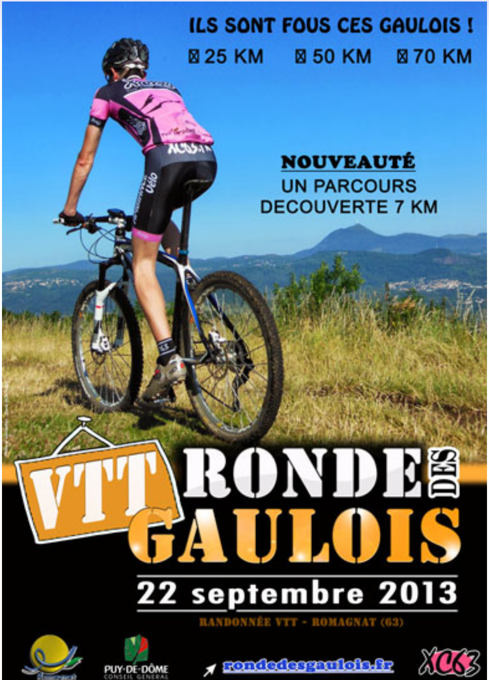
Cascades de Mandelbrot

Yanick Heurteaux

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Île de Porquerolles, 22-27 Septembre 2013


ILS SONT FOUS CES GAULOIS !
25 KM 50 KM 70 KM
NOUVEAUTÉ
UN PARCOURS
DECOUVERTE 7 KM
VTT
RONDE DES
GAULOIS
22 septembre 2013
RANDONNÉE VTT - ROMAGNAT (63)
PUY-DE-DÔME
CONSEIL GENERAL
rondedesgaulois.fr

Quelques notations

- λ = mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$
- $\ell \geq 2, \quad \{0, \cdots, \ell - 1\}$ = alphabet
- $\mathcal{M}_n$ = mots de longueur n
- $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$
- $|\varepsilon|$ = longueur du mot ε
- $\mathcal{F}_n$ = intervalles ℓ-adics de n-ème génération
- Si $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \in \mathcal{M}_n, \quad I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{\ell^k}, \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{\ell^k} + \frac{1}{\ell^n}\right[\in \mathcal{F}_n$
- Si $\varepsilon \in \mathcal{M}, \quad I_{\varepsilon 0}, \cdots, I_{\varepsilon \ell - 1}$ sont les fils de I_ε
- $I_n(x)$ = unique intervalle de $\mathcal{F}_n$ contenant x
- $|I|$ = longueur de l'intervalle I

Un exemple jouet : les cascades binomiales

$$\ell = 2, \quad p \in]0,1[$$

$$\boxed{m\left(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}\right) = p^{S_n}(1-p)^{n-S_n}}$$

où $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$

Loi des grands nombres : $\dfrac{S_n}{n}$ converge dm-presque sûrement vers p.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = h(p) \quad dm - \text{presque sûrement}}$$

où $h(p) = -(p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p))$.

Dimension des cascades binomiales

$$E_\beta = \left\{ x \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = \beta \right\}$$

$$\frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = -\left(\frac{S_n}{n} \log_2 p + \left(1 - \frac{S_n}{n}\right) \log_2 (1-p) \right)$$

- $E_{h(p)} = \left\{ \frac{S_n}{n} \to p \right\}$ et $m(E_{h(p)}) = 1$
- Sur $E_{h(p)}$, $m(I_n(x)) \;''\!\approx\!''\; |I_n(x)|^{h(p)}$
- $\dim(E_{h(p)}) = \dim\left(\left\{ \frac{S_n}{n} \to p \right\}\right) = h(p)$
- $\dim_*(m) = \dim^*(m) = h(p)$

Analyse multifractale des cascades binomiales

Soit $\beta \in [-\log_2 p, -\log_2(1-p)]$.

$$\beta = -(\theta \log_2 p + (1-\theta)\log_2(1-p))$$

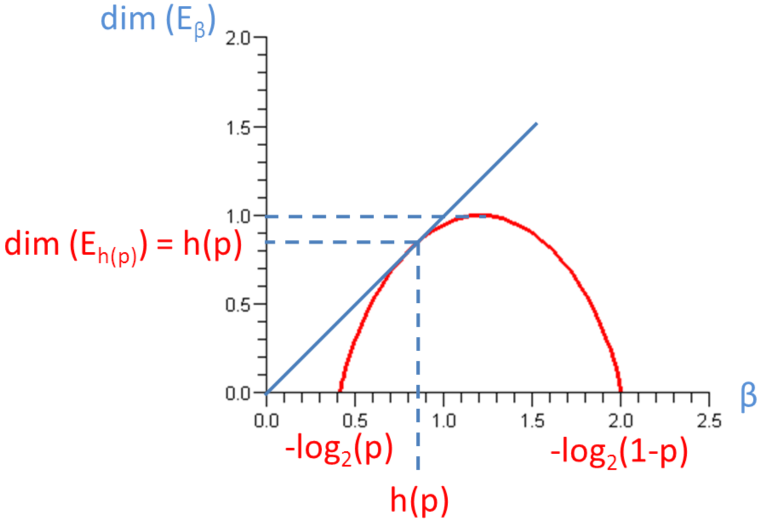
$$\frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = -\left(\frac{S_n}{n}\log_2 p + \left(1 - \frac{S_n}{n}\right)\log_2(1-p)\right)$$

$$E_\beta = \left\{\frac{S_n}{n} \to \theta\right\}$$

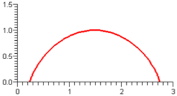
$$\dim(E_\beta) = -(\theta \log_2 \theta + (1-\theta)\log_2(1-\theta)) = h(\theta) = F(\beta)$$

$F(\beta) = h\left(\frac{\beta + \log_2(1-p)}{\log_2(1-p) - \log_2 p}\right)$

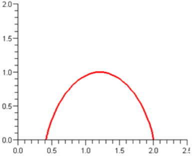
Spectre de la mesure m



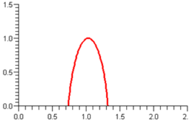
Selon les valeurs de p



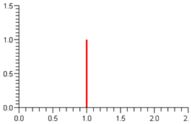
p = 0,85



p = 0,75



p = 0,60



p = 0,50

Analyse multifractale des cascades binomiales : le point de vue des mesures auxiliaires

$$\beta = -(\theta \log_2 p + (1-\theta) \log_2 (1-p))$$

m_θ = cascade binomiale de paramètre θ

m_θ est portée par E_β

$$\dim(E_\beta) = \dim(m_\theta) = h(\theta)$$

Reformulation

$$\theta = \frac{p^q}{p^q + (1-p)^q}, \quad \text{avec } q \in \mathbb{R}$$

Si $I \in \mathcal{F}_n$,

$$\begin{aligned} m_\theta(I) &= \theta^{S_n}(1-\theta)^{n-S_n} \\ &= \frac{p^{qS_n}(1-p)^{q(n-S_n)}}{\left(p^q + (1-p)^q\right)^n} \\ &= m(I)^q |I|^{\tau(q)} \end{aligned}$$

où $\tau(q) = \log_2\left(p^q + (1-p)^q\right)$ est la fonction de structure à l'état q. On dit que m_θ est une mesure de Gibbs à l'état q.

Les cascades binomiales vérifient le formalisme multifractal

$$\beta = -(\theta \log_2 p + (1-\theta)\log_2(1-p)) = -\tau'(q)$$

$$\begin{aligned}
\dim(E_\beta) &= -(\theta \log_2 \theta + (1-\theta)\log_2(1-\theta)) \\
&= -q\tau'(q) + \tau(q) \\
&= \tau^*(-\tau'(q)) \\
&= \tau^*(\beta)
\end{aligned}$$

où $\tau^*(\beta) = \inf_t(t\beta + \tau(t))$ est la transformée de Legendre de τ.

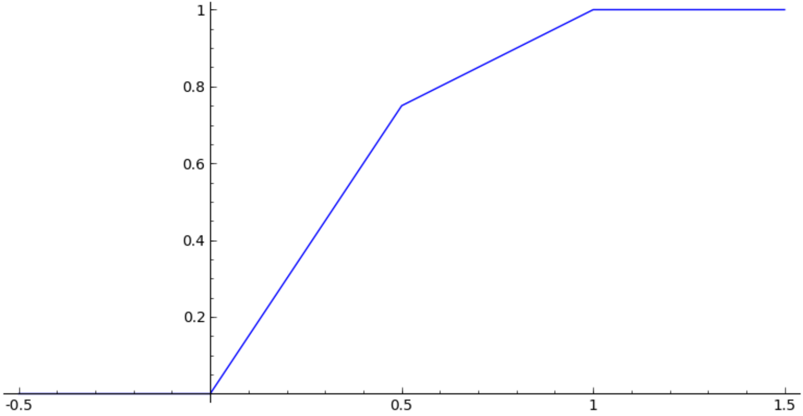
Complément : comment justifier l'existence de m

$$m_n = f_n d\lambda \quad \text{où} \quad f_n = 2^n \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} p^{S_n}(1-p)^{n-S_n} \mathbb{1}_{I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}}$$

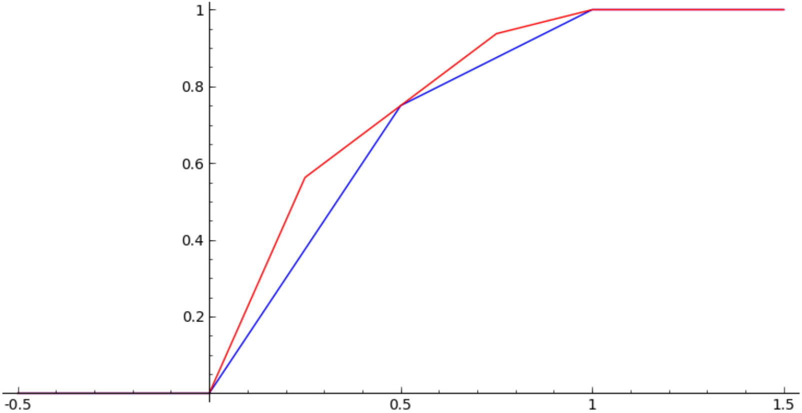
- Si $I = I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$,

  $$m_n(I) = p^{S_n}(1-p)^{n-S_n} = m_{n+1}(I) = \cdots = m_{n+k}(I) = \cdots$$
- Pour tout intervalle dyadique I, $m_n(I)$ converge
- Toute fonction continue sur $[0,1]$, est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier associée à une subdivision dyadique
- Pour toute fonction continue sur $[0,1]$, $\int f(x)\, dm_n(x)$ converge.
- Les théorèmes de Banach-Steinhaus et de représentation de Riesz permettent de conclure.

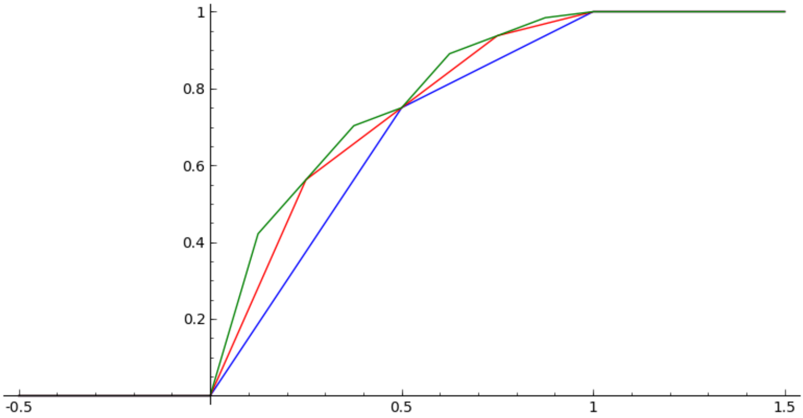
Fonction de répartition des mesures m_n



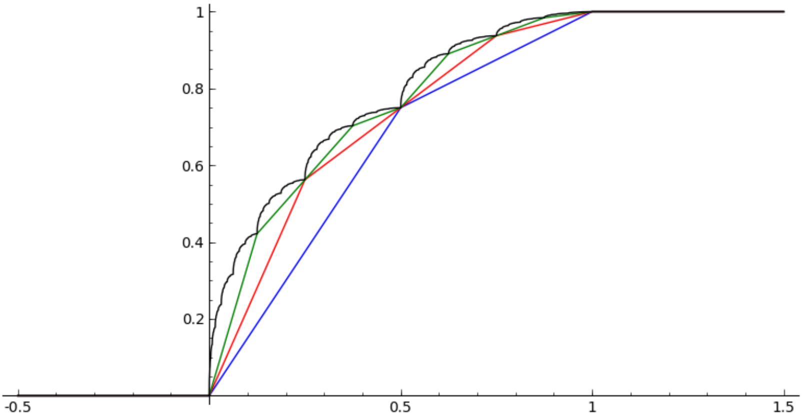
Fonction de répartition des mesures m_n



Fonction de répartition des mesures m_n



Fonction de répartition des mesures m_n



Autosimilarité des cascades binomiales

$$S_0(x) = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad S_1(x) = \frac{1+x}{2}$$

$$\boxed{[0,1] = S_0([0,1]) \cup S_1([0,1])}$$

$$\boxed{m = (1-p)m \circ S_0^{-1} + pm \circ S_1^{-1}}$$

$$T \ : \ \mu \longmapsto (1-p)\mu \circ S_0^{-1} + p\mu \circ S_1^{-1}$$

$$m = T(m)$$

$$m_n = T^n(\lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{} m$$

Cascades canoniques de Mandelbrot : le modèle

W = variable aléatoire positive telle que $E[W] = 1$
$(W_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathcal{M}}$ = famille de v.a. indépendantes de même loi que W

$$\boxed{m_n = f_n \lambda \quad \text{où} \quad f_n = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \mathbb{1}_{I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}}}$$

$$\boxed{m = \lim_{n \to +\infty} m_n}$$

Théorème (existence de m)

Presque sûrement, la suite m_n converge faiblement vers une mesure (aléatoire) m.

Pourquoi imposer $E[W] = 1$?

$$Y_n := m_n([0,1]) = \int_0^1 f_n(t)\, d\lambda(t) = \ell^{-n} \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$$

$$\begin{aligned} E[Y_n] &= \ell^{-n} \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} E\left[W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1}}\right] E\left[W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}\right] \\ &= E[Y_{n-1}] \times E[W] \end{aligned}$$

Exemple 1 : naissance et mort

W ne prend que deux valeurs dont la valeur 0.
Notons

$$\boxed{P[W=0]=1-p}$$

Pour satisfaire la condition de normalisation $E[W]=1$ on doit avoir

$$\boxed{P\left[W=\frac{1}{p}\right]=p}$$

Exemple 2 : les cascades log-normales

Il s'agit du cas où W suit une loi log-normale, c'est à dire $W = e^X$ avec X suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Calcul :

$$\begin{aligned} E\left[e^X\right] &= \int e^x \, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \, \frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}} \\ &= \int e^{(m+\sigma u)} \, e^{-u^2/2} \, \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int e^{-(u-\sigma)^2/2} \, e^{m+\sigma^2/2} \, \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{m+\sigma^2/2} \end{aligned}$$

$$\boxed{m = -\sigma^2/2}$$

$$\boxed{W = e^{\sigma N - \sigma^2/2}}$$

Convergence faible de la suite m_n

Soit $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par les $W_\varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n$

$$\boxed{Y_n := m_n([0,1])}$$

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}|\mathcal{A}_n] &= \ell^{-(n+1)} \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n+1}} E[W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n+1}} |\mathcal{A}_n] \\ &= \ell^{-(n+1)} \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n+1}} W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} E[W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n+1}}] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

Y_n est une martingale positive : elle converge presque sûrement.

Convergence faible de la suite m_n

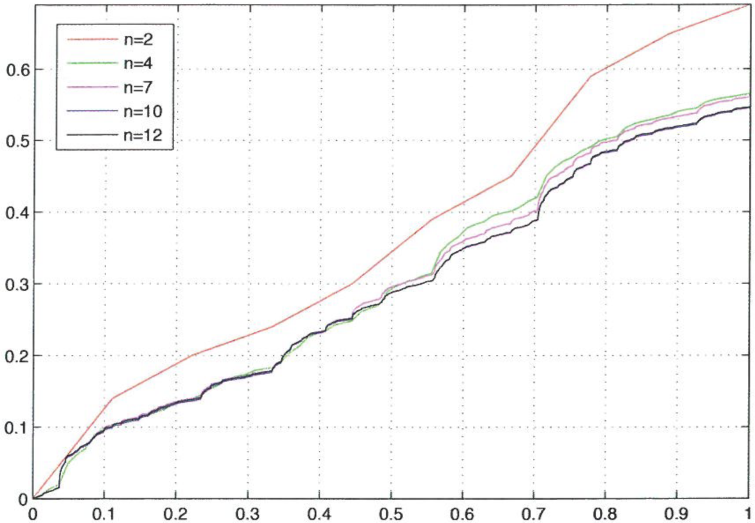
De même, si $I = I_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ est un intervalle ℓ-adique,

$$m_{k+n}(I) = \ell^{-(k+n)} \sum_{\varepsilon_{k+1} \cdots \varepsilon_{k+n}} W_{\alpha_1} \cdots W_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} W_{\alpha_1 \cdots \alpha_k \varepsilon_{k+1}} \cdots W_{\alpha_1 \cdots \alpha_k \varepsilon_{k+1} \cdots \varepsilon_{k+n}}$$

- Pour tout I, $m_n(I)$ converge presque sûmement
- Presque sûrement, pour tout I, $m_n(I)$ converge
- Presque sûrement, m_n converge faiblement vers une mesure m

Fonction de répartition des mesures m_n

J. BARRAL, J. PEYRIÈRE



L'équation fondamentale

$$Y_{n+1} := m_{n+1}([0,1]) = \ell^{-(n+1)} \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n+1}} W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n+1}}$$

$$\boxed{Y_{n+1} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_n(j)}$$

$$\boxed{Y_\infty = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_\infty(j)}$$

Les $Y_n(j)$ (resp. $Y_\infty(j)$) étant indéprendants entre eux, indépendants des W_j, et de même loi que Y_n (resp. Y_∞).

Le problème de la non dégénérescence

- En général, Y_n ne converge pas dans L^1. On peut simplement dire par le lemme de Fatou :

$$E[Y_\infty] \leq \lim_{n\to\infty} E[Y_n] = 1$$

- En particulier on peut avoir $E[Y_\infty] = 0$, c'est à dire $m = 0$ presque sûrement. On dit alors que la cascade est dégénérée.

Proposition (non dégénérescence et équiintégrabilité)

Il y a équivalence entre

1. $E[Y_\infty] = 1$
2. $E[Y_\infty] > 0$ *(i.e. $P[m([0,1]) \neq 0] > 0$)*
3. *La martingale Y_n est équiintégrable*

$2. \Rightarrow 3.$

- Equation fondamentale :

$$Z = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Z(j)$$

- Sous 2. elle possède une solution Z telle que $E[Z] = 1$
- On itère l'équation fondamentale :

$$Z = \frac{1}{\ell^n} \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} W_{\varepsilon_1} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} Z(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$$

- $$E[Z|\mathcal{A}_n] = \frac{1}{\ell^n} \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} W_{\varepsilon_1} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} E[Z(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)] = Y_n$$

- La suite Y_n est équiintégrable

$3. \Rightarrow 1.$

Supposons la suite Y_n équiintégrable.

- La martingale Y_n converge alors presque sûrement et dans L^1 vers Y_∞.

- En particulier

$$\lim_{n \to +\infty} E[Y_n] = E[Y_\infty] = 1 \ .$$

Remarques

- On peut aussi dire (c.f. la preuve) que l'équiintégrabilité équivaut à l'existence d'une solution positive d'espérance 1 pour l'équation

$$Z = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Z(j) \tag{2.1}$$

- L'équation (2.1) peut avoir des solution non intégrables. Par exemple, si $\ell = 2$, $W = 1$, l'équation devient :

$$Z = \frac{1}{2}(Z(1) + Z(2))$$

Si $Z(1)$ et $Z(2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Cauchy (de densité $\frac{dz}{\pi(1+z^2)}$), alors Z suit aussi une loi de Cauchy de même densité.

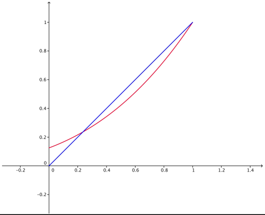
Que dire de $P[m \neq 0]$?

Supposons Y_n non dégénérée.

$$\boxed{Y_\infty = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_\infty(j)}$$

$$\begin{aligned} P[Y_\infty = 0] &= P\left[W_0 Y_\infty(0) = 0 \text{ et } \cdots \text{ et } W_{\ell-1} Y_\infty(\ell-1) = 0\right] \\ &= P[W Y_\infty = 0]^\ell \end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma = (r + (1-r)\gamma)^\ell \qquad \text{avec } \gamma = P[Y_\infty = 0] \quad \text{et} \quad r = P[W = 0]}$$



$$\boxed{P[m \neq 0] = 1 \Leftrightarrow P[W = 0] = 0}$$

Une condition suffisante simple qui assure la non dégénéréscence

Proposition

Supposons que W ait un moment d'ordre 2.
Il y a équivalence entre

1. $E[W^2] < \ell$
2. *La suite Y_n est bornée dans L^2*
3. $0 < E[Y_\infty^2] < +\infty$

En particulier, dans ce cas, la suite Y_n est équiintégrable et la cascade est non dégénérée.

$1. \Leftrightarrow 2.$

$$Y_{n+1} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_n(j)$$

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}^2] &= \frac{1}{\ell^2} \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} E[(W_j^2 Y_n(j))^2] + \sum_{i \neq j} E[W_i Y_n(i) W_j Y_n(j)] \right) \\ &= \frac{1}{\ell} E[W^2] E[Y_n^2] + \frac{1}{\ell^2} \times \ell(\ell - 1) \end{aligned}$$

La suite $E[Y_n^2]$ est une suite arithmético-géométrique.
Elle est bornée si et seulement si $\frac{1}{\ell} E[W^2] < 1$.

$2. \Rightarrow 3.$

Si la suite Y_n est bornée dans L^2, la martingale Y_n converge dans L^2.
En particulier

$$E[Y_\infty^2] = \lim_{n \to +\infty} E[Y_n^2] \in]0, +\infty[$$

Remarque

La suite Y_n^2 est une sous-martingale : $Y_n^2 \leq E[Y_{n+1}^2 | \mathcal{A}_n]$.
En particulier, la suite $E[Y_n^2]$ est croissante.

$3. \Rightarrow 1.$

Comme $E[Y_\infty^2] > 0$, la martingale est non dégénérée et en particulier $E[Y_\infty] = 1$.

L'équation fondamentale dit :

$$Y_\infty = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_\infty(j)$$

$$\begin{aligned} E[Y_\infty^2] &= \frac{1}{\ell^2} \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} E[(W_j^2 Y_\infty(j))^2] + \sum_{i \neq j} E[W_i Y_\infty(i) W_j Y_\infty(j)] \right) \\ &= \frac{1}{\ell} E[W^2] E[Y_\infty^2] + \frac{1}{\ell^2} \times \ell(\ell - 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\ell - E[W^2]\right) E[Y_\infty^2] = \ell - 1}$$

Résumé du premier épisode (1)

- $m_n = f_n \lambda$ où $f_n = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \mathbb{1}_{I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}}$

$$\boxed{m = \lim_{n \to +\infty} m_n}$$

- Equations fondamentales :
  Si $Y_n = m([0,1])$ et $Y_\infty = m([0,1])$,

$$\boxed{Y_{n+1} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_n(j)} \quad \text{et} \quad \boxed{Y_\infty = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_\infty(j)}$$

- Naissance et mort : $dP_W = (1-p)\delta_0 + p\delta_{1/p}$
- Cascades log-normales : $W = e^{\sigma N - \sigma^2/2}$ où N suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

Résumé du premier épisode (2)

- Non dégénéréscence :

$$E[Y_\infty] = 1 \Leftrightarrow E[Y_\infty] > 0 \Leftrightarrow Y_n \text{ équiintégrable}$$

$$E[Y_\infty] > 0 \Leftrightarrow P[m \neq 0] > 0$$

  Y_n est équiintégrable si et seulement si $Z = \frac{1}{\ell}\sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Z(j)$ a une solution positive d'intégrale 1.

- $P[m \neq 0] = 1$?
  Supposons Y_n équiintégrable (i.e. $P[m \neq 0] > 0$).

$$P[m \neq 0] = 1 \Leftrightarrow P[W = 0] = 0$$

- Moments d'ordre 2 :

$$E[W^2] < \ell \Leftrightarrow Y_n \text{ est bornée dans } L^2 \Leftrightarrow 0 < E[Y_\infty^2] < +\infty$$

  En particulier m est non dégénérée.

C.N.S. de non dégénéréscence

Théorème (Kahane, 1976)

Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. La cascade est non dégénérée
2. La suite Y_n est équiintégrable
3. $E[W \log W] < \log \ell$

La fonction de structure τ

Pour $0 \leq q \leq 1$,

$$\begin{aligned} \tau(q) &= \log_\ell (E[W^q]) - (q-1) \\ &= \log_\ell E\left[\sum_{j=0}^{\ell-1} \left[\frac{1}{\ell} W_j\right]^q\right] \end{aligned}$$

- τ est définie et continue sur $[0,1]$ et $\tau(1) = 0$
- $\tau(0) = 1 + \log_\ell(P[W \neq 0])$
- τ est convexe
- $\tau'(1^-) = E[W \log_\ell W] - 1 \leq +\infty$
- $E[W \log W] < \log \ell$ équivaut à $\tau'(1^-) < 0$

Pourquoi $\tau'(1^-) = E[W \log_\ell W] - 1$?

- Si $\phi(q) = E[W^q]$, voir que $\phi'(1^-) = E[W \log W]$
- ϕ est convexe continue sur $[0, 1]$
- Par convergence dominée, $\phi'(q) = E[W^q \log W]$ si $0 \leq q < 1$
- $\phi'(q)$ croit vers $\phi'(1^-) \leq +\infty$
- $E[W^q \log W] = E[W^q \log W \, \mathbb{1}_{\{W<1\}}] + E[W^q \log W \, \mathbb{1}_{\{W\geq 1\}}]$
- $E[W^q \log W \, \mathbb{1}_{\{W<1\}}]$ converge vers $E[W \log W \, \mathbb{1}_{\{W<1\}}]$
- $E[W^q \log W \, \mathbb{1}_{\{W\geq 1\}}]$ croit vers $E[W \log W \, \mathbb{1}_{\{W\geq 1\}}]$
- $\phi'(1^-) = E[W \log W]$

Exemple 1 : naissance et mort

$$dP_W = (1-p)\delta_0 + p\delta_{\frac{1}{p}}$$

$$E\left[W^q\right] = 0P[W=0] + \left(\frac{1}{p}\right)^q P\left[W = \frac{1}{p}\right] = p^{1-q}$$

$$\boxed{\tau(q) = \log_\ell(E[W^q]) - (q-1) = (1-q)\times(1+\log_\ell p)}$$

La cascade est non dégénérée si et seulement si $\boxed{p > \frac{1}{\ell}}$

Exemple 2 : les cascades log-normales

$$W = e^{\sigma N - \sigma^2/2}$$

où N suit une loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} E[W^q] &= \int e^{q(\sigma x - \sigma^2/2)} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int e^{-(x-q\sigma)^2/2} e^{q^2\sigma^2/2} e^{-q\sigma^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{q^2\sigma^2/2} e^{-q\sigma^2/2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\tau(q) = \log_\ell(E[W^q]) - (q-1) = \frac{\sigma^2}{2\log\ell}(q^2 - q) - (q-1)}$$

La cascade est non dégénérée si et seulement si $\boxed{\sigma^2 < 2\log\ell}$

$\tau'(1^-) \leq 0$ est une condition nécessaire

Supposons Y_n équiintégrable.

$$Z = \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Z(j)$$

a une solution positive d'intégrale 1.

Si $q \leq 1$, $x \mapsto x^q$ est sous additive. $((a+b)^q \leq a^q + b^q)$

$$E\left[\ell^q Z^q\right] \leq \sum_{j=0}^{\ell-1} E[W_j^q Z(j)^q] = \ell E[W^q] E[Z^q]$$

$$\ell^q \leq \ell E[W^q]$$

$\tau(q) \geq 0$ pour $q \leq 1$. Donc $\tau'(1^-) \leq 0$.

$\tau'(1^-) < 0$ est une condition nécessaire

On renforce l'argument précédent.

Lemme

Si $0 < q < 1$ et si $0 < y \leq x$, $\quad (x+y)^q \leq x^q + qy^q$.

Preuve : O.P.S. $y = 1$. Si $x \geq 1$, $\quad (1+x)^q - x^q = q\theta^{q-1} \leq q$.

Lemme

Si X et X' sont indépendantes, positives intégrables de même loi et non nulles, $\quad E\left[X^q \mathbb{1}_{X' \geq X}\right] \geq \delta E[X^q]$ pour tout $q \in [0,1]$

Preuve : Il s'agit de fonctions continues de q, positives qui ne s'annulent pas.

$\tau'(1^-) < 0$ est une condition nécessaire

$$A = \{W_1 Z(1) \geq W_0 Z(0)\}$$

$$\begin{aligned}
(\ell Z)^q &\leq \sum_{j=0}^{\ell-1} (W_j Z(j))^q \\
(\ell Z)^q &\leq q(W_0 Z(0))^q + \sum_{j=1}^{\ell-1} (W_j Z(j))^q \qquad \text{sur } A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E\left[(\ell Z)^q\right] = E\left[(\ell Z)^q \mathbb{1}_A\right] + E\left[(\ell Z)^q \mathbb{1}_{A^c}\right] \\
\leq\ & qE\left[(W_0 Z(0))^q \mathbb{1}_A\right] + \sum_{j=1}^{\ell-1} E\left[(W_j Z(j))^q \mathbb{1}_A\right] + \sum_{j=0}^{\ell-1} E\left[(W_j Z(j))^q \mathbb{1}_{A^c}\right] \\
=\ & (q-1)E\left[(W_0 Z(0))^q \mathbb{1}_A\right] + \ell E[W^q]E[Z^q] \\
\leq\ & (q-1)\delta E[W^q]E[Z^q] + \ell E[W^q]E[Z^q]
\end{aligned}$$

$\tau'(1^-) < 0$ est une condition nécessaire

$$E\left[(\ell Z)^q\right] \leq (q-1)\delta E[W^q]E[Z^q] + \ell E[W^q]E[Z^q]$$

$$\ell^q \leq (q-1)\delta E[W^q] + \ell E[W^q]$$

$$\ell^{1-q}E[W^q] \geq \frac{1}{1+(q-1)\frac{\delta}{\ell}}$$

$$\tau(q) \geq -\log_\ell\left(1+(q-1)\frac{\delta}{\ell}\right)$$

$$\tau'(1^-) \leq -\frac{\delta}{\ell\log\ell} < 0$$

$\tau'(1^-) < 0$ est une condition suffisante

On suppose que $E[W \log W] < \log \ell$ (c'est à dire que $\tau'(1^-) < 0$) et on veut montrer que $E[Y_\infty] > 0$.

Lemme

Si $x_1 \cdots x_\ell \geq 0$, et si $q < 1$ est proche de 1,

$$\left(\sum_{j=1}^{\ell} x_j \right)^q \geq \sum_{j=1}^{\ell} x_j^q - 2(1-q) \sum_{i<j} (x_i x_j)^{q/2}$$

- par récurrence sur ℓ
- lorsque $\ell = 2$, par homogénéité, montrer que

$$\left(x + x^{-1} \right)^q \geq x^q + x^{-q} - 2(1-q)$$

- ou que

$$\left(e^t + e^{-t} \right)^q \geq e^{tq} + e^{-tq} - 2(1-q)$$

$\tau'(1^-) < 0$ est une condition suffisante

$$\boxed{\ell Y_n = \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_{n-1}(j)}$$

$$(\ell Y_n)^q \geq \sum_{j=0}^{\ell-1} (W_j Y_{n-1}(j))^q - 2(1-q) \sum_{i<j} (W_i Y_{n-1}(i) W_j Y_{n-1}(j))^{q/2}$$

$$\begin{aligned} \ell^q E[Y_n^q] &\geq \ell E[W^q] E\left[Y_{n-1}^q\right] - \ell(\ell-1)(1-q)E[W^{q/2}]^2 \times E\left[Y_{n-1}^{q/2}\right]^2 \\ &\geq \ell E[W^q] E\left[Y_n^q\right] - \ell(\ell-1)(1-q)E[W^{q/2}]^2 \times E\left[Y_{n-1}^{q/2}\right]^2 \end{aligned}$$

$\tau'(1^-) < 0$ est une condition suffisante

$$\ell^q E[Y_n^q] \geq \ell E[W^q] E\left[Y_n^q\right] - \ell(\ell-1)(1-q) E[W^{q/2}]^2 \times E\left[Y_{n-1}^{q/2}\right]^2$$

$$E\left[Y_n^q\right]\left(\ell^{1-q} E[W^q] - 1\right) \leq \ell^{1-q}(\ell-1)(1-q) E\left[Y_{n-1}^{q/2}\right]^2 \times E\left[W^q\right]$$

$$E\left[Y_n^q\right]\left(\ell^{\tau(q)} - 1\right) \leq \ell(\ell-1)(1-q) E\left[Y_{n-1}^{q/2}\right]^2 \times E\left[W^q\right]$$

$$1 \times \left(-\tau'(1^-) \times \log \ell\right) \leq \ell(\ell-1) E\left[Y_{n-1}^{1/2}\right]^2 \times 1$$

$\tau'(1^-) < 0$ est une condition suffisante

$$E\left[Y_{n-1}^{1/2}\right]^2 \geq \frac{-\tau'(1^-)\log \ell}{\ell(\ell-1)} = Cste$$

- $Y_n^{1/2}$ converge p.s. vers $Y_\infty^{1/2}$ et est bornée dans L^2
- La suite $Y_n^{1/2}$ est donc équiintégrable
- Elle converge donc dans L^1 vers $Y_\infty^{1/2}$
- Ainsi $E[Y_\infty^{1/2}] > 0$
- $E[Y_\infty] > 0$ et la cascade est non dégénérée

Le problème des moments

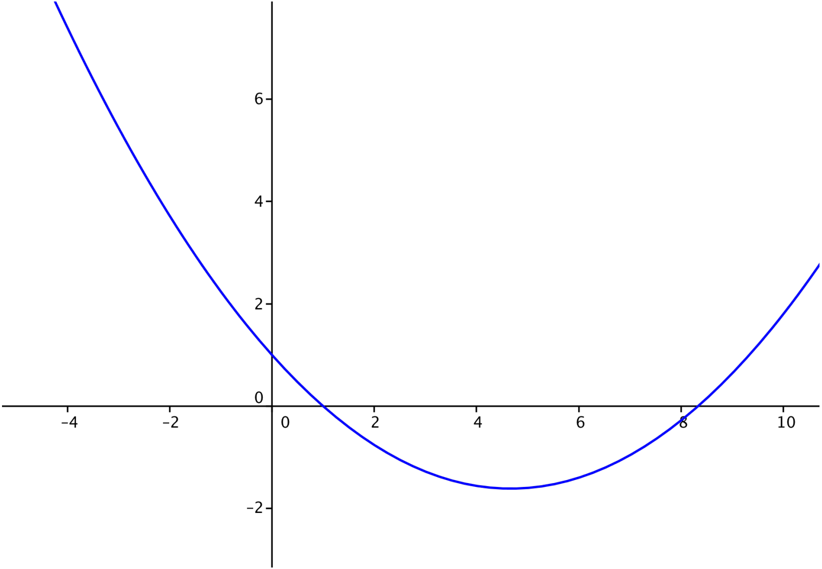
Théorème (Kahane, 1976)

Soit $q > 1$. Supposons que $E[W^q] < +\infty$
Il y a équivalence entre

1. $E[W^q] < \ell^{q-1}$ (i.e. $\tau(q) < 0$)
2. La suite Y_n est bornée dans L^q
3. $0 < E[Y_\infty^q] < +\infty$

En particulier, dans ce cas, la suite Y_n est équiintégrable et la cascade est non dégénérée.

L'exemple des cascades log-normales



$2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.$

- Si Y_n est bornée dans L^q, elle converge dans L^q et

$$E[Y_\infty^q] = \lim E[Y_n^q] \in]0, +\infty[$$

  ($E[Y_n^q]$ est une suite croissante)

- $(\ell Y_\infty)^q \geq \sum_{j=0}^{\ell-1} (W_j Y_\infty(j))^q$
- $\ell^q E[Y_\infty^q] \geq \ell E[W^q] E[Y_\infty^q]$
- $\ell^q E[Y_\infty^q] > \ell E[W^q] E[Y_\infty^q]$
- $E[W^q] < \ell^{q-1}$

$1. \Rightarrow 2.$ lorsque $1 < q \leq 2$

$$\boxed{\ell Y_{n+1} = \sum_{j=0}^{\ell-1} W_j Y_n(j)}$$

$$\begin{aligned}
(\ell Y_{n+1})^q &\leq \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} (W_j Y_n(j))^{q/2} \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\ell-1} (W_j Y_n(j))^q + \sum_{i \neq j} (W_i Y_n(i))^{q/2} (W_j Y_n(j))^{q/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell^q E\left[Y_{n+1}^q\right] &\leq \ell E\left[Y_n^q\right] E\left[W^q\right] + \ell(\ell-1) E[W^{q/2}]^2 E\left[Y_n^{q/2}\right]^2 \\
&\leq \ell E\left[Y_{n+1}^q\right] E\left[W^q\right] + \ell(\ell-1)
\end{aligned}$$

$1. \Rightarrow 2.$ une idée dans le cas général

On suppose $E[W^q] < \ell^{q-1}$

- Si $k < q \leq k+1$, on trouve par un calcul comparable :

$$E\left[Y_{n+1}^q\right](\ell^{q-1} - E[W^q]) \leq \ell\left(E[W^k]E\left[Y_n^k\right]\right)^{q/k}$$

- Si Y_n bornée dans L^k, alors Y_n est bornée dans L^q
- Si $E[W^q] < \ell^{q-1}$ (i.e. si $\tau(q) < 0$) alors $\tau(t) < 0$ pour tout t tel que $1 < t < q$
- De proche en proche, Y_n est bornée dans L^2, L^3,..., L^k

Dimension des cascades non dégénérées

Théorème (Peyrière, 1976)

On suppose $0 < E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty$. On a presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = 1 - E[W \log_\ell W] \quad dm - \text{presque partout}$$

Corollaire

On suppose $0 < E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty$.
Presque sûrement sur $\{m \neq 0\}$:

1. Il existe un borélien E tel que $\dim(E) = 1 - E[W \log_\ell W]$ et $m([0,1] \setminus E) = 0$
2. Si $\dim(F) < 1 - E[W \log_\ell W]$ alors $m(F) = 0$
3. $\dim_*(m) = \dim^*(m) = 1 - E[W \log_\ell W]$

$0 < E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty \Rightarrow E[W \log W] < \log \ell$

Supposons $0 < E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty$.

La fonction $t \mapsto t \log t$ est suradditive.

$$\ell Y_\infty \log(\ell Y_\infty) \geq \sum_{j=0}^{\ell-1} (W_j Y_\infty(j)) \log(W_j Y_\infty(j))$$

$$E[\ell Y_\infty \log(\ell Y_\infty)] \geq \ell E[(W Y_\infty) \log(W Y_\infty)]$$

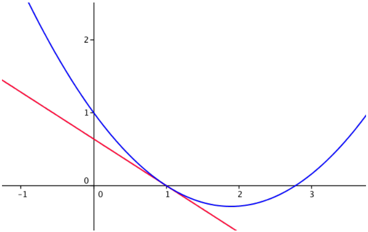
$$E[Y_\infty \log(\ell Y_\infty)] > E[W \log W] E[Y_\infty] + E[Y_\infty \log Y_\infty] E[W]$$

$$E[Y_\infty] \log \ell > E[W \log W] E[Y_\infty]$$

La cascade est non dégénérée

Remarque

$$\boxed{\dim m = 1 - E[W \log_\ell W] = -\tau'(1^-)}$$



$$\boxed{0 < \dim m \leq 1}$$

presque sûrement sur l'évènement $\{m \neq 0\}$

(sous l'hypothèse $E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty$)

Exemple 1 : naissance et mort

$$dP_W = (1-p)\delta_0 + p\delta_{\frac{1}{p}} \qquad \text{avec} \qquad p > 1/\ell$$

$$\tau(q) = (1-q) \times (1 + \log_\ell p)$$

$$\boxed{\dim m = 1 + \log_\ell p}$$

Notons $\mathcal{M}_n^*$ l'ensemble des mots $\varepsilon \in \mathcal{M}_n$ tels que $m(I_\varepsilon) > 0$.

$$\boxed{\mathrm{supp}\,(m) = K = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{\varepsilon\in\mathcal{M}_n} \overline{I_\varepsilon}}$$

Presque sûrement, $\boxed{\dim(K) = 1 + \log_\ell p}$

Exemple 2 : cascades log-normales

$$W = e^{\sigma N - \sigma^2/2}, \qquad \sigma^2 < 2 \log \ell$$

$$\tau(q) = \frac{\sigma^2}{2 \log \ell}(q^2 - q) + 1 - q$$

$$\boxed{\dim m = 1 - \frac{\sigma^2}{2 \log \ell}}$$

" Presque sûrement, *dm* presque partout "

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times [0,1] \quad \text{muni de la tribu produit}$$

$$\boxed{Q[A] = E\left[\int \mathbb{1}_A \, dm\right]}$$

Il ne s'agit pas d'une mesure produit.

$$Q[\tilde{\Omega}] = E\left[\int dm\right] = E[Y_\infty] = 1$$

Si une propriété est vraie sur un ensemble $A \subset \tilde{\Omega}$ tel que $Q[A] = 1$, alors, presque sûrement, elle est vraie *dm* presque partout.

Résumé du deuxième épisode

- $\tau(q) = \log_\ell(E[W^q]) - (q-1), \quad$ pour $0 \leq q \leq 1$.
  τ est convexe continue sur $[0,1]$.

- Condition de non dégénérescence

$$P[m \neq 0] > 0 \Leftrightarrow E[W \log W] < \log \ell \Leftrightarrow \tau'(1^-) < 0$$

  De plus, sous cette hypothèse,

$$P[m \neq 0] = 1 \Leftrightarrow P[W = 0] = 0.$$

- Le problème des moments.
  Soit $q > 1$.

  $E[W^q] < \ell^{q-1} \Leftrightarrow Y_n$ est bornée dans $L^q \Leftrightarrow 0 < E[Y_\infty^q] < +\infty$

  La condition s'écrit encore $\tau(q) < 0$.

Dimension des cascades non dégénérées

Théorème (Peyrière, 1976)

On suppose $0 < E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty$. On a presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = 1 - E[W \log_\ell W] \quad dm - \text{presque partout}$$

Presque sûrement, $dm-$presque partout signifie relativement à la mesure Q définie par

$$\boxed{Q[A] = E\left[\int \mathbb{1}_A \, dm\right]}$$

Deux lemmes

$$\boxed{m_n = f_n \lambda \quad \text{où} \quad f_n = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} W_{\varepsilon_1} W_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \mathbb{1}_{I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}}}$$

Lemme

Supposons $E[W \log W] < \log \ell$. Presque sûrement,

$$\frac{\log f_n(x)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} E[W \log W] \qquad \text{pour } dm - \text{presque tout } x$$

Lemme

Supposons $E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty$. Presque sûrement,

$$\frac{\log \mu_n(I_n(x))}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\log \ell \qquad \text{pour } dm - \text{presque tout } x$$

où $\mu_n = \frac{1}{f_n} m$.

Preuve du théorème

- $dm = f_n \, d\mu_n$
- $f_n(x)$ est constante sur $I_n(x)$
- $m(I_n(x)) = \int_{I_n(x)} f_n(y) d\mu_n(y) = f_n(x)\mu_n(I_n(x))$
-

$$\begin{aligned} \frac{\log(m(I_n(x))}{\log|I_n(x)|} &= \frac{\log f_n(x) + \log \mu_n(I_n(x))}{-n \log \ell} \\ &\to -E[W \log_\ell W] + 1 \end{aligned}$$

presque sûrement, dm presque partout.

Preuve du premier lemme

$$\boxed{\begin{aligned} g_n &= \sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \mathbb{1}_{I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}} \\ f_n &= g_1 \times \cdots \times g_n \end{aligned}}$$

$$\frac{\log f_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log g_k$$

On pense à la loi des grand nombres...

Loi de g_n

$$g_n = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_n} W_\varepsilon \mathbb{1}_{I_\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(g_n)] &= E\left[\int \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_n} \phi(W_\varepsilon) \mathbb{1}_{I_\varepsilon}\, dm\right] \\ &= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_n} E\left[\phi(W_\varepsilon) m(I_\varepsilon)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[\phi(W_\varepsilon) m_{n+k}(I_\varepsilon)\right] &= \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} E\left[\phi(W_\varepsilon) \ell^{-(n+k)} W_{\varepsilon_1} \cdots W_\varepsilon \cdots W_{\varepsilon\alpha_1 \cdots \alpha_k}\right] \\ &= \ell^{-n} E\left[\phi(W) W\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[\phi(g_n)] = E[\phi(W)W]}$$

Indépendance des g_n et loi des grands nombres

Même type de calcul.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi_1(g_1)\cdots\phi_n(g_n)\right] &= \sum_{\varepsilon\in\mathcal{M}_n} E\left[\phi_1(W_{\varepsilon_1})\cdots\phi_n(W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})m(I_\varepsilon)\right] \\ &= \cdots \\ &= E[\phi_1(W)W]\times\cdots\times E[\phi_n(W)W] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi_1(g_1)\right]\times\cdots\times\mathbb{E}\left[\phi_n(g_n)\right]\end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log g_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[W\log W] \quad dQ-\text{presque sûrement}$$

$$\left(\quad \mathbb{E}[|\log g_n|] = E[W|\log W|] < +\infty \quad\right)$$

Preuve du second lemme

$$\boxed{f_n\,\mu_n = m}$$

$$\boxed{W_{\varepsilon_1}\cdots W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\,\mu_n(I_\varepsilon) = m(I_\varepsilon)}$$

$\mu_n(I_\varepsilon)$ est indépendant de $W_{\varepsilon_1},\cdots,W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$ et a même loi que $\ell^{-n}Y_\infty$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\ell^n\mu_n(I_n(x)))^{-1/2}\right] &= E\left[\ell^{-n/2}\int \mu_n(I_n(x))^{-1/2}dm(x)\right]\\
&= \ell^{-n/2}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{M}_n} E\left[\mu_n(I_\varepsilon)^{-1/2}m(I_\varepsilon)\right]\\
&= \ell^{-n/2}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{M}_n} E\left[W_{\varepsilon_1}\cdots W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right]E\left[\mu_n(I_\varepsilon)^{1/2}\right]\\
&= E\left[Y_\infty^{1/2}\right]
\end{aligned}$$

$$\liminf \left(\frac{\log(\mu_n(I_n(x)))}{n} \right) \geq -\log \ell$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\ell^n \mu_n(I_n(x))\right)^{-1/2} \right] = E\left[Y_\infty^{1/2} \right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left(\ell^n \mu_n(I_n(x))\right)^{-1/2} \right] < +\infty$$

$$dQ - \text{Presque sûrement,} \quad \ell^n \mu_n(I_n(x)) \geq 1/n^4 \quad \text{pour } n \text{ grand}$$

$$\text{Presque sûrement,} \quad \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log\left(\ell^n \mu_n(I_n(x))\right)}{n} \geq 0 \quad dm\text{−presque partout}$$

$$\limsup \left(\frac{\log(\mu_n(I_n(x)))}{n} \right) \leq -\log \ell$$

$$\boxed{W_{\varepsilon_1} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \, \mu_n(I_\varepsilon) = m(I_\varepsilon)}$$

Soit $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
Q[\ell^n \mu_n(I_n(x)) > \alpha^n] &= E\left[\int \mathbb{1}_{\{\ell^n \mu_n(I_n(x)) > \alpha^n\}} \right] \\
&= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_n} E\left[\int_{I_\varepsilon} \mathbb{1}_{\{\ell^n \mu_n(I_\varepsilon) > \alpha^n\}}(x) \, dm(x) \right] \\
&= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_n} E\left[m(I_\varepsilon) \mathbb{1}_{\{\ell^n \mu_n(I_\varepsilon) > \alpha^n\}} \right] \\
&= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}_n} E\left[\mu_n(I_\varepsilon) \mathbb{1}_{\{\ell^n \mu_n(I_\varepsilon) > \alpha^n\}} \right] \\
&= E\left[Y_\infty \mathbb{1}_{\{Y_\infty > \alpha^n\}} \right]
\end{aligned}$$

$$\limsup \left(\frac{\log(\mu_n(I_n(x)))}{n} \right) \leq -\log \ell$$

$$Q[\ell^n \mu_n(I_n(x)) > \alpha^n] = E\left[Y_\infty \mathbb{1}_{\{Y_\infty > \alpha^n\}}\right]$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} Q[\ell^n \mu_n(I_n(x)) > \alpha^n] &= E\left[\sum_{n\geq 1} Y_\infty \mathbb{1}_{\{Y_\infty > \alpha^n\}}\right] \\
&\leq E\left[Y_\infty \log_\alpha^+(Y_\infty)\right] \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

$Q-$presque sûrement, $\ell^n \mu_n(I_n(x)) \leq \alpha^n$ à partir d'un certain rang

Presque sûrement, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\ell^n \mu_n(I_n(x))\right)}{n} \leq 0$ $dm-$presque partout

Importance de l'ordre des quantificateurs !

Soit $x \in [0,1]$ quelconque, codé par $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \cdots$.

$$m(I_n(x)) = m(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}) = W_{\varepsilon_1} \cdots W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \mu_n(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n})$$

$$\frac{\log(m(I_n(x)))}{n} = \frac{1}{n}(\log W_{\varepsilon_1} + \cdots + \log W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}) + \frac{1}{n} \log \mu_n(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n})$$

- Par la loi des grands nombres, $\frac{1}{n}(\log W_{\varepsilon_1} + \cdots + \log W_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n})$ converge presque sûrement vers $E[\log W]$
- $\frac{1}{n} \log \mu_n(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n})$ converge presque sûrement vers $-\log \ell$

$$\boxed{\text{Pour tout } x, \text{ p.s.,} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\log(m(I_n(x)))}{\log |I_n(x)|} = 1 - E[\log_\ell W] \geq 1 \text{ !!!}}$$

Remarque finale

- Sous la seule hypothèse $E[W \log W] < \log \ell$, la preuve proposée permet de dire malgré tout :
  Presque sûrement,

  $$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} \leq 1 - E[W \log_\ell W] \quad dm-\text{presque partout}$$

  On a donc :

  $$\boxed{\mathrm{Dim}^*(m) \leq 1 - E[W \log_\ell W] \qquad \text{presque sûrement}}$$

  où $\mathrm{Dim}^*(m) = \inf(\mathrm{Dim}\,(A)\ ;\ m([0,1] \setminus A) = 0)$ et où $\mathrm{Dim}\,(A)$ désigne la dimension de packing de A.
- En fait, Kahane dans les années 80 a montré que l'on pouvait s'affranchir de l'hypothèse $0 < E[Y_\infty \log Y_\infty] < +\infty$.

Intermède : oublions un instant les cascades

m mesure de probabilités (déterministe)

$$\tau(q) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log_\ell \left(\sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^q \right)$$

τ est une fonction convexe décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\tau(1) = 0$

Théorème

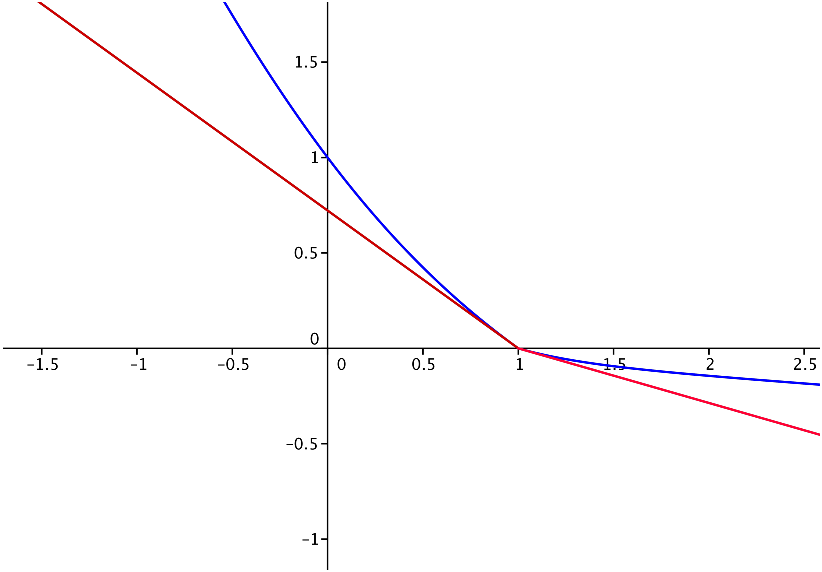
$$-\tau'(1^+) \leq \dim_*(m) \leq \mathrm{Dim}^*(m) \leq -\tau'(1^-)$$

Corollaire

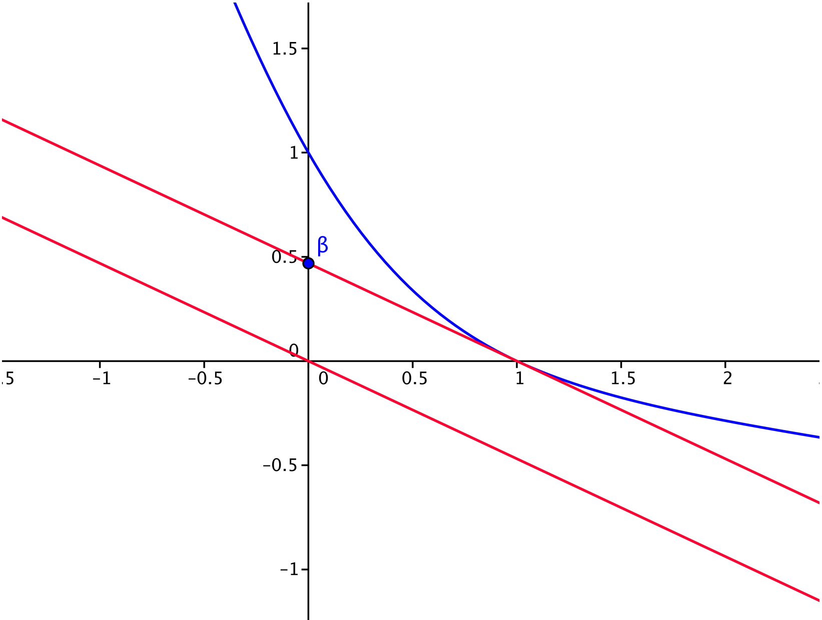
Supposons que $\tau'(1)$ existe. Alors

1. dm-presque sûrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(m(I_n(x)))}{\log|I_n(x)|} = -\tau'(1)$
2. $\dim\left(E_{-\tau'(1)}\right) = -\tau'(1)$
3. $\dim_*(m) = \dim^*(m) = \mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) = -\tau'(1)$

La fonction τ n'est pas toujours dérivable



Si $\beta = -\tau'(1), \quad \tau^*(\beta) = \beta$



Comment "passer" au formalisme multifractal

Soit q tel que $\tau'(q)$ existe et $\beta = -\tau'(q)$.

Supposons qu'il existe une mesure m_q telle que pour tout intervalle ℓ-adique I,

$$\frac{1}{C}\, m(I)^q |I|^{\tau(q)} \leq m_q(I) \leq C\, m(I)^q |I|^{\tau(q)}$$

Alors

$$\tau_q(t) = \tau(qt) - t\tau(q)$$

$$-\tau_q'(1) = -q\tau'(q) + \tau(q) = \tau^*(\beta)$$

$$\boxed{\frac{\log(m_q(I_n(x)))}{\log|I_n(x)|} = q\,\frac{\log(m(I_n(x)))}{\log|I_n(x)|} + \tau(q) + o(1)}$$

$$\boxed{\dim(E_\beta) = \dim(m_q) = -\tau_q'(1) = \tau^*(\beta)}$$

Analyse multifractale des cascades de Mandelbrot : position du problème

$$E_\beta = \left\{ x \ ; \ \lim_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = \beta \right\}$$

- Trouver β tel que $E_\beta \neq \emptyset$
- Soit β fixé. Que vaut presque sûrement $\dim(E_\beta)$?
- A-t-on presque sûrement, pour tout β, $\dim(E_\beta) = \cdots$?

Hypothèses supplémentaires simplificatrices

m : cascade non dégénérée

On suppose de plus :

1. $P[W=0]=0$
2. Pour tout réel q, $E\left[W^q\right]<+\infty$

Conséquences :

- $P[m \neq 0]=1$
- La fonction $\tau(q)=\log_\ell(E[W^q])-(q-1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞
- Il existe $r>1$ tel que $\tau(r)<0$ (et donc $E[Y_\infty^r]<+\infty$)
- Pour tout $\alpha>0$ tel que $E\left[Y_\infty^{-\alpha}\right]<+\infty$.
  C'est une conséquence de la formule de duplication :
  $$F(\ell t)=\left(\int_0^{+\infty} F(tw)\,dP_W(w)\right)^\ell$$
  où $F(t)=E\left[e^{-tY_\infty}\right]$.

Idée : construire des cascades auxiliaires

Rappel : lorsque m est une cascade binomiale de paramètre p, les mesures auxiliaires sont des cascades binomiales de paramètres $\frac{p^q}{p^q+(1-p)^q}$

Ici on peut penser aux cascades générées par $\frac{W^q}{E[W^q]}$.
Posons $W' = \frac{W^q}{E[W^q]}$

Fonction de structure de la cascade associée :

$$\begin{aligned}
\tau_q(t) &= \log_\ell(E[W'^t]) - (t-1) \\
&= \log_\ell\left(E\left[\frac{W^{qt}}{E[W^q]^t}\right]\right) - (t-1) \\
&= \log_\ell\left(E\left[W^{qt}\right]\right) - t\log_\ell(E[W^q]) - (t-1) \\
&= \tau(tq) - t\tau(q)
\end{aligned}$$

Condition de non dégénérescence de la cascade auxiliaire

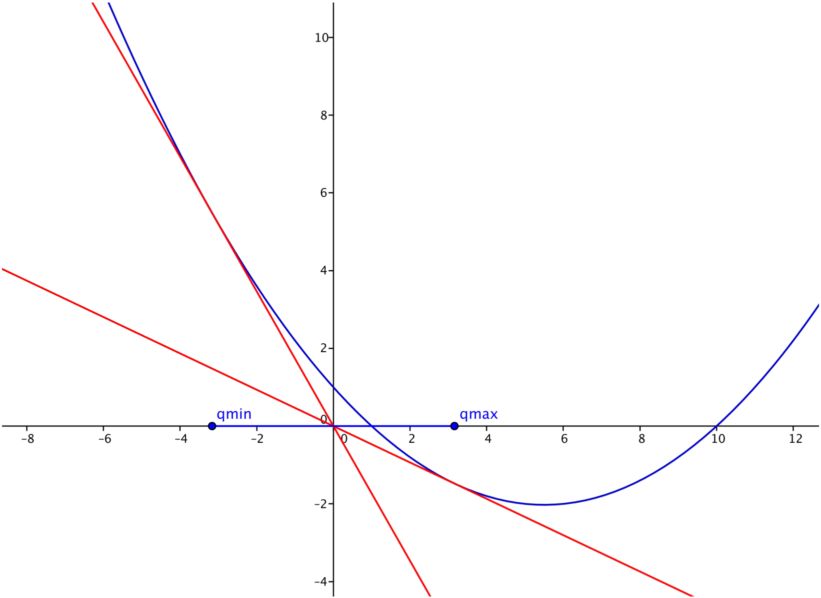
$$\boxed{\tau_q(t) = \tau(qt) - t\tau(q)}$$

$$\tau_q'(1^-) = q\tau'(q) - \tau(q)$$

$$\begin{aligned} \tau_q'(1^-) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -q\tau'(q) + \tau(q) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tau^*(-\tau'(q)) > 0 \end{aligned}$$

- τ^* (transformée de Legendre de τ) est une fonction concave
- $\{\beta \; ; \; \tau^*(\beta) > 0\}$ est un intervalle
- τ' est croissante
- $\{q \; ; \; \tau^*(-\tau'(q)) > 0\}$ est un intervalle $]q_{min}, q_{max}[$

L'intervalle $]q_{min}, q_{max}[$



Comportement simultané de deux cascade

Théorème

Soit (W, W') un vecteur aléatoire conduisant à deux cascades non dégénérées m et m' associées à W et W'. On suppose :

- Il existe $r > 1$ tel que $E[Y_\infty^r] < \infty < +\infty$ et $E[Y_\infty'^r] < +\infty$
- Il existe $\alpha > 0$ tel que $E[Y_\infty^{-\alpha}] < +\infty$

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = 1 - E[W' \log_\ell W] \quad dm' - \text{presque partout}$$

Application à l'analyse de m

On applique le résultat précédent avec $W' = \frac{W^q}{E[W^q]}$
On prend $\beta = -\tau'(q)$ où $q \in]q_{min}, q_{max}[$.

Théorème

$$\dim(E_\beta) \geq \tau^*(\beta)$$

où

$$E_\beta = \left\{ x \ ; \ \lim_{n \to \infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = \beta \right\}$$

Preuve de $\dim(E_\beta) \geq \tau^*(\beta)$

- $E[Y_\infty^r] < +\infty$ car $\tau'(1) < 0$ et τ est définie au voisinage de 1
- $E[Y_\infty'^r] < +\infty$ car $\tau_q'(1) = -\tau^*(-\tau'(q)) = -\tau^*(\beta) < 0$ et τ_q est définie au voisinage de 1
- L'hypothèse $E[Y_\infty^{-\alpha}] < +\infty$ est vérifiée ici pour tout $\alpha > 0$
- $1 - E[W' \log_\ell W] = 1 - E\left[\frac{W^q}{E[W^q]} \log_\ell W\right] = -\tau'(q) = \beta$
- E_β est plein pour la mesure m'
- $$\begin{aligned} \dim(E_\beta) &\geq \dim(m') \\ &= -\tau_q'(1) \\ &= -q\tau'(q) + \tau(q) \\ &= \tau^*(-\tau'(q)) \\ &= \tau^*(\beta) \end{aligned}$$

Cascades simultanées : preuve

$$Q'(A) = E\left[\int \mathbb{1}_A \, dm'\right]$$

$$dm = f_n \, d\mu_n \qquad \text{et} \qquad f_n = g_1 \times \cdots \times g_n$$

$$\frac{\log(m(I_n(x)))}{\log|I_n(x)|} = \frac{\log f_n(x) + \log \mu_n(I_n(x))}{-n \log \ell}$$

On montre que :

1. $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log g_j$ converge vers $E[W' \log W]$ $\quad dQ'$ presque sûrement
2. $\frac{1}{n} \log \mu_n(I_n(x))$ converge vers $-\log \ell$ $\quad dQ'$ presque sûrement

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log g_j$ converge vers $E[W' \log W]$

$$g_n = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}n} W_\varepsilon \mathbb{1}_{I_\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'[\phi(g_n)] &= E\left[\int \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}n} \phi(W_\varepsilon) \mathbb{1}_{I_\varepsilon}\, dm'\right] \\ &= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{M}n} E\left[\phi(W_\varepsilon) m'(I_\varepsilon)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[\phi(W_\varepsilon) m'_{n+k}(I_\varepsilon)\right] &= \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} E\left[\phi(W_\varepsilon) \ell^{-(n+k)} W'_{\varepsilon_1} \cdots W'_{\varepsilon} \cdots W'_{\varepsilon \alpha_1 \cdots \alpha_k}\right] \\ &= \ell^{-n} E\left[\phi(W) W'\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}'[\phi(g_n)] = E[\phi(W) W']}$$

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log g_j$ converge vers $E[W' \log W]$

De même on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'\left[\phi_1(g_1)\cdots\phi_n(g_n)\right] &= E[\phi_1(W)W'] \times \cdots \times E[\phi_n(W)W'] \\ &= \mathbb{E}'\left[\phi_1(g_1)\right] \times \cdots \times \mathbb{E}'\left[\phi_n(g_n)\right] \end{aligned}$$

ce qui prouve l'indépendance relativement à la probabilité Q'.

Par la loi des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log g_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[W' \log W] \quad dQ' - \text{presque sûrement}$$

$$\left(\quad \mathbb{E}'[|\log g_n|] = E[W' |\log W|] < +\infty \quad \right)$$

$\frac{1}{n}\log\mu_n(I_n(x))$ converge vers $-\log\ell$

$$\boxed{f_n\,\mu_n = m}$$

$$\boxed{W_{\varepsilon_1}\cdots W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\,\mu_n(I_\varepsilon) = m(I_\varepsilon)}$$

$$\boxed{W'_{\varepsilon_1}\cdots W'_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\,\mu'_n(I_\varepsilon) = m'(I_\varepsilon)}$$

$\mu_n(I_\varepsilon)$ est indépendant de $W_{\varepsilon_1},\cdots,W_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$ et a même loi que $\ell^{-n}Y_\infty$. Il en est de même pour $\mu'_n(I_\varepsilon)$. vis à vis de $\ell^{-n}Y'_\infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'\left[(\ell^n\mu_n(I_n(x)))^{-\eta}\right] &= E\left[\ell^{-n\eta}\int\mu_n(I_n(x))^{-\eta}dm'(x)\right]\\ &= \ell^{-n\eta}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{M}_n}E\left[\mu_n(I_\varepsilon)^{-\eta}m'(I_\varepsilon)\right]\\ &= \ell^{-n\eta}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{M}_n}E\left[W'_{\varepsilon_1}\cdots W'_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right]E\left[\mu_n(I_\varepsilon)^{-\eta}\mu'_n(I_\varepsilon)\right]\end{aligned}$$

$\frac{1}{n}\log \mu_n(I_n(x))$ converge vers $-\log \ell$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}'\left[(\ell^n \mu_n(I_n(x)))^{-\eta}\right] &= \ell^{-n\eta} \sum_{\varepsilon\in\mathcal{M}_n} E\left[W'_{\varepsilon_1}\cdots W'_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right] E\left[\mu_n(I_\varepsilon)^{-\eta}\mu'_n(I_\varepsilon)\right] \\
&= E[Y_\infty^{-\eta} Y'_\infty] \\
&\le E[Y_\infty^{-\eta r'}]^{1/r'} E\left[Y'^{r}_\infty\right]^{1/r}
\end{aligned}$$

où r' est l'exposant conjugué de r.

Si on choisit η tel que $\eta r' = \alpha$, on obtient donc :

$$\mathbb{E}'\left[(\ell^n \mu_n(I_n(x)))^{-\eta}\right] < +\infty$$

et on peut conclure comme plus haut

Presque sûrement, $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\log(\ell^n \mu_n(I_n(x)))}{n} \ge 0 \quad dm'-$presque partout

$\frac{1}{n}\log \mu_n(I_n(x))$ converge vers $-\log \ell$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'\left[(\ell^n \mu_n(I_n(x)))^\eta\right] &= E[Y_\infty^\eta Y'_\infty] \\ &\leq E[Y_\infty^{\eta r'}]^{1/r'} E\left[Y'^r_\infty\right]^{1/r} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

si on choisit η tel que $\eta r' = r$.

On peut alors conclure :

Presque sûrement, $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{\log\left(\ell^n \mu_n(I_n(x))\right)}{n} \leq 0 \quad dm'-$presque partout

Pour aller plus loin

On sait qu'on a toujours :

$$\dim(E_\beta) \leq \tilde{\tau}^*(\beta)$$

où

$$\tilde{\tau}(q) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log_\ell \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q \right)$$

Théorème

Presque sûrement, pour tout $q \in]q_{min}, q_{max}[$, $\tilde{\tau}(q) = \tau(q)$.

Corollaire

Pour tout $\beta \in]-\tau'(q_{max}), -\tau'(q_{min})[$,

$$\dim(E_\beta) = \tau^*(\beta)$$

presque sûrement.