Sur la vitesse de convergence des sommes de Birkhoff

Yanick Heurteaux
(en collaboration avec Frédéric Bayart et Zoltán Buczolich)

Université Clermont-Auvergne ; Clermont-Ferrand

Domaine de Chalès, 16-20 Septembre 2018

Rotations irrationnelles

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$
- m : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$R_\alpha \ : \ x \in \mathbb{T} \mapsto x + \alpha \in \mathbb{T}$$

Théorème (Théorème de Birkhoff)

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour presque tout $x \in \mathbb{T}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{T}} f(t)dm(t) \ .$$

Reformulation et questions

$$\boxed{S_{n,\alpha}f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\alpha)}$$

Si $\int_{\mathbb{T}} f(t)dm(t) = 0$, alors $S_{n,\alpha}f(x) = o(n)$ pour presque tout x.

Questions naturelles :

- Que dire de l'ordre de grandeur de $S_{n,\alpha}f(x)$ pour f générique ?
- Que dire de l'ordre de grandeur de $S_{n,\alpha}f(x)$ pour f donnée et
  - x typique ?
  - α typique ?
  - (α, x) typique ?
- Pour f et α donnés, que dire de la taille de l'ensemble des points x exceptionnels ?

Notation : $\mathcal{C}_0(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \; ; \int_{\mathbb{T}} f(t)dm(t) = 0 \right\}$

Deux généralisations possibles

- $\mathbb{T}$ est un compact métrique et R_α est une transformation uniquement ergodique (la mesure de Lebesgue est l'unique mesure R_α invariante et ergodique).

- $(\mathbb{T}, +)$ est un groupe abélien compact, m est la mesure de Haar sur $\mathbb{T}$ et R_α est une translation ergodique lorsque α est irrationnel.

Un résultat connu

Soit K un compact métrique infini et $T : K \to K$ une transformation inversible uniquement ergodique. Notons

$$\boxed{S_{n,T}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)}$$

et

$$\boxed{\mathcal{E}_\psi(f) = \left\{x \in K;\ \limsup_n \frac{|S_{n,T}f(x)|}{\psi(n)} = +\infty\right\}}$$

Théorème

Soit μ l'unique mesure T-invariante et ergodique. Supposons $\psi(n) = o(n)$. Pour quasi toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(K)$,

$$\mu(\mathcal{E}_\psi(f)) = 1 \ .$$

(Krengel-78 lorsque $K = [0,1]$ puis Liardet-Volný-97)

L'ensemble $\mathcal{E}_\psi(f)$ contient un $\mathcal{G}_\delta$ dense

$$\boxed{\mathcal{E}_\psi(f) = \left\{x \in K;\ \limsup_n \frac{|S_{n,T}f(x)|}{\psi(n)} = +\infty\right\}}$$

Théorème (Bayart, Buczolich, H.)

Soit μ l'unique mesure T-invariante et ergodique.
Suposons $\psi(n) = o(n)$.
Pour quasi toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(K)$, l'ensemble $\mathcal{E}_\psi(f)$ contient un $\mathcal{G}_\delta$ dense de μ-mesure pleine.

Et pour un groupe ?

$(G, +, \mu)$: groupe abélien métrique compact connexe possèdant un sous-groupe cyclique dense.

Connu : la translation T_u est μ-ergodique si et seulement si $\{nu\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense. Dans ce cas T_u est uniquement ergodique. De plus, $\{u\ ;\ T_u \text{ ergodique}\}$ est dense.

$$\boxed{S_{n,u}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x+ku)}$$

$$\boxed{\mathfrak{E}_\psi(f) = \left\{(u,x) \in G^2\ ; \limsup_n \frac{|S_{n,u}f(x)|}{\psi(n)} = +\infty\right\}}$$

Théorème (Bayart, Buczolich, H.)

Si $\psi(n) = o(n)$, pour quasi tout $(f, u, x) \in \mathcal{C}_0(G) \times G^2$,

$$(u, x) \in \mathfrak{E}_\psi(f)\ .$$

Un "Fubini topologique"

Par le théorème de Kuratowski-Ulam, on en déduit

Corollaire

Pour quasi toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(G)$, l'ensemble $\mathfrak{E}_\psi(f)$ est résiduel dans $G \times G$.

Par l'invariance par translation on a aussi

Corollaire

Pour quasi toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(G)$, l'ensemble

$$\left\{ u \in G \ ; \limsup_n \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(ku)}{\psi(n)} = +\infty \right\}$$

est résiduel dans G.

L'ensemble $\mathfrak{E}_\psi(f)$ est-il plein pour la mesure $\mu \otimes \mu$?

μ : mesure de Haar sur G.

Théorème (Bayart, Buczolich, H.)

1. Pour tout $\nu > 1/2$ et toute fonction $f \in L^2_0(G)$,

$$\mu \otimes \mu \left(\left\{ (u,x) \in G^2;\ \limsup_n \frac{|S_{n,u} f(x)|}{n^\nu} \geq 1 \right\} \right) = 0.$$

2. Pour quasi toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(G)$ on a :

$$\mu \otimes \mu \left(\left\{ (u,x) \in G^2;\ \limsup_n \frac{|S_{n,u} f(x)|}{n^{1/2}} = +\infty \right\} \right) = 1.$$

Généricité de $\mathcal{E}_\psi(f)$:

Construction d'une fonction avec de grandes sommes de Birkhoff

Lemme

Soient $M \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $f \in \mathcal{C}_0(K)$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$, un entier $m \geq M$ et $E \subset K$ tels que

$$\forall x \in E, \quad |S_{m,T} f(x)| \geq C\psi(m)$$

et

$$\mu(E) > 1 - \varepsilon \ .$$

Fonction avec de grandes sommes de Birkhoff :

Tours de Rokhlin

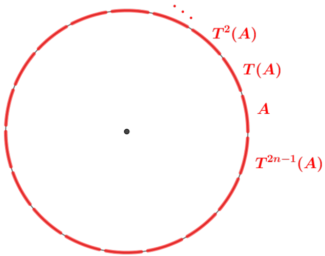


Figure – Une tour de Rockhlin à $2n$ éléments

Si $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, il existe A tel que $A, T(A), \ldots, T^{2n-1}(A)$ sont deux à deux disjoints et

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{2n-1} T^j(A)\right) > 1 - \varepsilon \ .$$

Fonction avec de grandes sommes de Birkhoff :

Une fonction étagée

$$\boxed{g = \varepsilon \text{ sur } \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(A) \quad \text{et} \quad g = -\varepsilon \text{ sur } \bigcup_{j=n}^{2n-1} T^j(A)}$$

$$\boxed{E = \left(\bigcup_{j=0}^{n-1-m} T^j(A) \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=n}^{2n-1-m} T^j(A) \right)}$$

Si $x \in E$,

$$|S_{m,T}g(x)| = m\varepsilon \geq C\psi(m) \; .$$

$$\mu(E) = 2(n-m)\mu(A) \geq 2(n-m) \times \frac{1-\varepsilon}{2n} \geq 1 - 2\varepsilon$$

si n est assez grand.

Fonction avec de grandes sommes de Birkhoff :

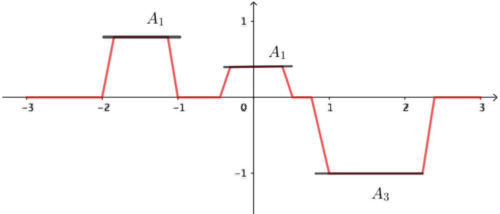
Un lemme d'approximation

Lemme

Soit g une fonction étagée telle que $\int_K g(x)d\mu(x) = 0$ et $\delta > 0$. Il existe $f \in \mathcal{C}_0(K)$ telle que

$$\|f\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \mu(\{f \neq g\}) < \delta \ .$$

Ingrédients : régularité de la mesure et lemme d'Urisohn.
$g = \sum_i a_i 1\!\!1_{A_i}$. La remplacer par $f = \sum_i a_i \varphi_i$ puis corriger pour que la moyenne reste nulle.



Fonction avec de grandes sommes de Birkhoff :

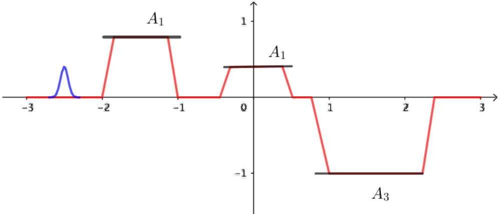
Un lemme d'approximation

Lemme

Soit g une fonction étagée telle que $\int_K g(x)d\mu(x) = 0$ et $\delta > 0$. Il existe $f \in \mathcal{C}_0(K)$ telle que

$$\|f\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \mu(\{f \neq g\}) < \delta \ .$$

Ingrédients : régularité de la mesure et lemme d'Urisohn.
$g = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}$. La remplacer par $f = \sum_i a_i \varphi_i$ puis corriger pour que la moyenne reste nulle.



Construction d'un $\mathcal{G}_\delta$ dense

- Soit (h_j) une suite de cobords dense dans $\mathcal{C}_0(K)$ (i.e. $h_j = k_j - Tk_j$)
- Soit C_j tel que $\sup_n(\|S_{n,T}h_j\|_\infty) \leq C_j$
- Par le lemme,, soit f_j, $m_j \geq j$ et E_j tels que

$$\|f_j\|_\infty \leq \frac{1}{j}, \quad \mu(E_j) \geq 1 - \frac{1}{j}$$

et

$$|S_{m_j,T}f_j(x)| \geq (j+1+C_j)\psi(m_j) \quad \text{si } x \in E_j$$

- Soit $g_j = h_j + f_j$. La suite (g_j) est encore dense et

$$\boxed{|S_{m_j,T}g_j(x)| \geq (j+1)\psi(m_j) \quad \text{si } x \in E_j}$$

Construction d'un $\mathcal{G}_\delta$ dense

$$\boxed{|S_{m_j,T}g_j(x)| \geq (j+1)\psi(m_j) \quad \text{si } x \in E_j}$$

Il existe un ouvert $U_j \supset E_j$ et $\delta_j > 0$ tels que

$$\boxed{|S_{m_j,T}f(x)| \geq j\psi(m_j) \quad \text{si } x \in U_j \text{ et } f \in B(g_j,\delta_j)}$$

$$\boxed{\mathcal{R} = \bigcap_J \bigcup_{j \geq J} B(g_j,\delta_j)}$$

Soit $f \in \bigcap_k B(g_{j_k},\delta_{j_k})$. Posons

$$\boxed{U = \bigcap_K \bigcup_{k \geq K} U_{j_k}}$$

$\mu(U) = 1$, U est un $\mathcal{G}_\delta$ dense et $\limsup_n \frac{|S_{n,T}f(x)|}{\psi(n)} = \infty$ si $x \in U$

Retour aux rotations irrationnelles :

Dimension de l'ensemble des points exceptionnels

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\mathcal{E}_\psi(f) = \left\{ x \in \mathbb{T};\ \limsup_n \frac{|S_{n,\alpha} f(x)|}{\psi(n)} = +\infty \right\}}$$

$$\boxed{\mathcal{F}_\psi(f) = \left\{ x \in \mathbb{T};\ \limsup_n \frac{|S_{n,\alpha} f(x)|}{\psi(n)} < +\infty \right\}}$$

Théorème (Bayart, Buczolich, H.)

Supposons $\psi(n) = o(n)$.
Pour quasi toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_\psi(f)) = 0 \ .$$

Fonctions avec de grandes sommes de Birkhoff

Un résultat plus précis

Lemme

Soient $M \in \mathbb{N}$, $C > 0$, $s \in]0, 1[$, $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$, un entier $m \geq M$ et $E \subset \mathbb{T}$ tels que

$$\forall x \in E, \quad |S_{m,T} f(x)| \geq C\psi(m)$$

et

$$\mathcal{H}^s_\delta(E^c) < \varepsilon$$

où $E^c = \mathbb{T} \setminus E$.

Tours de Rokhlin :

Une partition de $\mathbb{T}$

- $R_\alpha(x) = x + \alpha$
- $\frac{p_n}{q_n}$ la n-ème approximation de α dans son développement en fraction continue
- $$\Delta^{(n)} = \begin{cases} [0, \{q_n\alpha\}[& \text{si } n \text{ est pair} \\ [\{q_n\alpha\}, 1[& \text{si } n \text{ is impair.} \end{cases}$$
- $$\mathbb{T} = \left(\bigcup_{0 \leq j < q_{n+1}} R_\alpha^j \left(\Delta^{(n)} \right) \right) \bigcup \left(\bigcup_{0 \leq j < q_n} R_\alpha^j \left(\Delta^{(n+1)} \right) \right)$$
- $\frac{1}{2q_{n+1}} \leq \left| \Delta^{(n)} \right| \leq \frac{1}{q_{n+1}}$

Et si f est plus régulière ?

Cas des fonctions ξ-hölderiennes

Théorème (Bayart, Buczolich, H.)

Soit $0 < \xi < 1$. Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$ et ξ-hölderienne telle que pour tout $\nu < 1 - \xi$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_\nu(f)) \leq \sqrt{\frac{\xi}{1-\nu}} \,.$$

- Optimalité ?
- En contraste avec les résultats de Fan-Schmeling sur les sous-shifts de type fini.
- Existence d'un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $\mathcal{C}_0^\xi(\mathbb{T})$? En fait, l'ensemble des cobords n'est pas dense dans $\mathcal{C}_0^\xi(\mathbb{T})$ (B., B., H.)

Résultats presque sûrs : rappel du théorème

Théorème (Bayart, Buczolich, H.)

1. Pour tout $\nu > 1/2$ et toute fonction $f \in L_0^2(G)$,

$$\mu \otimes \mu \left(\left\{ (u,x) \in G^2;\ \limsup_n \frac{|S_{n,u}f(x)|}{n^\nu} \geq 1 \right\} \right) = 0.$$

2. Pour quasi toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(G)$ on a :

$$\mu \otimes \mu \left(\left\{ (u,x) \in G^2;\ \limsup_n \frac{|S_{n,u}f(x)|}{n^{1/2}} = +\infty \right\} \right) = 1.$$

- $(G,+)$: groupe abélien métrique compact connexe possédant un sous groupe cyclique dense.
- μ : mesure de Haar.

Preuve de la partie 1.

- $f \in L_0^2(G)$ et $\nu > 1/2$. Supposons $\|f\|_2 = 1$.
- $X_k(u,x) = f(x+ku)$: suite de variables aléatoires orthonormales
- Inégalité maximale classique :

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\le n\le N}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right)^2\right) \le \log_2^2(4N)\sum_{j=1}^{N} c_j^2$$

- $$\int_{G^2}\max_{1\le n\le N}|S_{n,u}f(x)|^2 d\mu(u)\otimes d\mu(x) \le CN\log^2 N$$

Preuve de la partie 1.

$$\boxed{\int_{G^2} \max_{1\leq n\leq N} |S_{n,u}f(x)|^2 d\mu(u)\otimes d\mu(x) \leq CN\log^2 N}$$

- $$E_k = \left\{(u,x)\in G^2;\ \exists n\in\{2^k,\dots,2^{k+1}-1\},\ |S_{n,u}f(x)|\geq n^{\nu}\right\}$$

- $$\mu\otimes\mu(E_k) \leq \mu\otimes\mu\left(\max_{1\leq n\leq 2^{k+1}} |S_{n,u}f(x)| \geq 2^{\nu k}\right) \leq \frac{Ck^2 2^k}{2^{2\nu k}}$$

- Par Borel Cantelli

$$\mu\otimes\mu\left(\limsup_k (E_k)\right) = 0$$

Preuve de la partie 2 ($\nu = 1/2$)

Construction à nouveau une fonction avec de grandes sommes de Birkhoff

Lemme

Soit $\varepsilon > 0$, $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ (assez grand). Il existe $f \in \mathcal{C}_0(G)$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$, $N \geq M$ et $F \subset G^2$ tels que

$$\forall (u,x) \in F, \quad \sup_{M \leq n \leq N} \frac{|S_{n,u} f(x)|}{n^{1/2}} \geq C$$

et

$$\mu \otimes \mu(F) > 1 - \varepsilon \ .$$

Construction de f

- $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert de 0 tel que $\mu(E_{\mathcal{O}}) > 1 - \varepsilon$ où

$$E_{\mathcal{O}} = \{u \in G \ ; \ ku \notin 2\mathcal{O}, \ \text{si } 0 < |k| \leq N\}$$

- $G = (x_1 + \mathcal{O}) \cup \cdots \cup (x_K + \mathcal{O})$
- $G = A_1 \cup \cdots \cup A_K$, partition de G telle que pour tout $u \in E_{\mathcal{O}}$, si $x + ju$ et $x + j'u$ tombent dans le même A_k alors $j = j'$
- $A_k = B_k \cup B'_k$ avec $\mu(B_k) {=} \mu(B'_k) = \mu(A_k)/2$
- $\varphi_k = \mathbb{1}_{B_k} - \mathbb{1}_{B'_k}$
- $$\boxed{g(x,\omega) = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon X_k(\omega)\varphi_k(x)}$$

  où (X_k) est une suite de Rademacher.

Construction de f

$$g(x,\omega) = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon X_k(\omega)\varphi_k(x)$$

$$\boxed{S_{n,u}g(x,\omega) = \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{K} X_k(\omega)\varphi_k(x+ju)}$$

- Si $u \in E_{\mathcal{O}}$ et $x \in G$

$$S_{n,u}g(x,\omega) = \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} X_{k(j,u,x)}(\omega)\varphi_{k(j,u,x)}(x+ju)$$

- Loi du log-itéré : il existe $N \geq M$ universel tel que

$$\sup_{M \leq n \leq N} \frac{|S_{n,u}g(x,\cdot)|}{\sqrt{n \log\log n}} > \frac{\varepsilon}{2}$$

avec probabilité $> 1 - \varepsilon$

Construction de f

- Si $u \in E_{\mathcal{O}}$ et $x \in G$

$$\sup_{M \leq n \leq N} \frac{|S_{n,u} g(x, \cdot)|}{\sqrt{n}} > \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\log \log M} > C$$

avec probabilité $> 1 - \varepsilon$.

- Par Fubini

$$\mu \otimes \mu \otimes P \left(\left\{ (u, x, \omega) \; ; \; \sup_{M \leq n \leq N} \frac{|S_{n,u} g(x, \omega)|}{n^{1/2}} > C \right\} \right) > (1 - \varepsilon)^2 > 1 - 2\varepsilon$$

- Par Fubini, il existe ω tel que

$$\mu \otimes \mu \left(\left\{ (u, x) \; ; \; \sup_{M \leq n \leq N} \frac{|S_{n,u} g(x, \omega)|}{n^{1/2}} > C \right\} \right) > 1 - 2\varepsilon$$

Au patrimoine mondial de l'Unesco