \right) \times m_P(E)}$$

Conséquences élémentaires

- Si $P \neq \tilde{P}$, alors m_P et $m_{\tilde{P}}$ sont étrangères
- Plus généralement, si P et $\tilde{P}$ sont deux matrices $\ell \times \ell$ irréductibles, si p et $\tilde{p}$ sont deux lois initiales et si m et $\tilde{m}$ sont les mesures associées. Sous l'hypothèse

  $$\mathrm{supp}(m) = \mathrm{supp}(\tilde{m})$$

  il n'y a que deux possibilités :

  1. $P = \tilde{P}$ et m et $\tilde{m}$ sont fortement équivalentes
  2. $P \neq \tilde{P}$ et m et $\tilde{m}$ sont étrangères

Mesure de dimension maximale : unicité

Théorème

Soit $P_0 = \left(p^0_{ij}\right)$ irreductible telle $p^0_{ij} \in \{0,1\}$ pour tout ij et soit $p^0 = \left(p^0_0, \ldots, p^0_{\ell-1}\right)$ un vecteur ligne non nul tel que $p^0_i \in \{0,1\}$ pour tout i. Soit

$$K = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{p^0_{\varepsilon_1} p^0_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdots p^0_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} = 1} \overline{I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}}$$

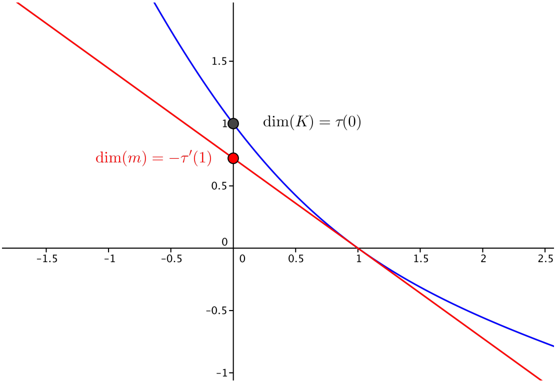
Soit m une mesure de support K, engendrée par une chaîne de Markov X de matrice de transition P.

$$\dim(m) = \dim(K) \Longleftrightarrow P = \frac{1}{\lambda_0} D_0^{-1} P_0 D_0$$

De plus, $P = \frac{1}{\lambda_0} D_0^{-1} P_0 D_0$ est le seul cas où la mesure m est monofractale.

Idée de la preuve

Il faut montrer que $\quad P \neq \frac{1}{\lambda_0} D_0^{-1} P_0 D_0 \Longrightarrow \dim(m) < \dim(K) := \delta$



Il suffit de montrer que $\tau(2) > -\delta$

Trois ingrédients

- *dm*-presque-sûrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m_0(I_n(x))}{m(I_n(x))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ell^{-n\delta}}{m(I_n(x))} = 0$$

- Egoroff
-

$$\sum_{I\in\mathcal{F}_{n+p}} m(I)^2 \asymp \lambda_2^{n+p} \asymp \left(\sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^2\right) \times \left(\sum_{I\in\mathcal{F}_p} m(I)^2\right)$$