Chou Romanesco
et
Autosimilarité

Yanick Heurteaux

Laboratoire de Mathématiques

Université Blaise Pascal

Université Blaise Pascal

cnrs

dépasser les frontières

Plan de l'exposé

- Qu'est ce que l'autosimilarité
  - ensembles autosimilaires
  - autosimilarité statistique
  - autosimilarité approchée
- Un outil d'analyse : la notion de dimension
- Au-delà des ensembles : les mesures
- Quelques mots sur l'analyse multifractale

Les nombres entiers

0, 1, 2, 3, ……, n, n+1, …….

Les nombres entiers

0, 1, 2, 3, ……, n, n+1, …….

n+1 est le successeur de n

Les nombres entiers

0, 1, 2, 3, ……, n, n+1, …….

n+1 est le successeur de n

Les nombres entiers s'ajoutent

Les nombres entiers

0, 1, 2, 3, ……, n, n+1, …….

n+1 est le successeur de n

⟹ Les nombres entiers s'ajoutent

⟹ Les nombres entiers se multiplient

Les nombres réels

Un nombre réel est un nombre
qui s'écrit avec une infinité de décimales

Les nombres réels

Un nombre réel est un nombre
qui s'écrit avec une infinité de décimales

$e,d_1d_2d_3d_4\ldots\ldots d_n\ldots\ldots$

Les nombres réels

Un nombre réel est un nombre
qui s'écrit avec une infinité de décimales

$e,d_1d_2d_3d_4.....d_n.....$

Par exemple, le nombre π

Les nombres réels

Un nombre réel est un nombre
qui s'écrit avec une infinité de décimales

$e,d_1d_2d_3d_4.....d_n.....$

Par exemple, le nombre π

$\pi=3,14159265358979323846264338327 95.....$

Vers l'infiniment grand
ou l'infiniment petit

… 1/16 1/8 1/4 1/2 1 2 4 8 16 …

Vers l'infiniment grand ou l'infiniment petit

… 1/16 1/8 1/4 1/2 1 2 4 8 16 …

… 2^{-n} … 2^{-3} 2^{-2} 2^{-1} 2^{0} 2^{1} 2^{2} 2^{3} … 2^{n} 2^{n+1} …

Vers l'infiniment grand ou l'infiniment petit

… 1/16 1/8 1/4 1/2 1 2 4 8 16 …

… 2^{-n} … 2^{-3} 2^{-2} 2^{-1} 2^{0} 2^{1} 2^{2} 2^{3} … 2^{n} 2^{n+1} …

… a^{-n} … a^{-3} a^{-2} a^{-1} a^{0} a^{1} a^{2} a^{3} … a^{n} a^{n+1} …

Vers l'infiniment grand ou l'infiniment petit

… 1/16 1/8 1/4 1/2 1 2 4 8 16 …

… 2^{-n} … 2^{-3} 2^{-2} 2^{-1} 2^{0} 2^{1} 2^{2} 2^{3} … 2^{n} 2^{n+1} …

… a^{-n} … a^{-3} a^{-2} a^{-1} a^{0} a^{1} a^{2} a^{3} … a^{n} a^{n+1} …

$$a^{b+c} = a^{b}\, a^{c}$$

Vers l'infiniment grand ou l'infiniment petit

… 1/16 1/8 1/4 1/2 1 2 4 8 16 …

… 2^{-n} … 2^{-3} 2^{-2} 2^{-1} 2^{0} 2^{1} 2^{2} 2^{3} … 2^{n} 2^{n+1} …

… a^{-n} … a^{-3} a^{-2} a^{-1} a^{0} a^{1} a^{2} a^{3} … a^{n} a^{n+1} …

$$a^{b+c} = a^{b}\, a^{c}$$

$d=a^{b}$ s'écrit aussi $b= \log_a (d)$

Les échelles dans l'univers

10^0 mètre = 1 mètre

Les échelles dans l'univers

10^3 mètres = 1 kilomètre

10^0 mètre = 1 mètre

Les échelles dans l'univers

10^{16} mètres = 1 année lumière

10^{3} mètres = 1 kilomètre

10^{0} mètre = 1 mètre

Les échelles dans l'univers

10^{23} mètres = on observe les fins fonds de l'univers

10^{16} mètres = 1 année lumière

10^{3} mètres = 1 kilomètre

10^{0} mètre = 1 mètre

Les échelles dans l'univers

10^{23} mètres = on observe les fins fonds de l'univers

10^{16} mètres = 1 année lumière

10^{3} mètres = 1 kilomètre

10^{0} mètre = 1 mètre

10^{-3} mètre = 1 millimètre

Les échelles dans l'univers

10^{23} mètres = on observe les fins fonds de l'univers

10^{16} mètres = 1 année lumière

10^{3} mètres = 1 kilomètre

10^{0} mètre = 1 mètre

10^{-3} mètre = 1 millimètre

10^{-6} mètre = 1 micron, la taille d'un noyau de cellule

Les échelles dans l'univers

10^{23} mètres = on observe les fins fonds de l'univers

10^{16} mètres = 1 année lumière

10^{3} mètres = 1 kilomètre

10^{0} mètre = 1 mètre

10^{-3} mètre = 1 millimètre

10^{-6} mètre = 1 micron, la taille d'un noyau de cellule

10^{-16} mètre = on observe les quarks

La boîte de vache qui rit

Qu’est ce qu’une similitude ?

Une homothétie, c’est une contraction ou une dilatation

Qu’est ce qu’une similitude ?

Une homothétie, c’est une contraction ou une dilatation

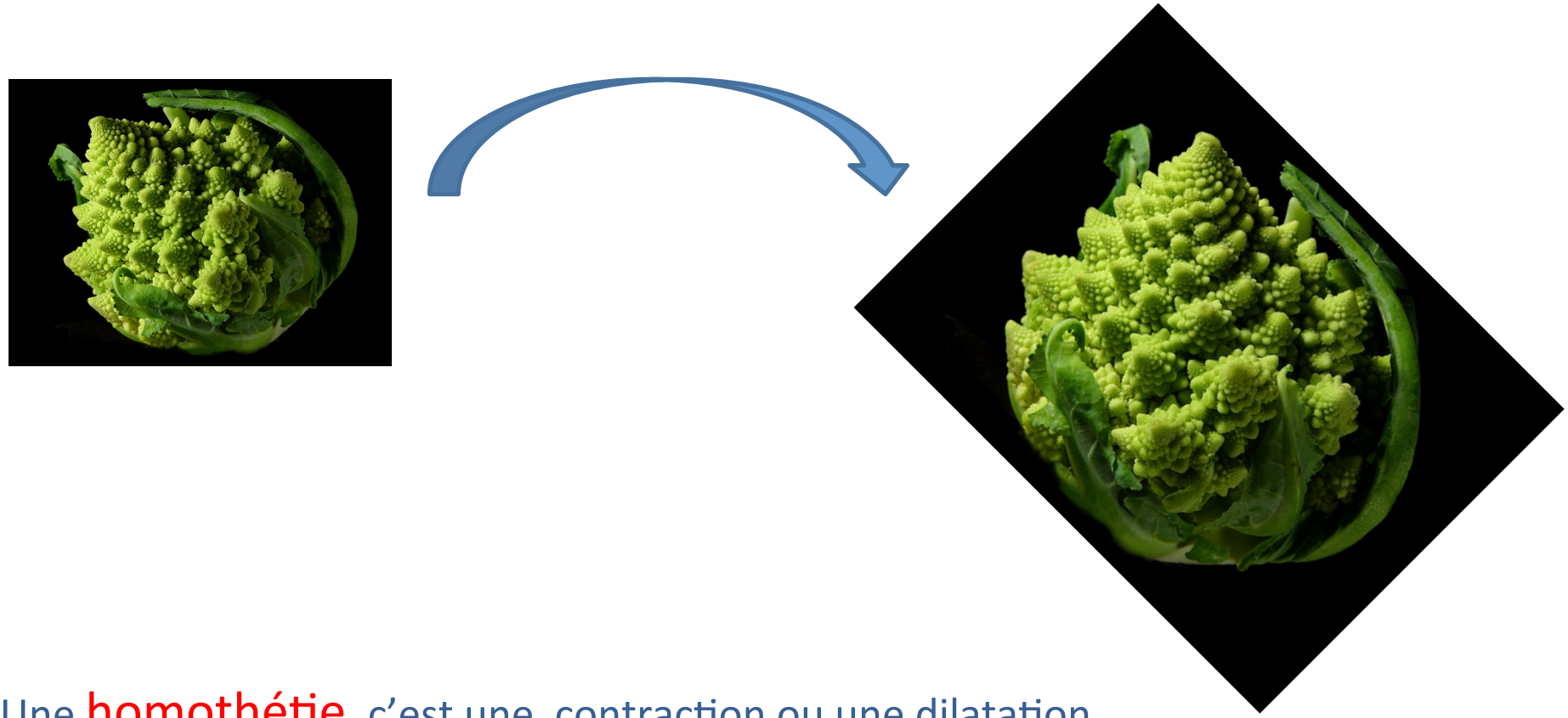
Une similitude directe, c’est la conjonction d’une homothétie et d’une rotation

Qu’est ce qu’une similitude ?

Une homothétie, c’est une contraction ou une dilatation

Une similitude directe, c’est la conjonction d’une homothétie et d’une rotation

Qu’est ce qu’une similitude ?



Une homothétie, c’est une contraction ou une dilatation

Une similitude directe, c’est la conjonction d’une homothétie et d’une rotation

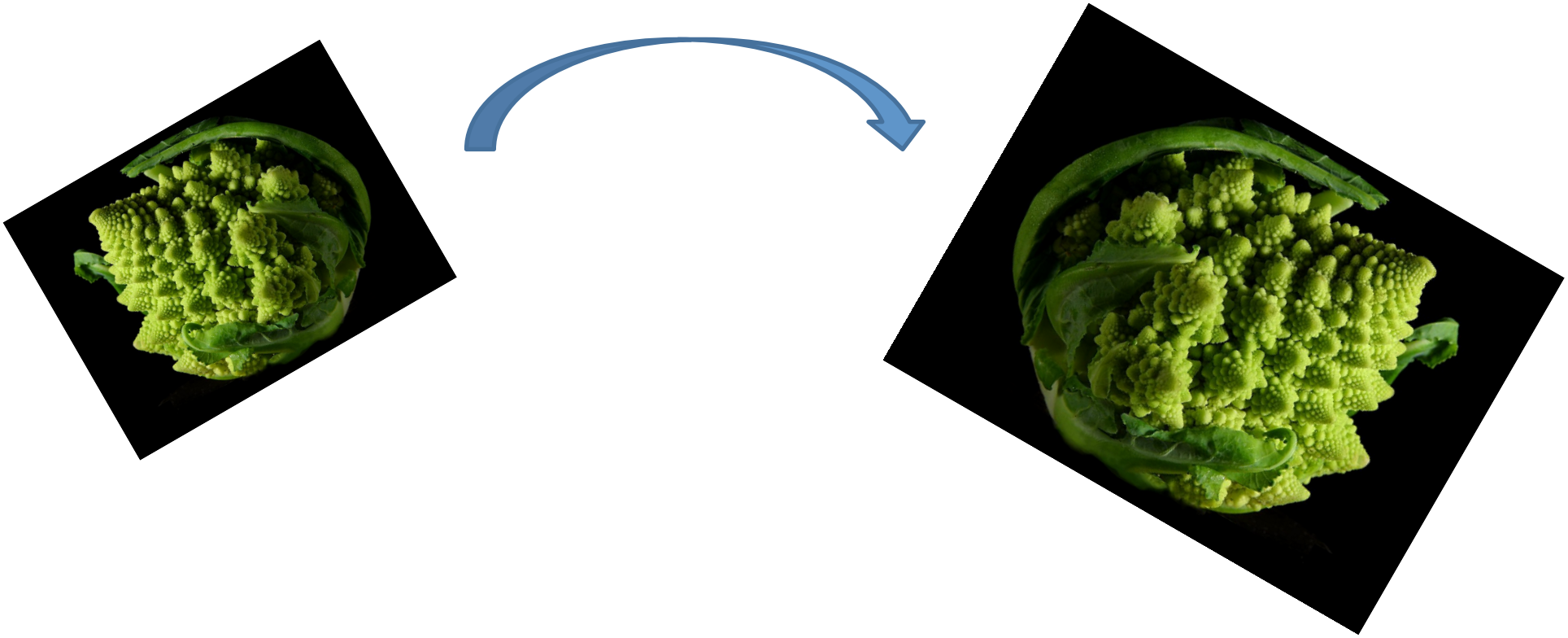
Qu’est ce qu’une similitude ?

Une similitude indirecte, c’est la conjonction d’une homothétie et d’un effet miroir

Qu’est ce qu’une similitude ?

Une similitude indirecte, c’est la conjonction d’une homothétie et d’un effet miroir

Qu’est ce qu’une similitude ?



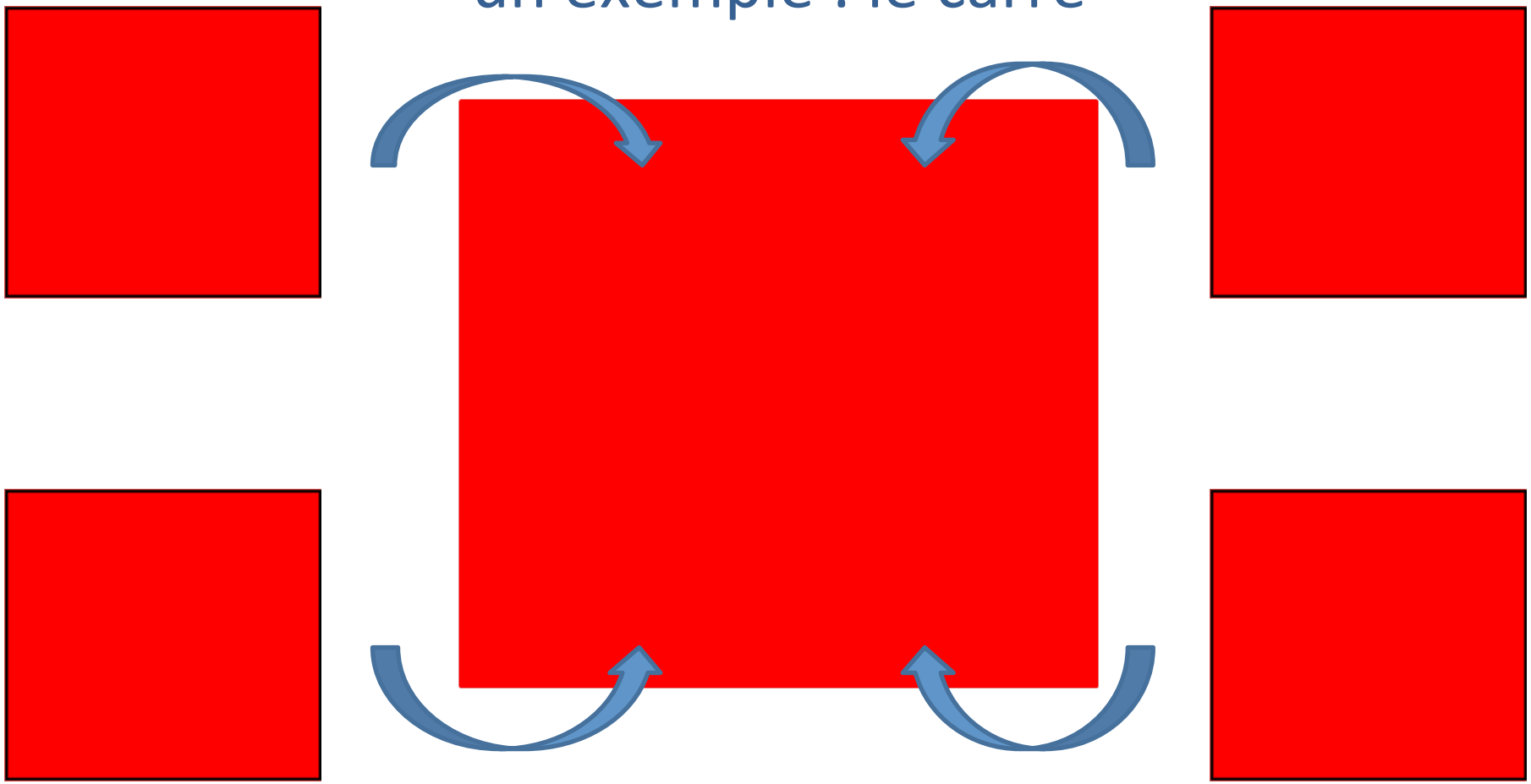
Une similitude indirecte, c’est la conjonction d’une homothétie et d’un effet miroir

Qu’est ce qu’un objet autosimilaire ?

un exemple : le carré

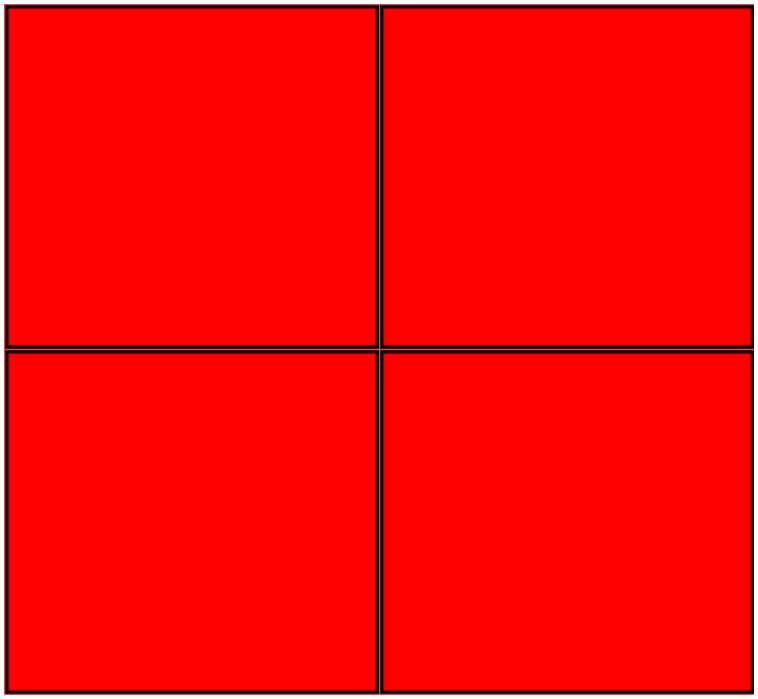
Qu’est ce qu’un objet autosimilaire ?

un exemple : le carré



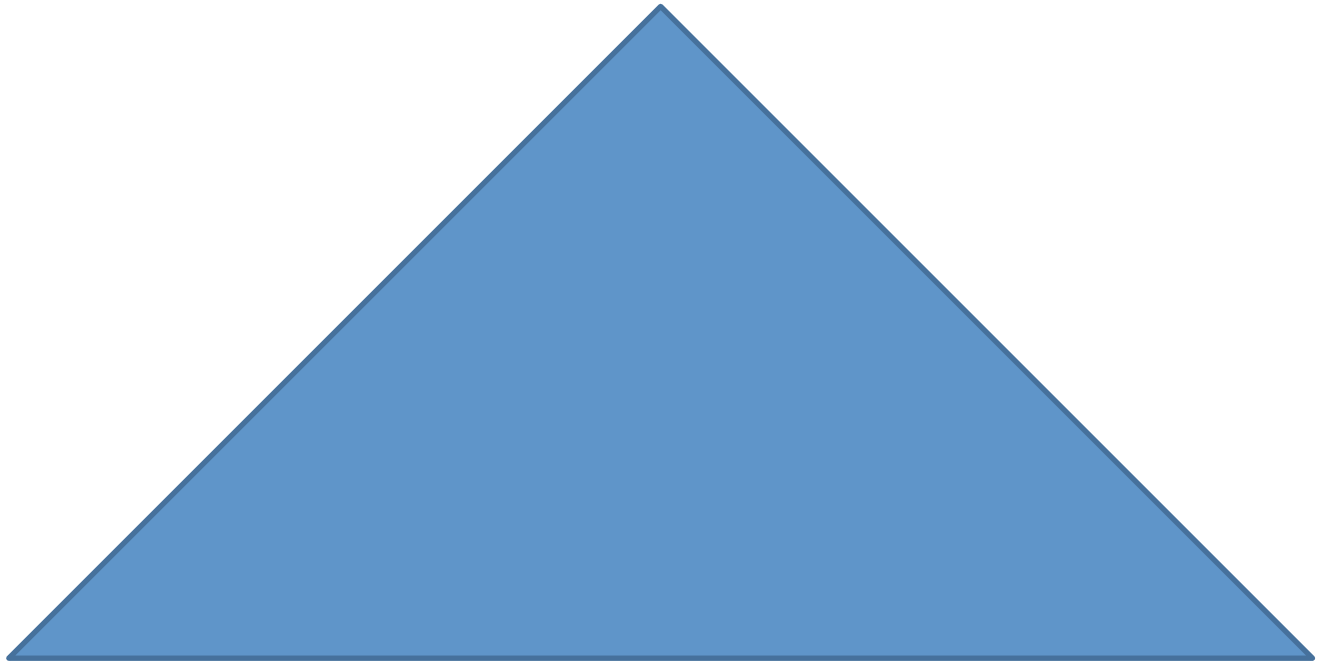
Qu’est ce qu’un objet autosimilaire ?

un exemple : le carré

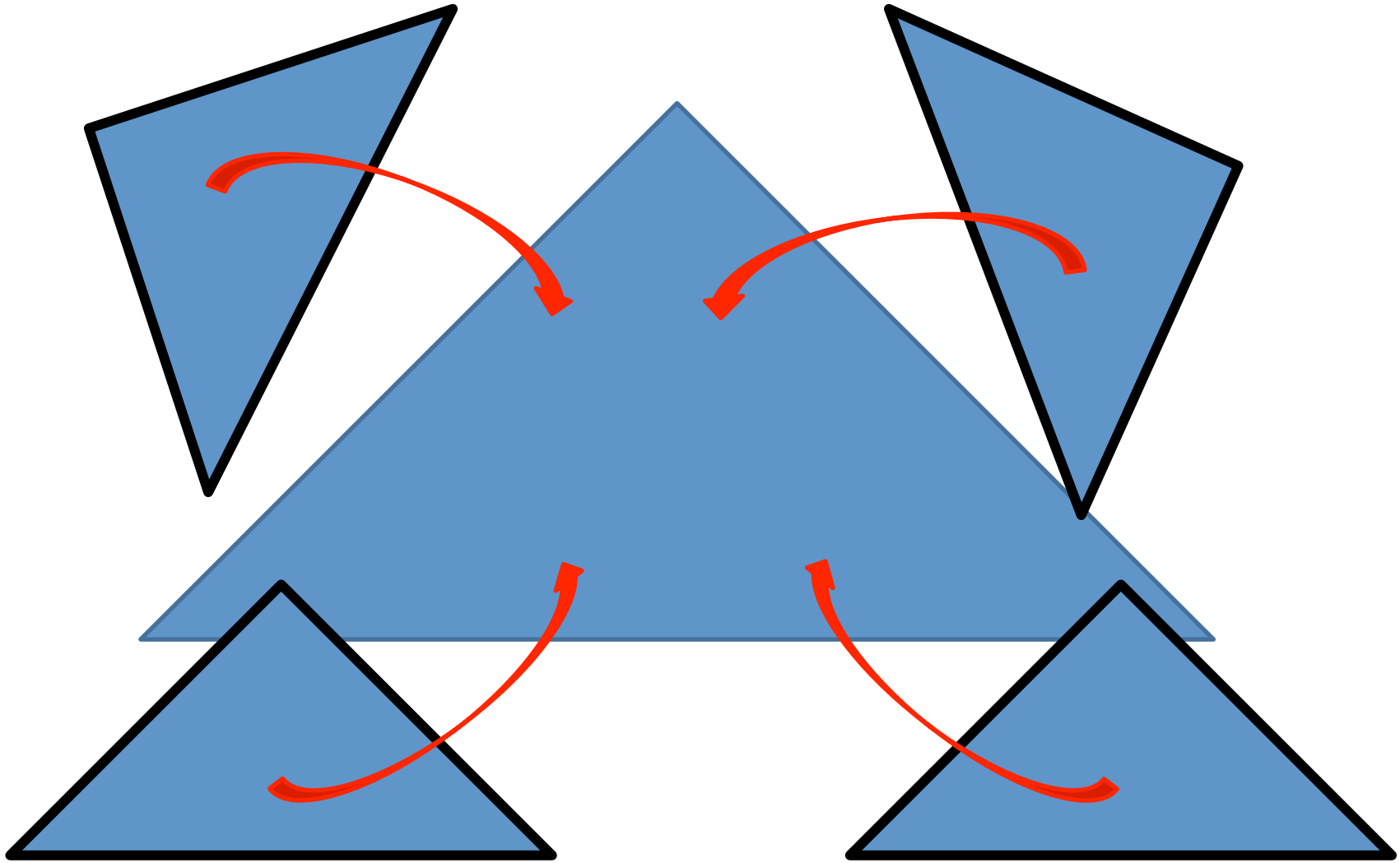


Le carré est réunion de 4 copies de lui-même
dans un rapport de contraction 1/2

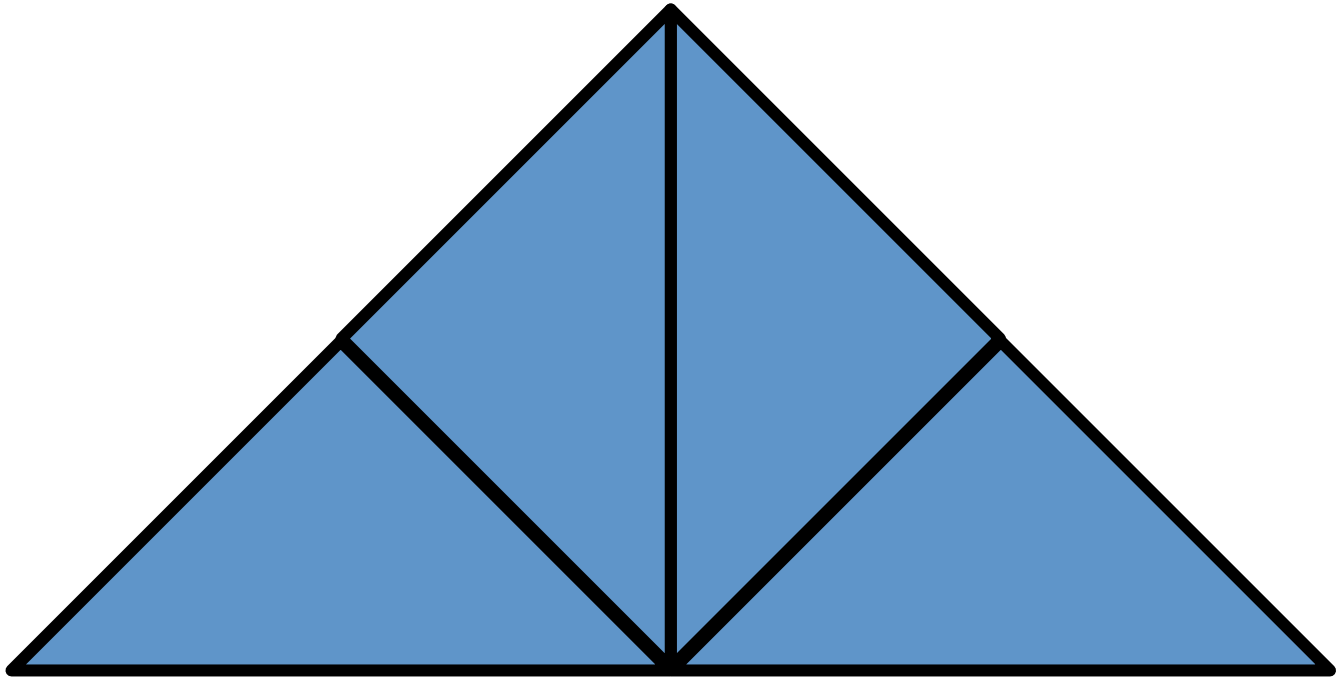
Le triangle isocèle rectangle



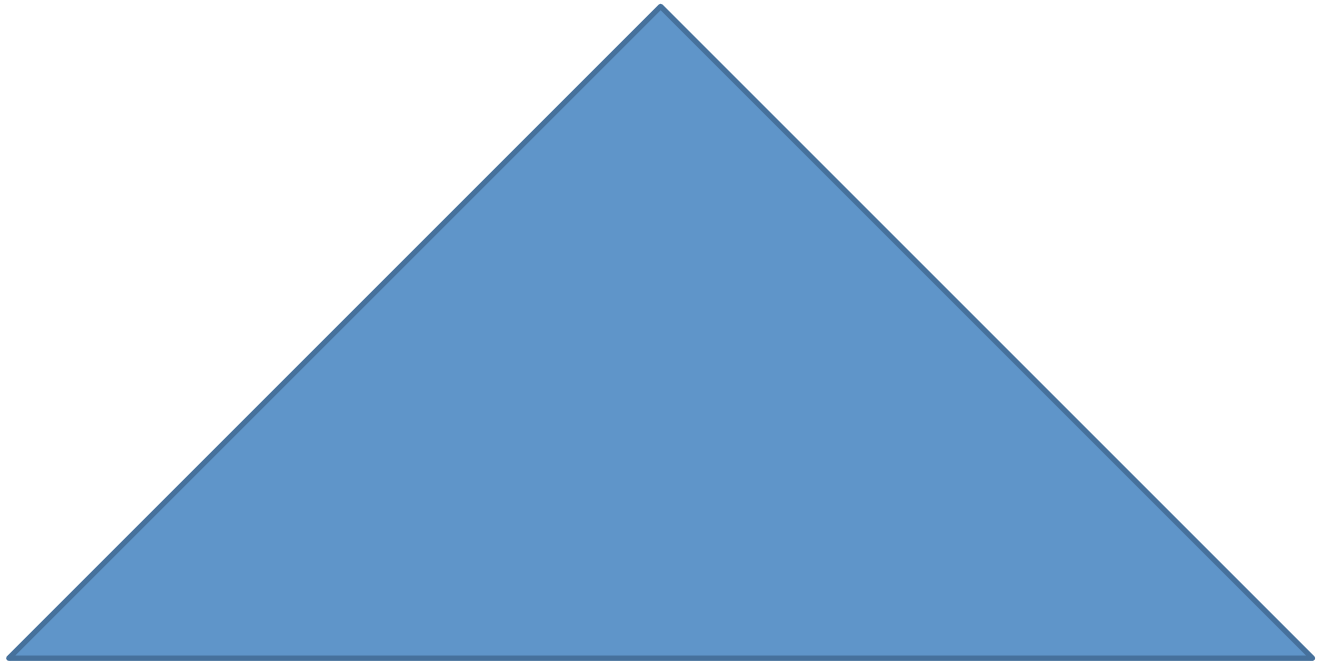
Le triangle isocèle rectangle



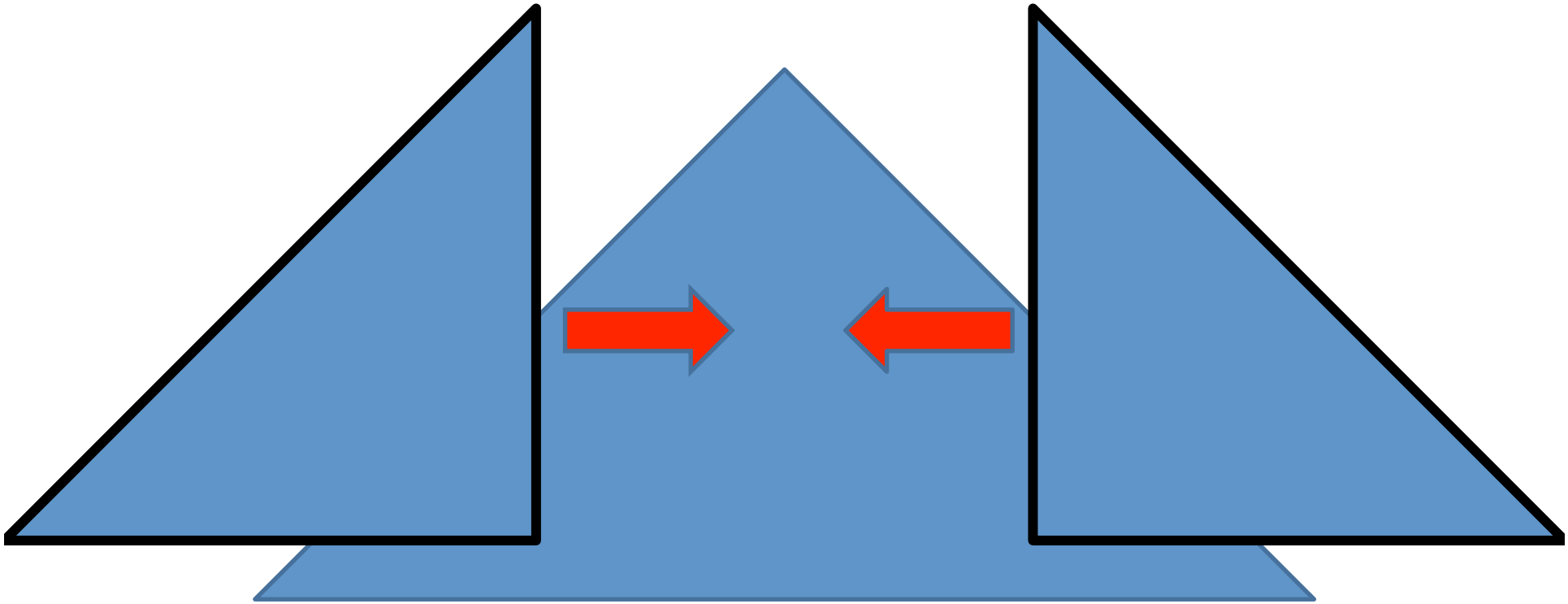
Le triangle isocèle rectangle



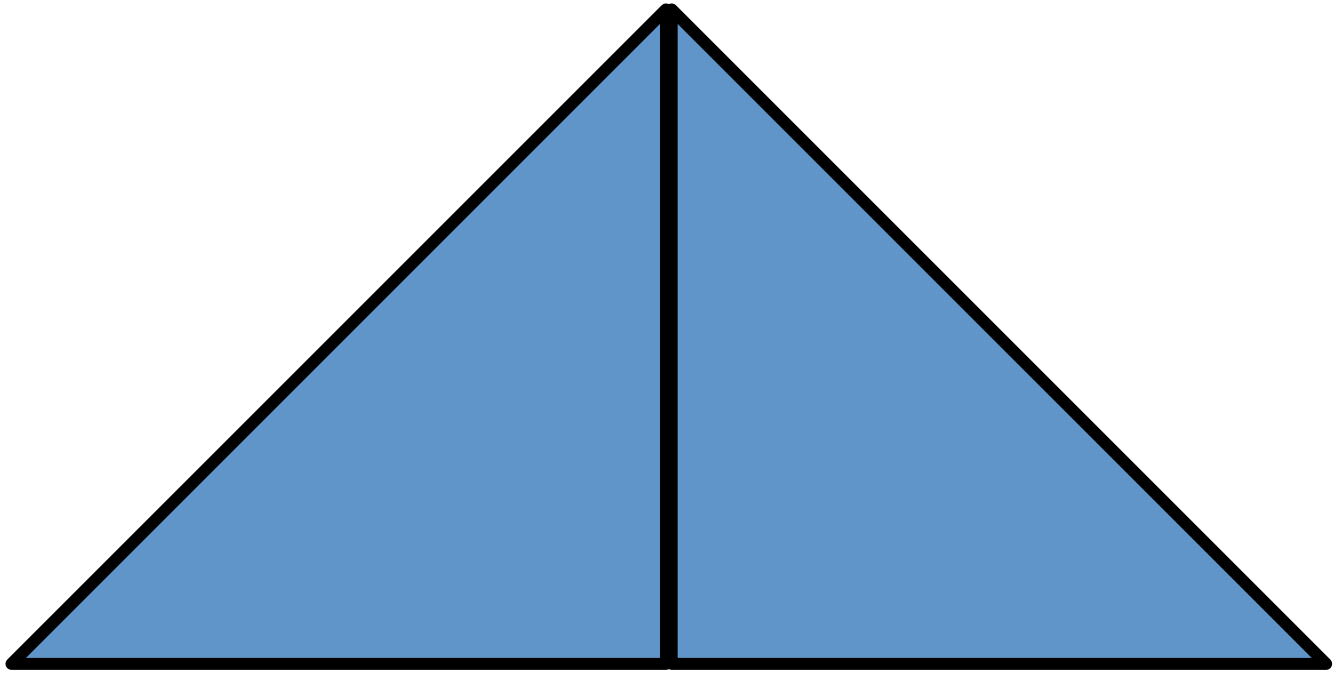
Une autre façon de voir le triangle isocèle rectangle



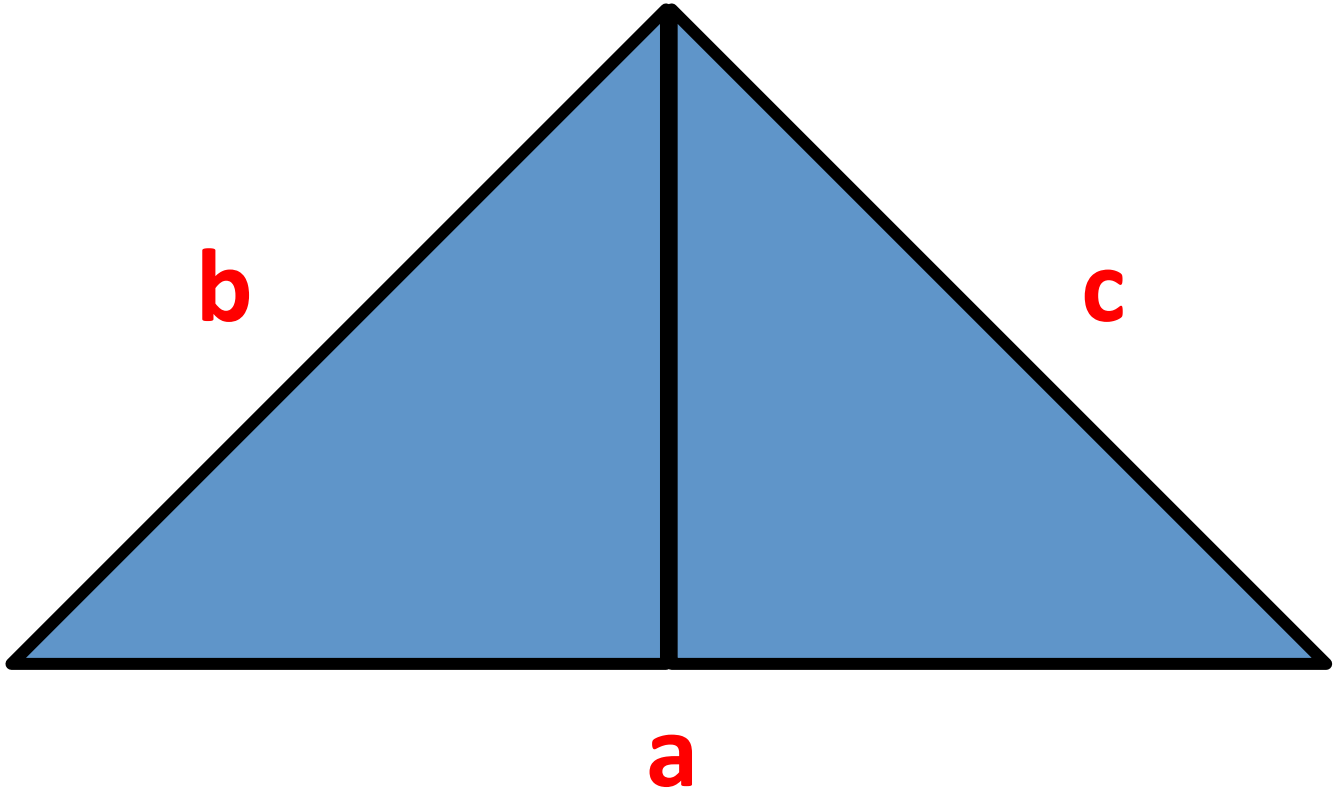
Une autre façon de voir le triangle isocèle rectangle



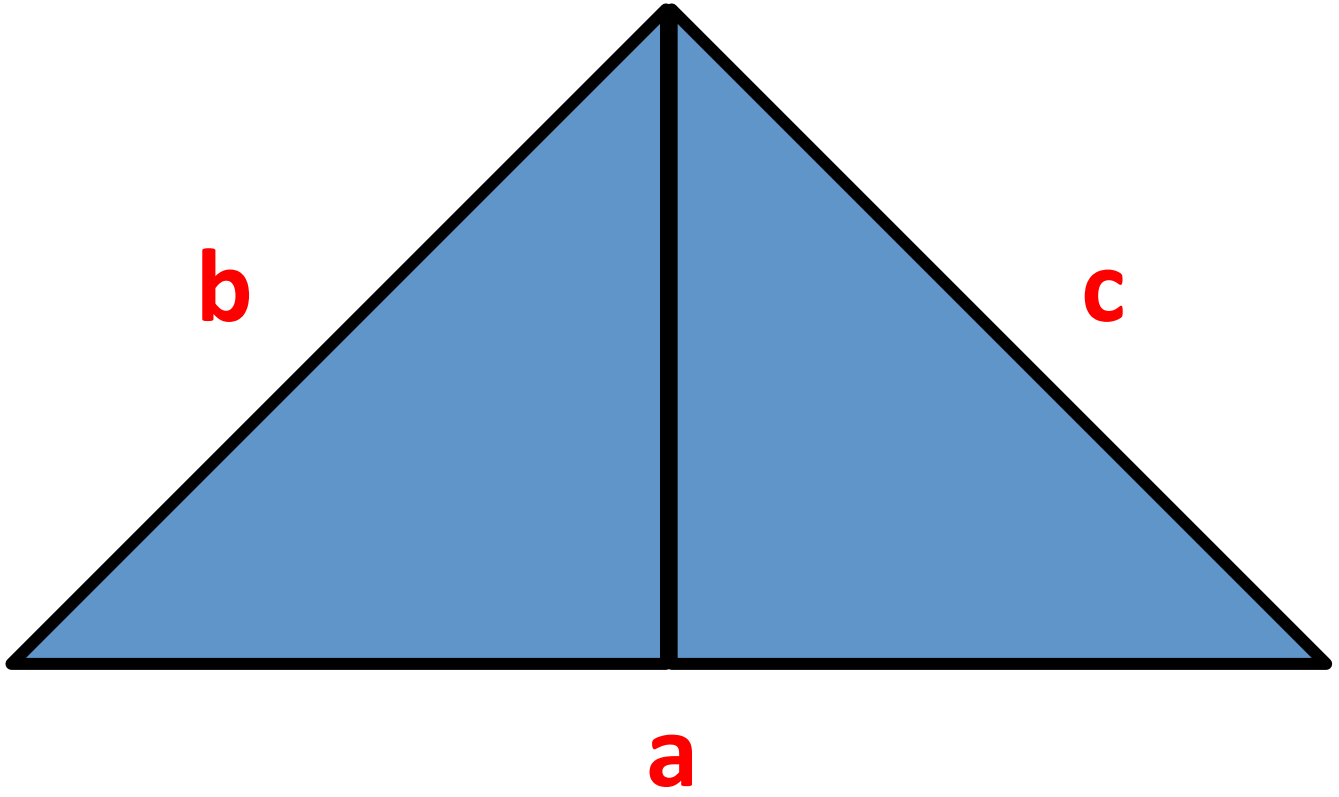
Une autre façon de voir le triangle isocèle rectangle



Une autre façon de voir le triangle isocèle rectangle

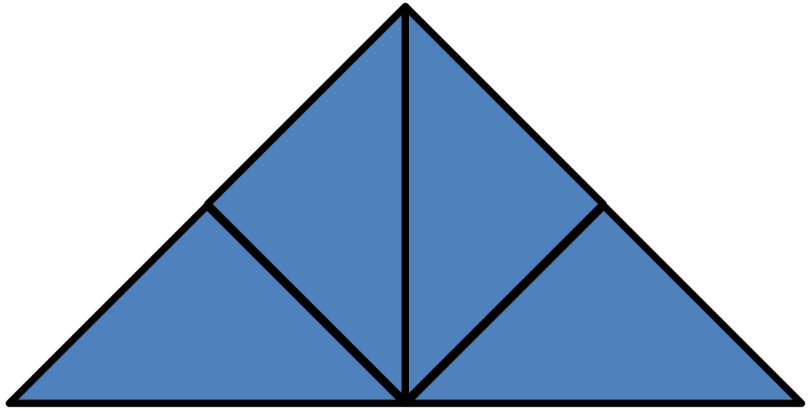


Une autre façon de voir le triangle isocèle rectangle

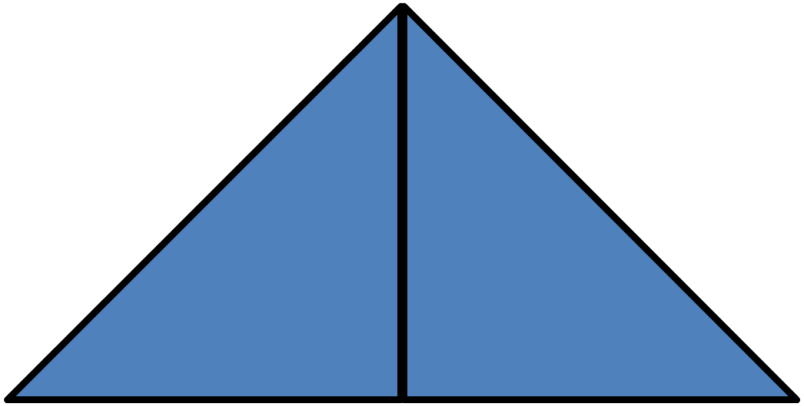


$a^2=b^2+c^2$ donc $a^2=2b^2=2c^2$, $b=c=a/\sqrt{2}$

Le triangle isocèle rectangle



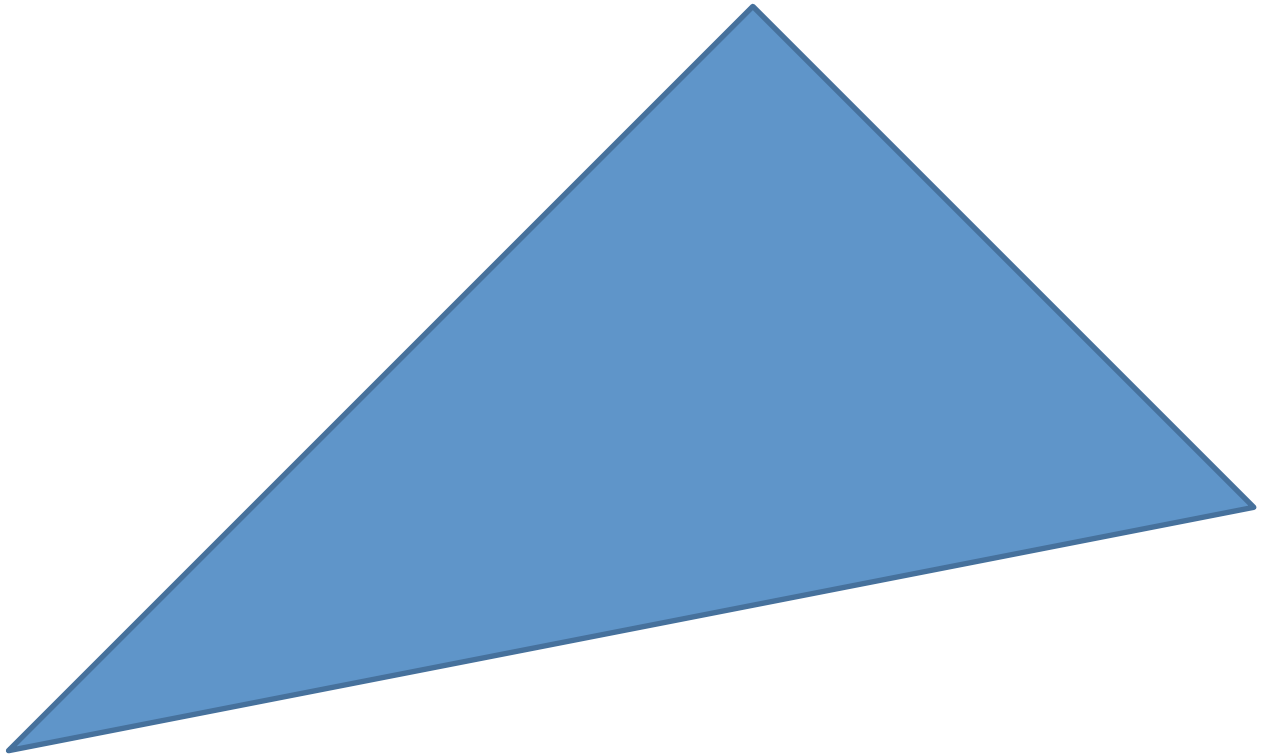
On voit N=4 copies
du triangle
dans un rapport r=1/2



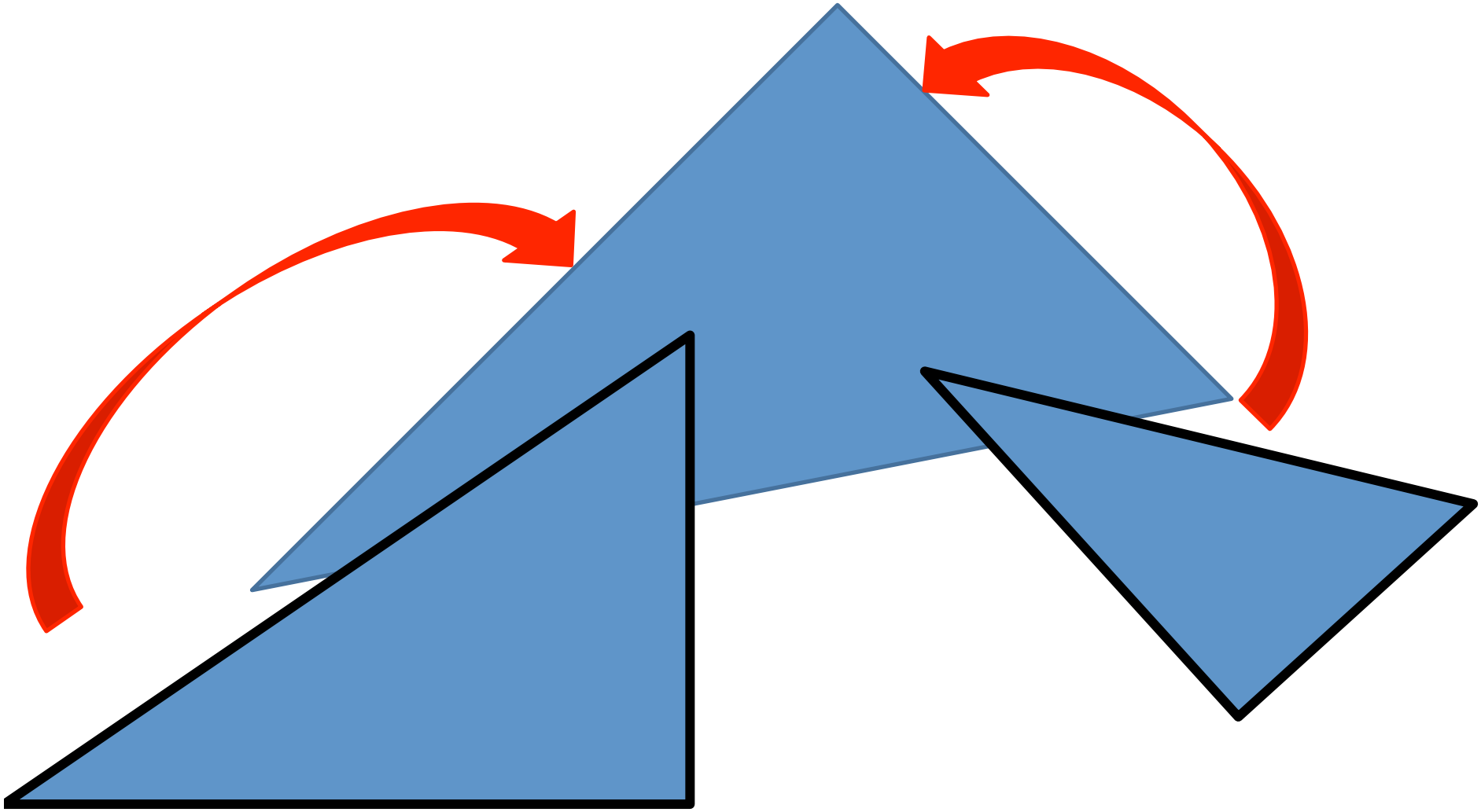
On voit N=2 copies
du triangle
dans un rapport $r=1/\sqrt{2}$

$$N_x r^2=1$$

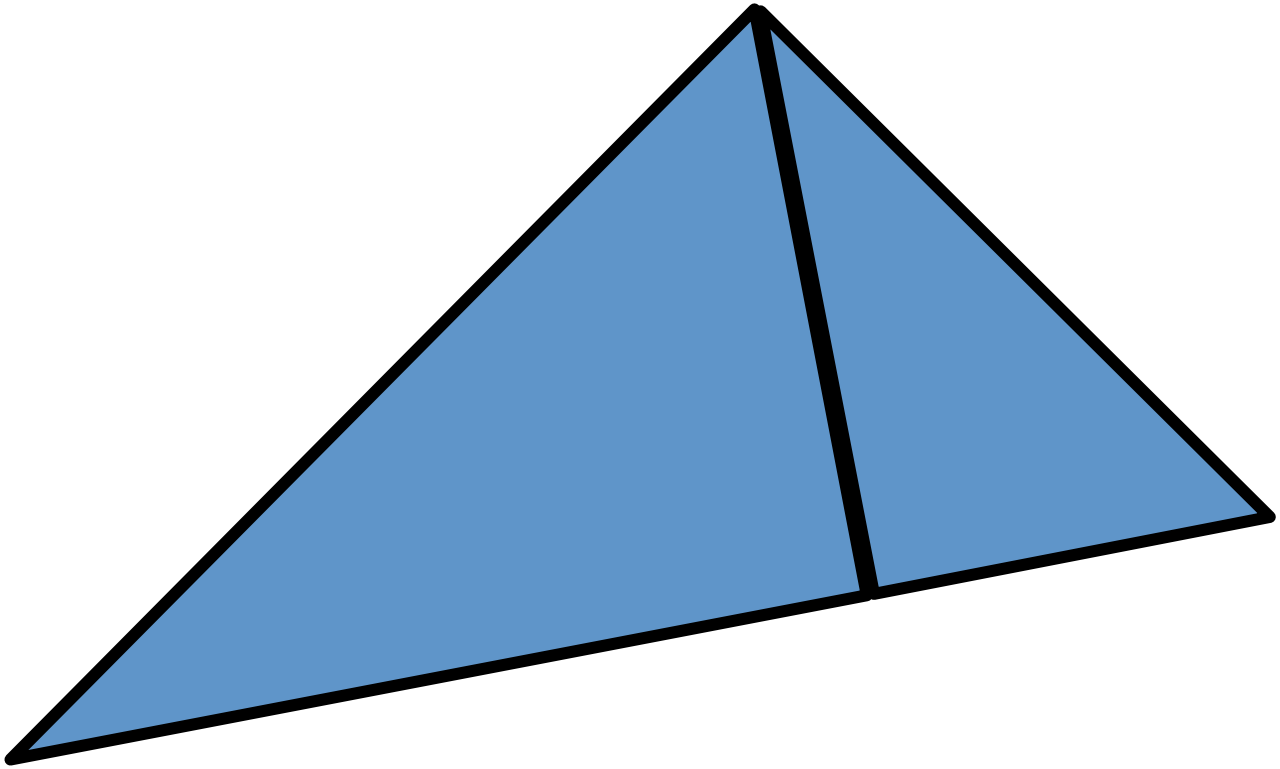
Le triangle rectangle



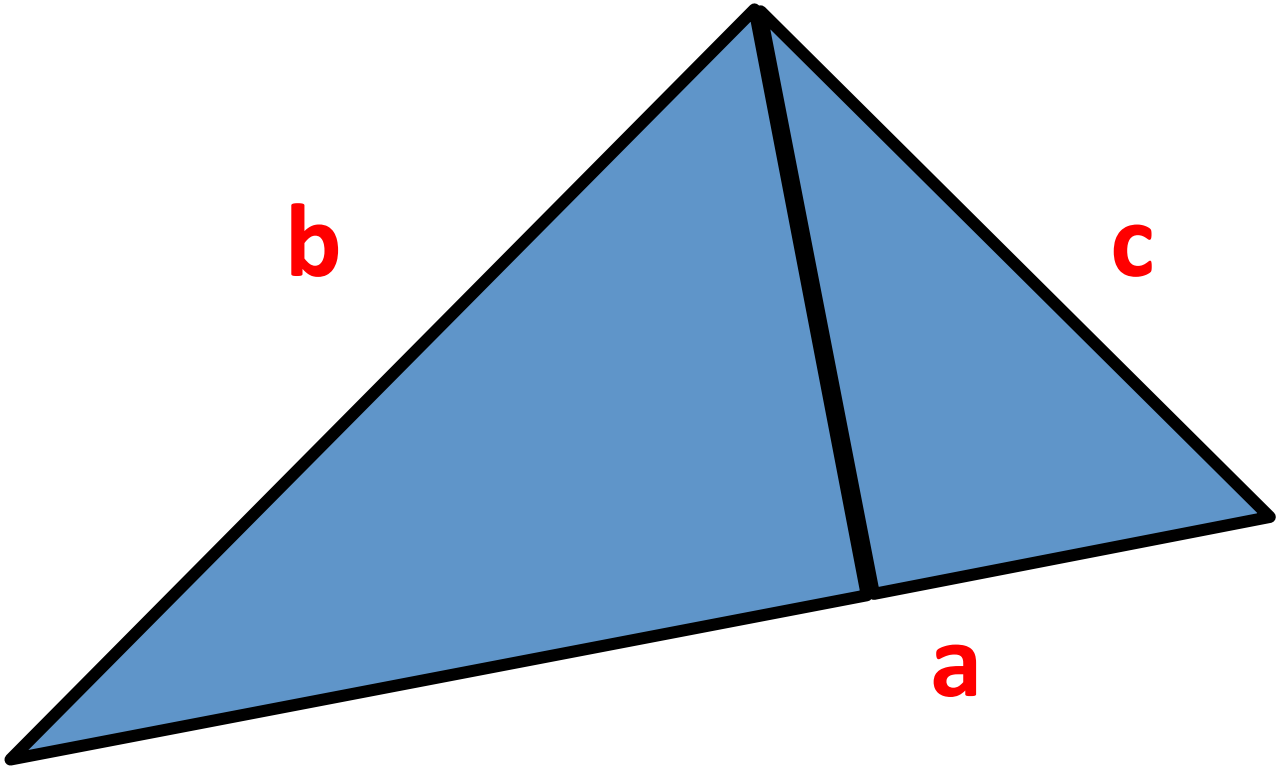
Le triangle rectangle



Le triangle rectangle

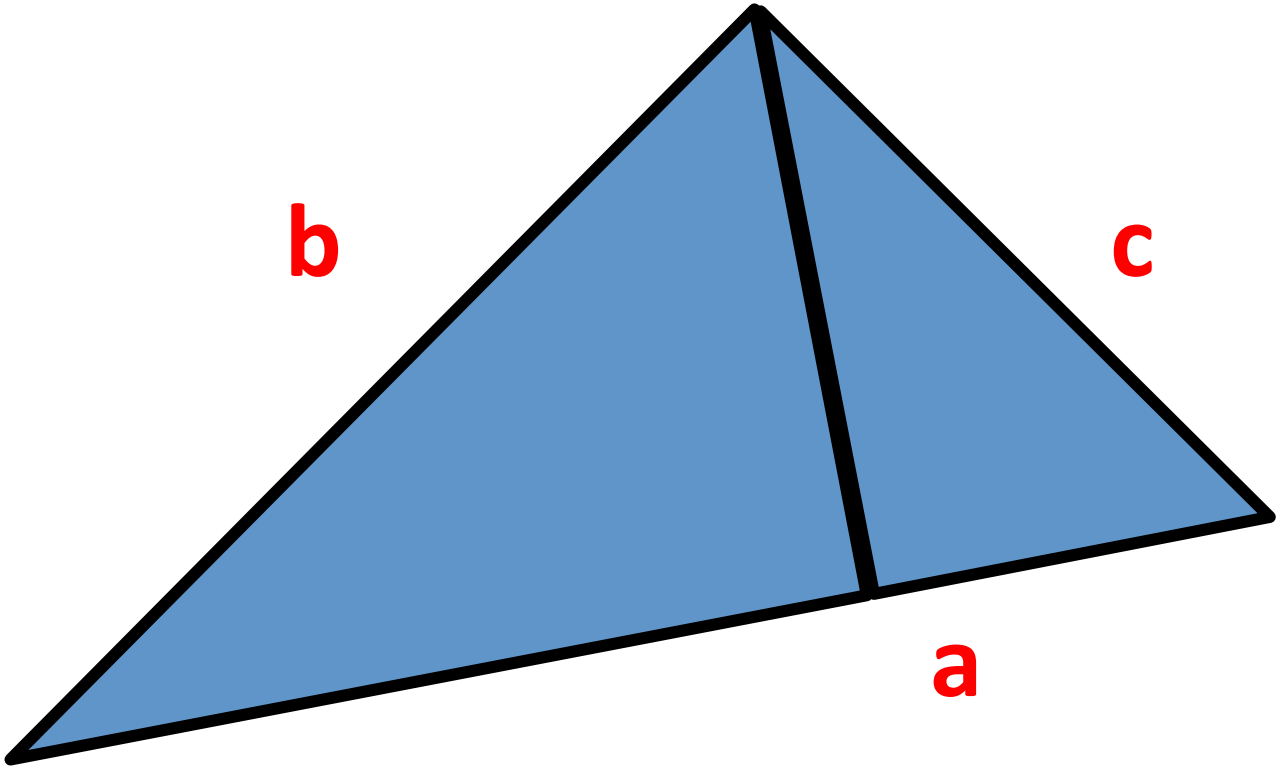


Le triangle rectangle



Le triangle rectangle est réunion de 2 copies de lui-même, l'une dans un rapport b/a et l'autre dans un rapport c/a

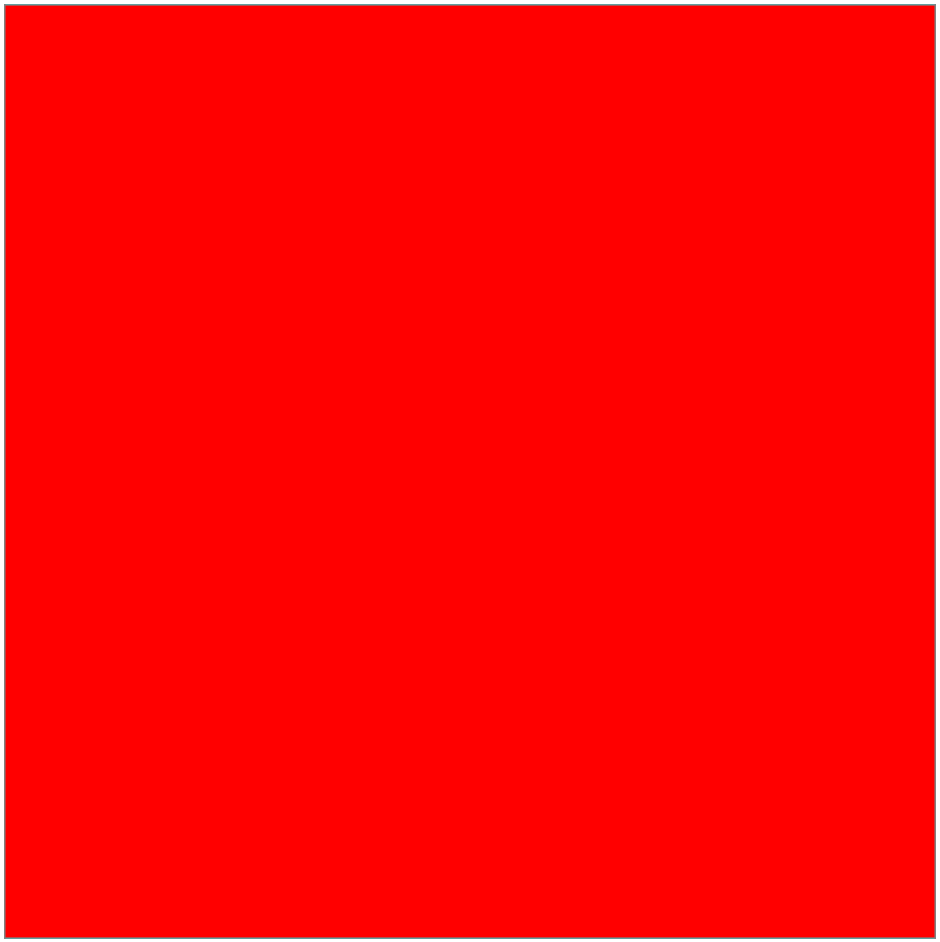
Le triangle rectangle



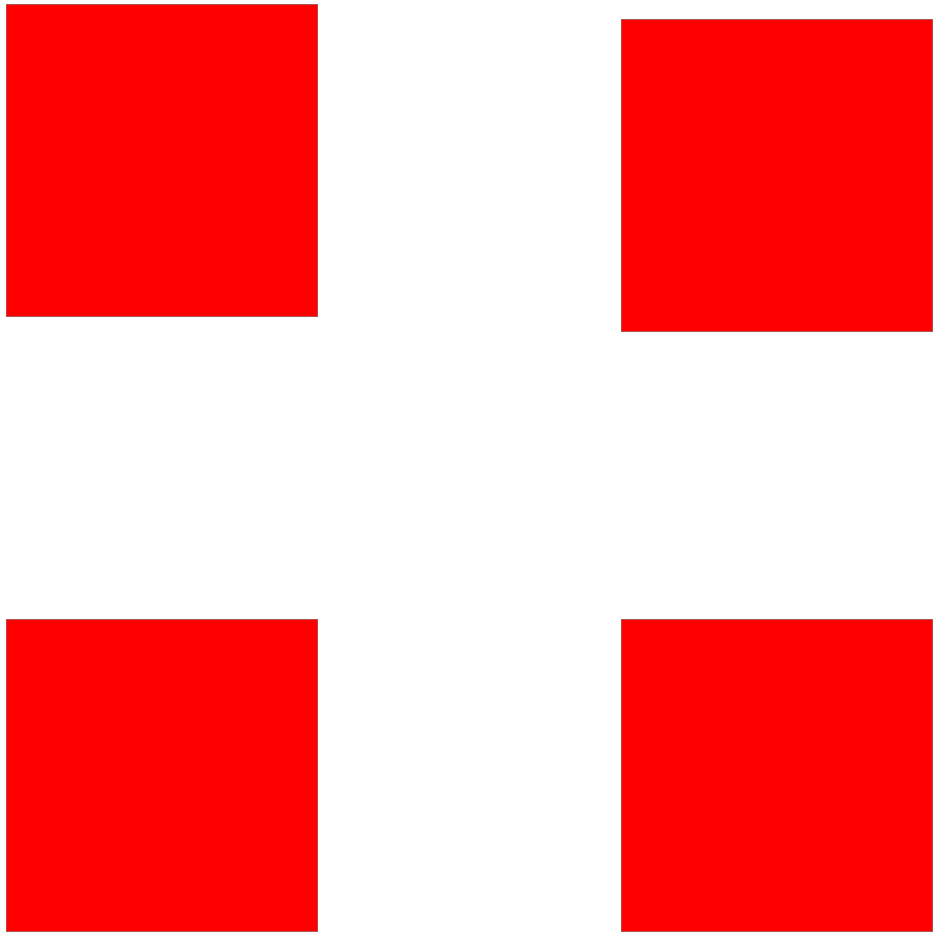
La surface S vérifie $S = \frac{b^2}{a^2} S + \frac{c^2}{a^2} S$

C'est le théorème de Pythagore !

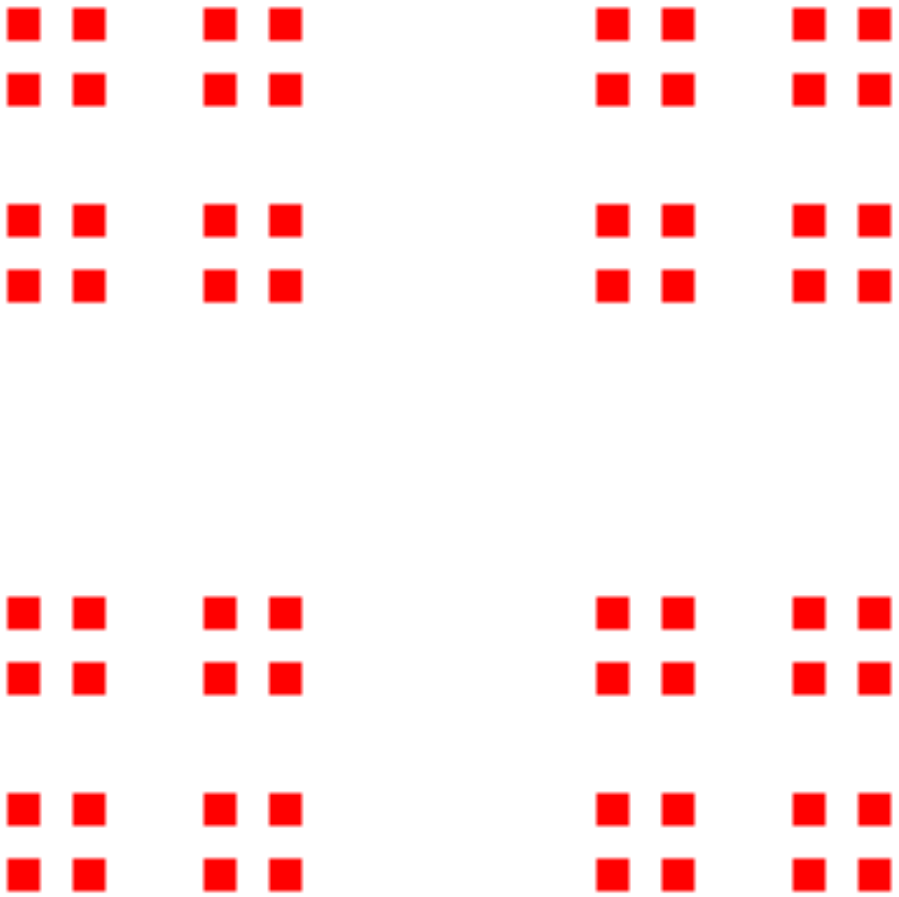
Et maintenant, si on cherchait à dupliquer le carré en 4 copies dans le rapport de contraction 1/3 ?



Et maintenant, si on cherchait à dupliquer le carré en 4 copies dans le rapport de contraction 1/3 ?



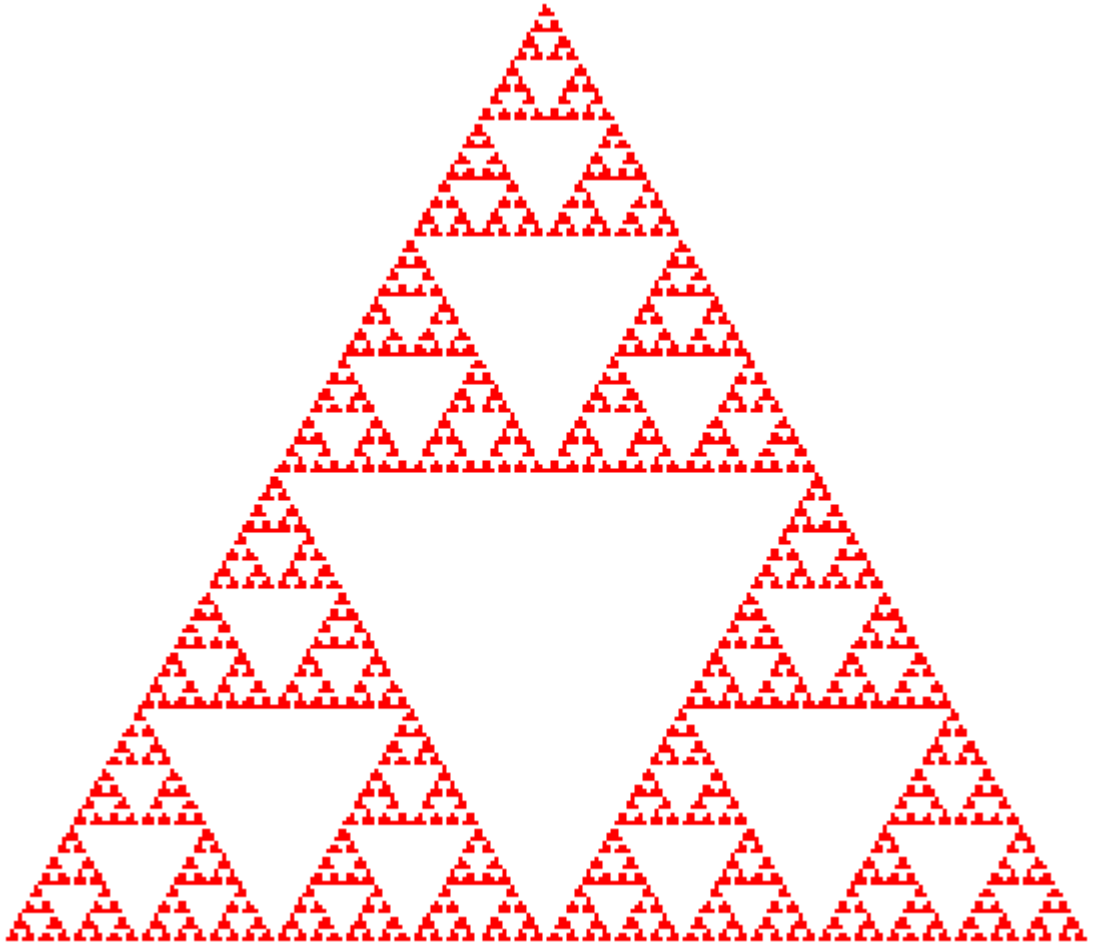
Et maintenant, si on cherchait à dupliquer le carré en 4 copies dans le rapport de contraction 1/3 ?



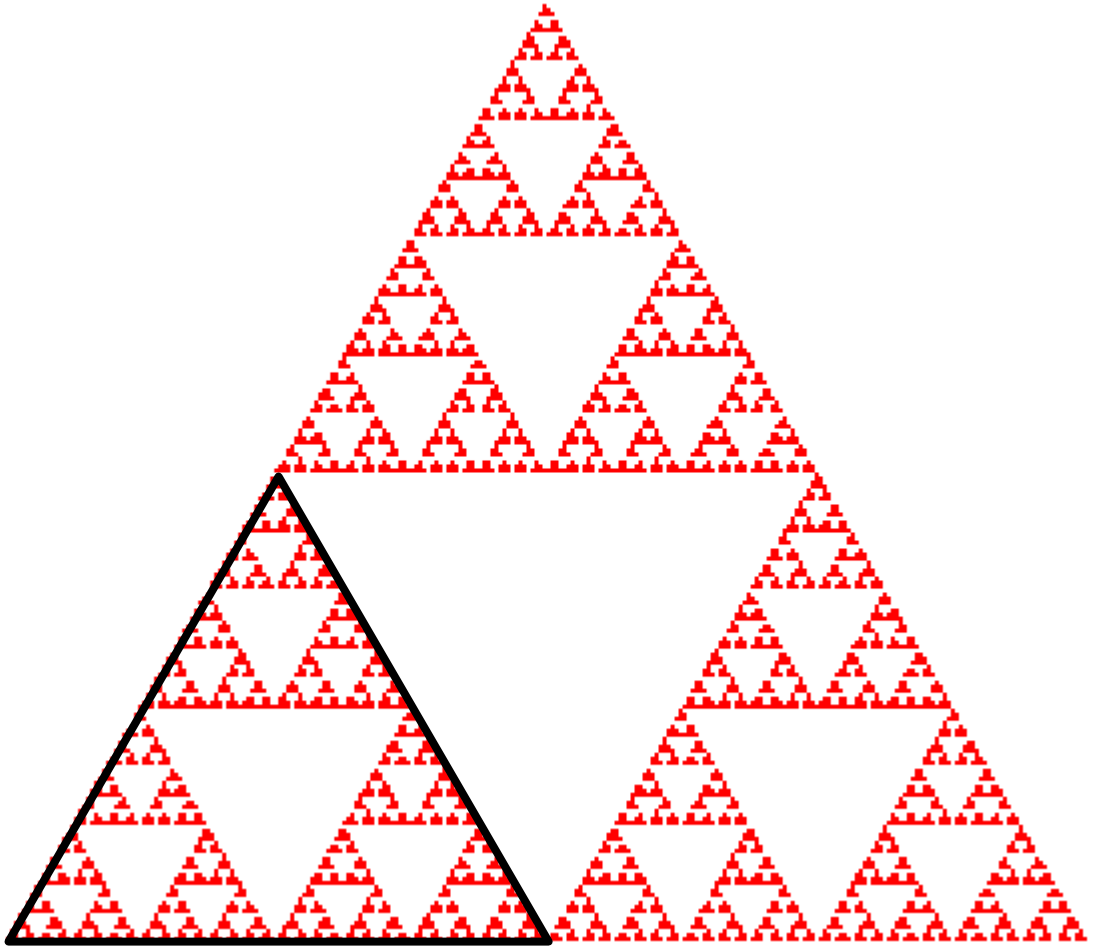
Et maintenant, si on cherchait à dupliquer le carré en 4 copies dans le rapport de contraction 1/3 ?

L'objet limite est un ensemble de Cantor

Le triangle de Sierpinski



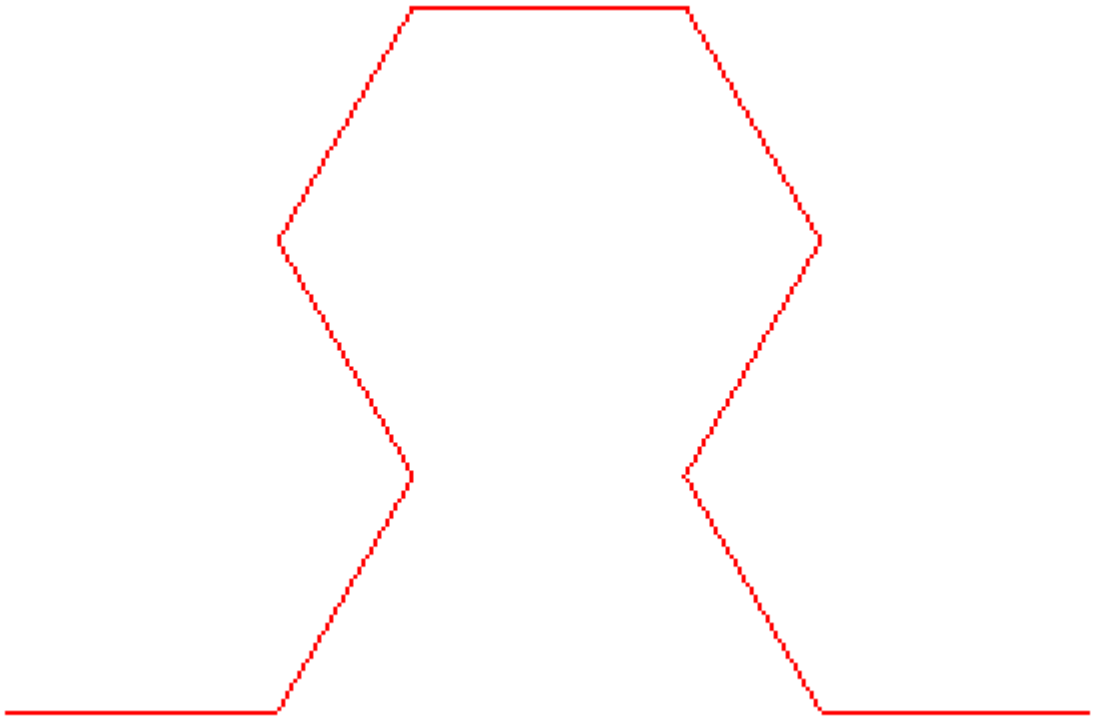
Le triangle de Sierpinski



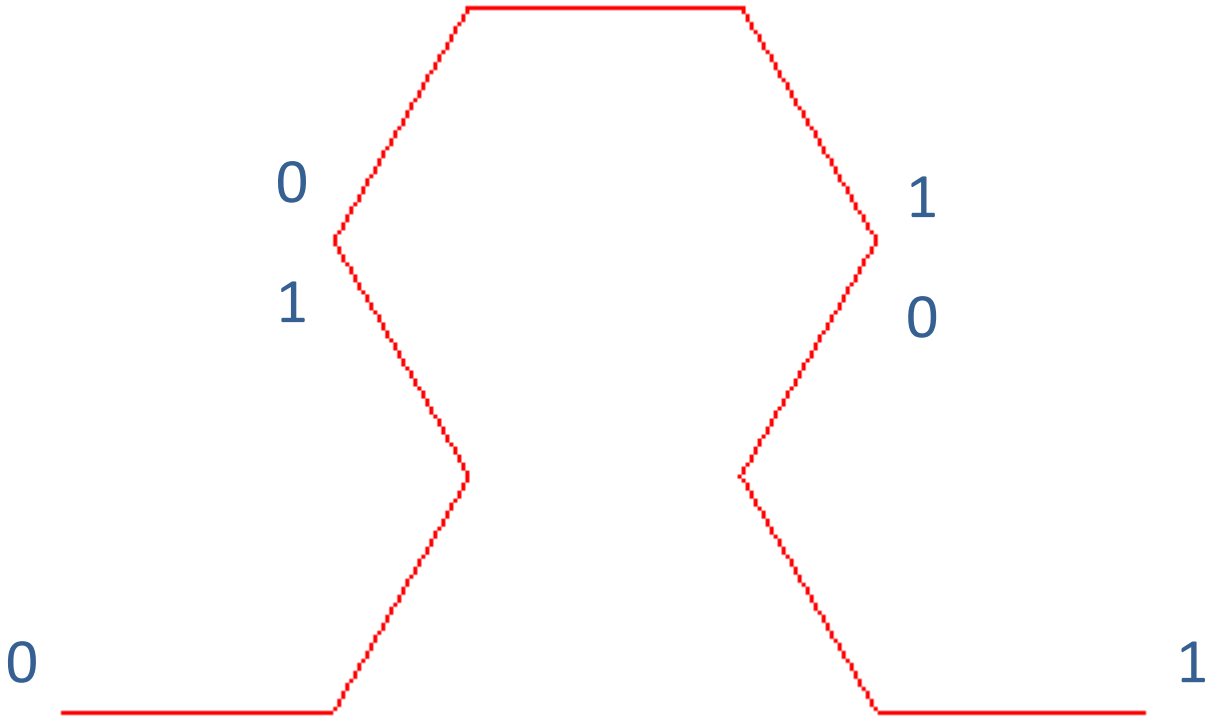
Le triangle de Sierpinski dans la nature

Le triangle de Sierpinski est une courbe !

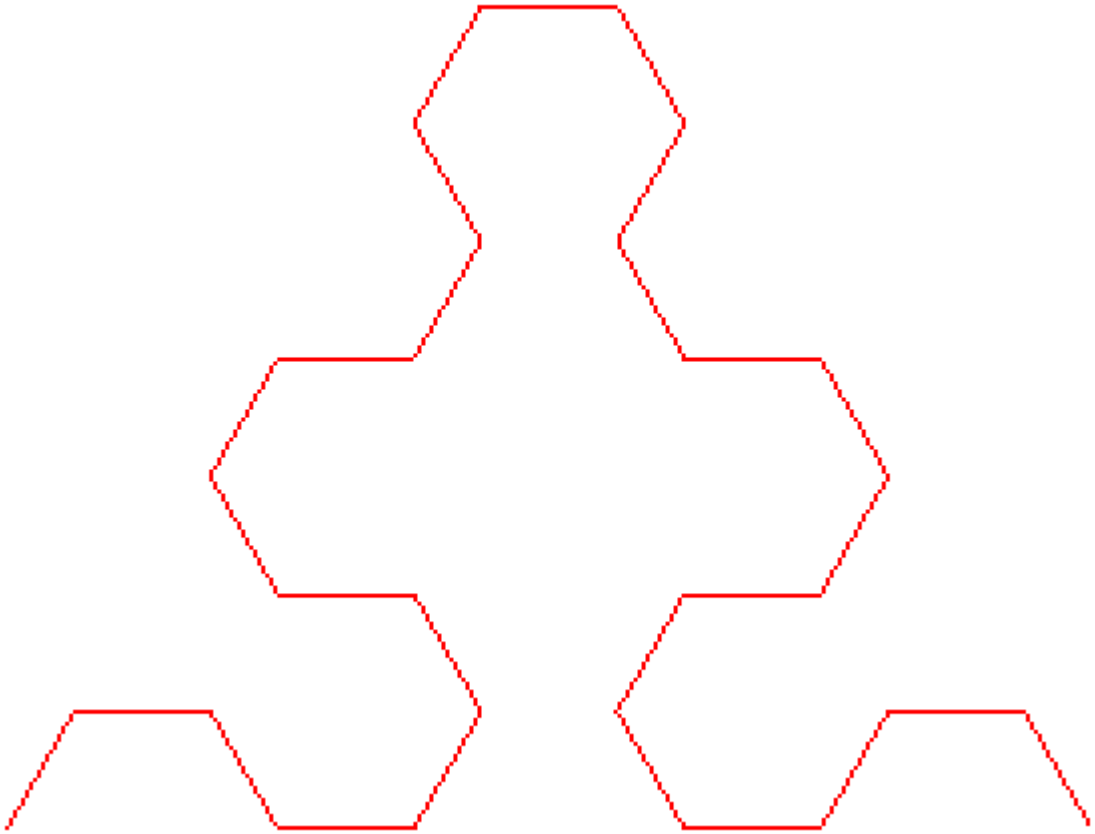
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



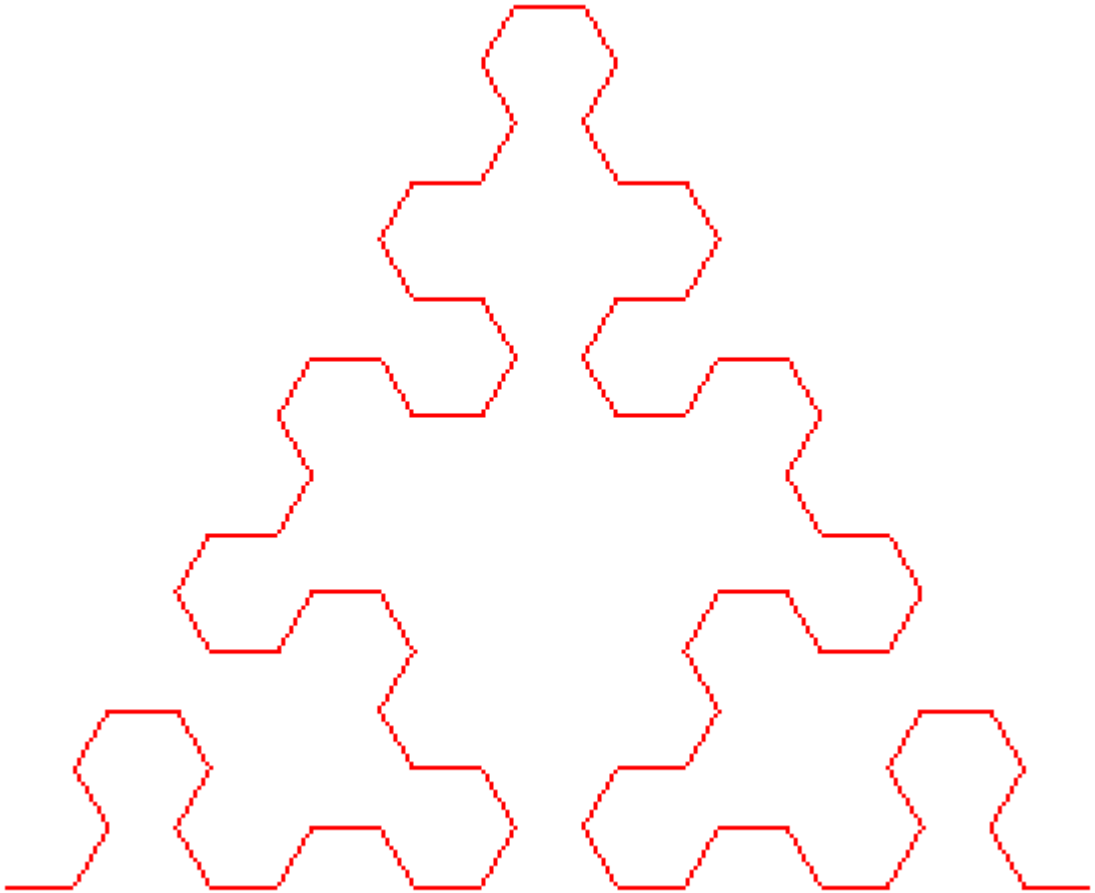
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



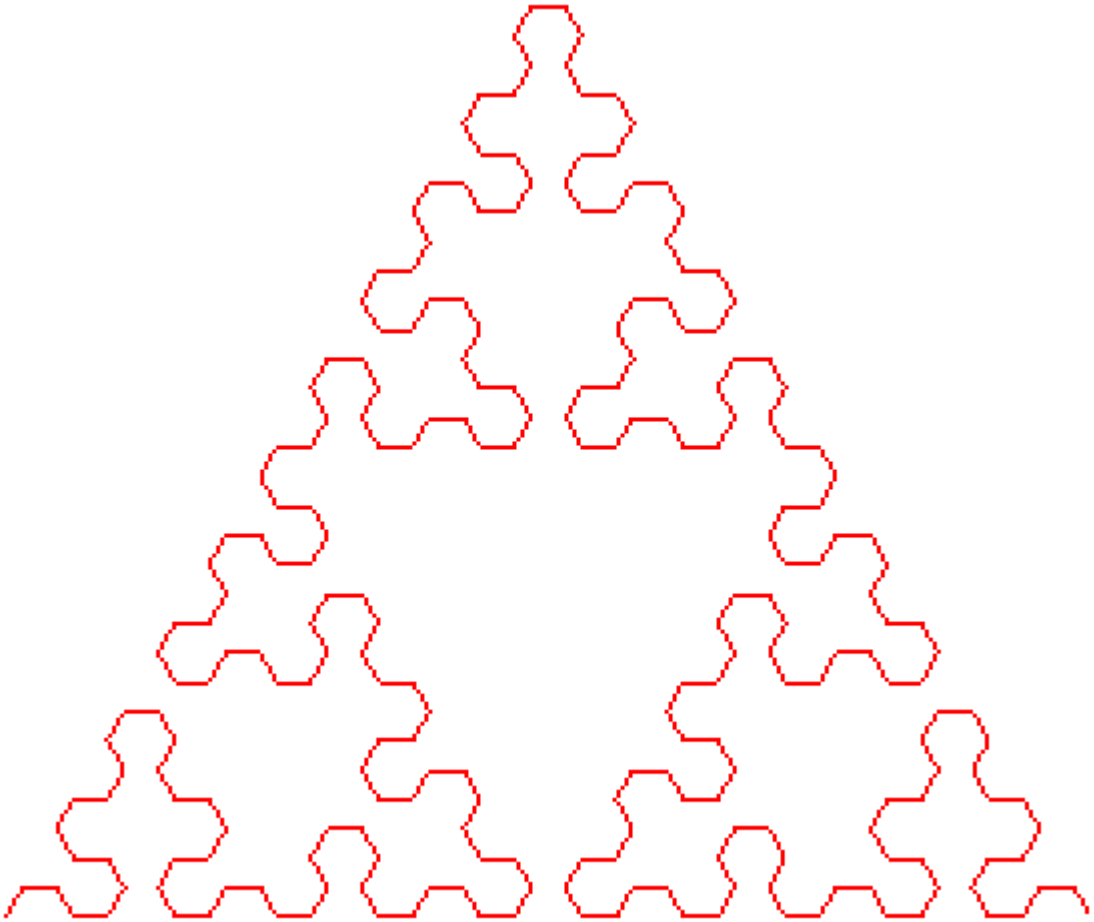
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



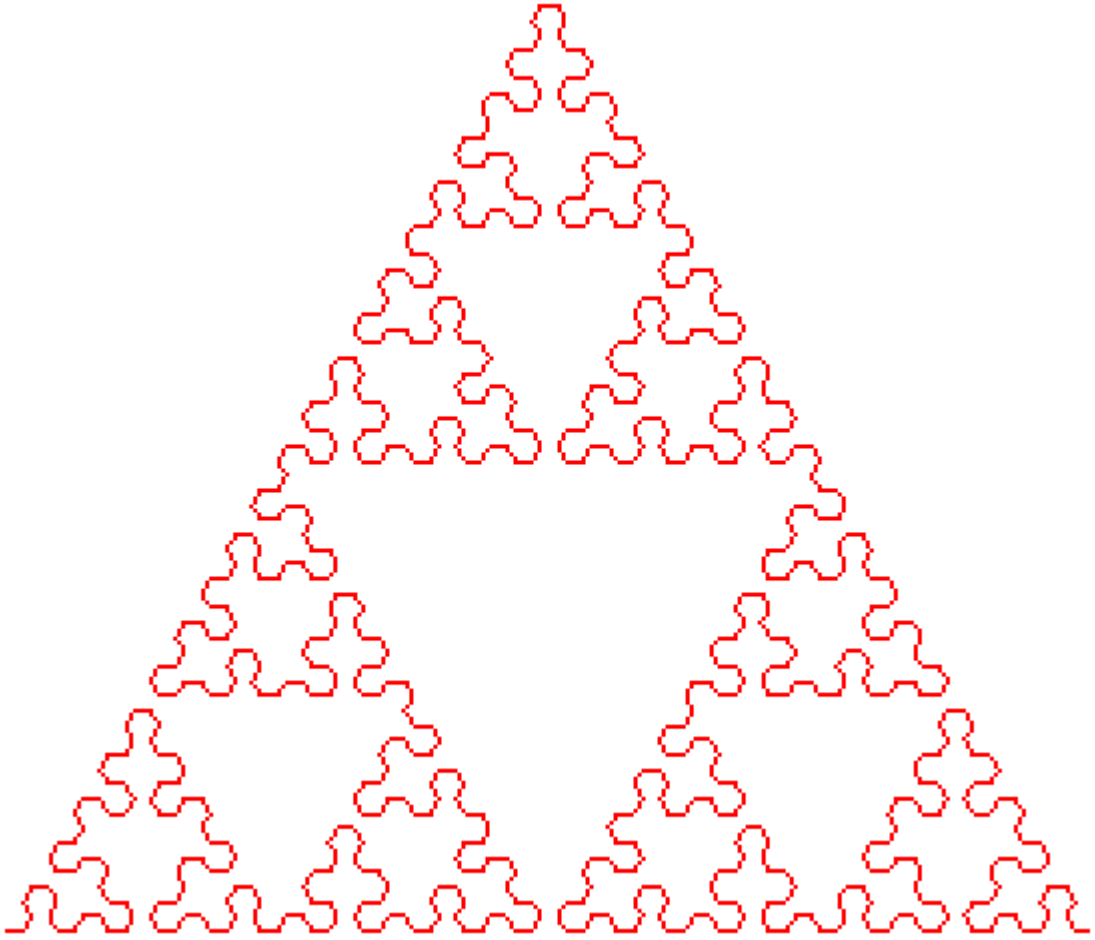
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



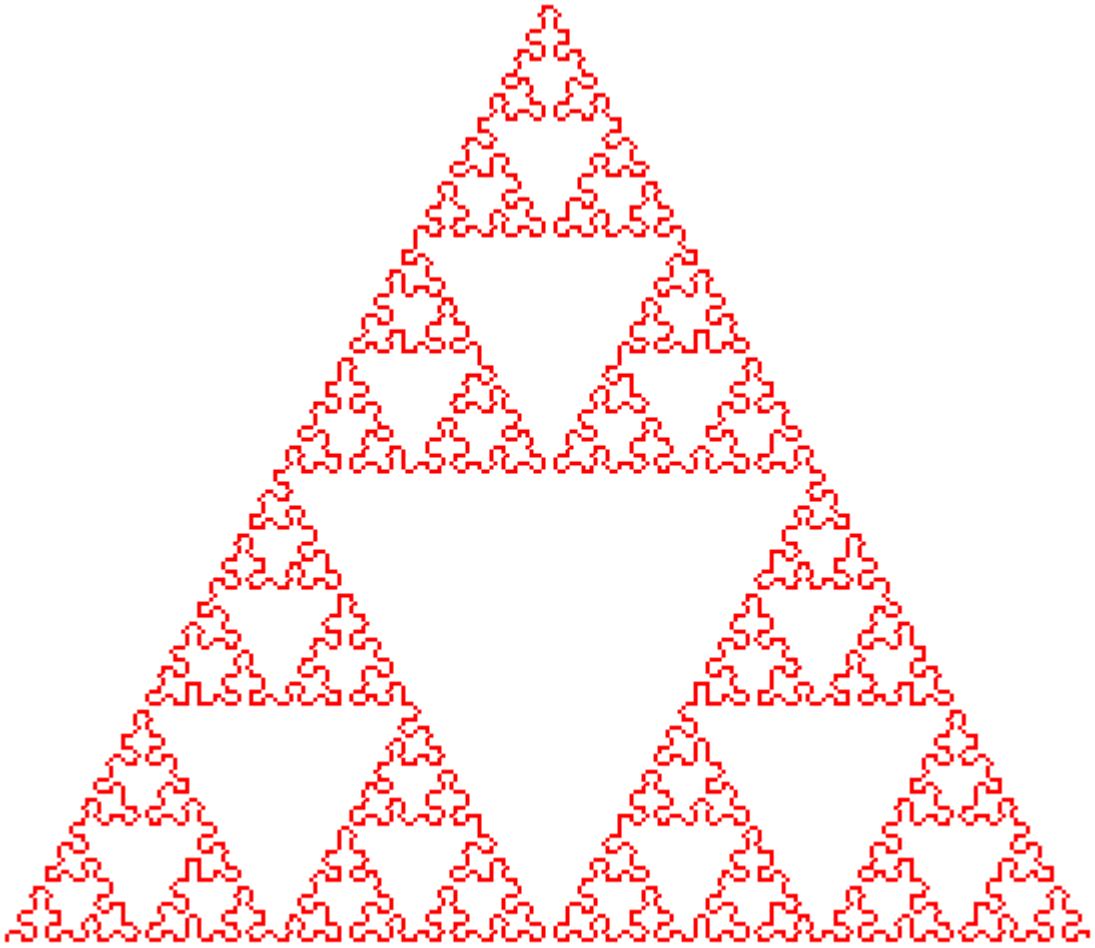
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



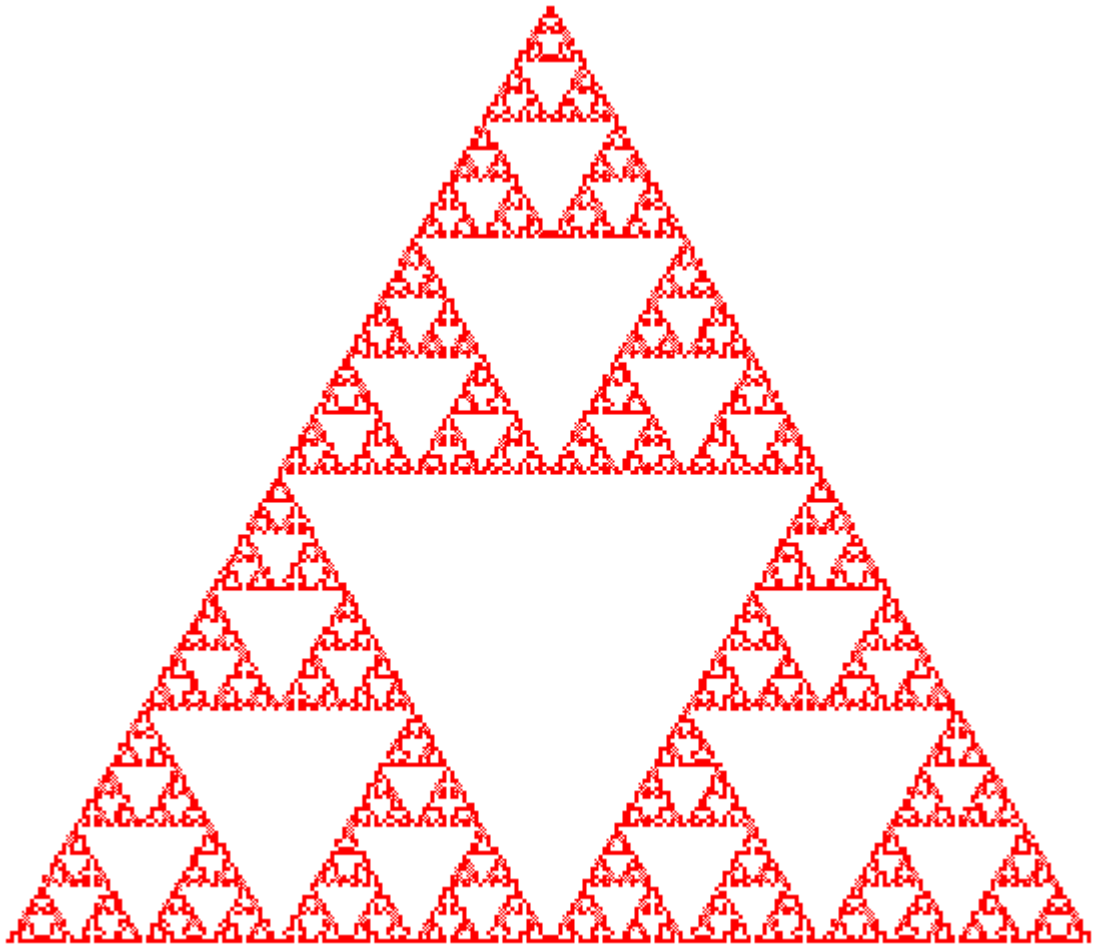
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



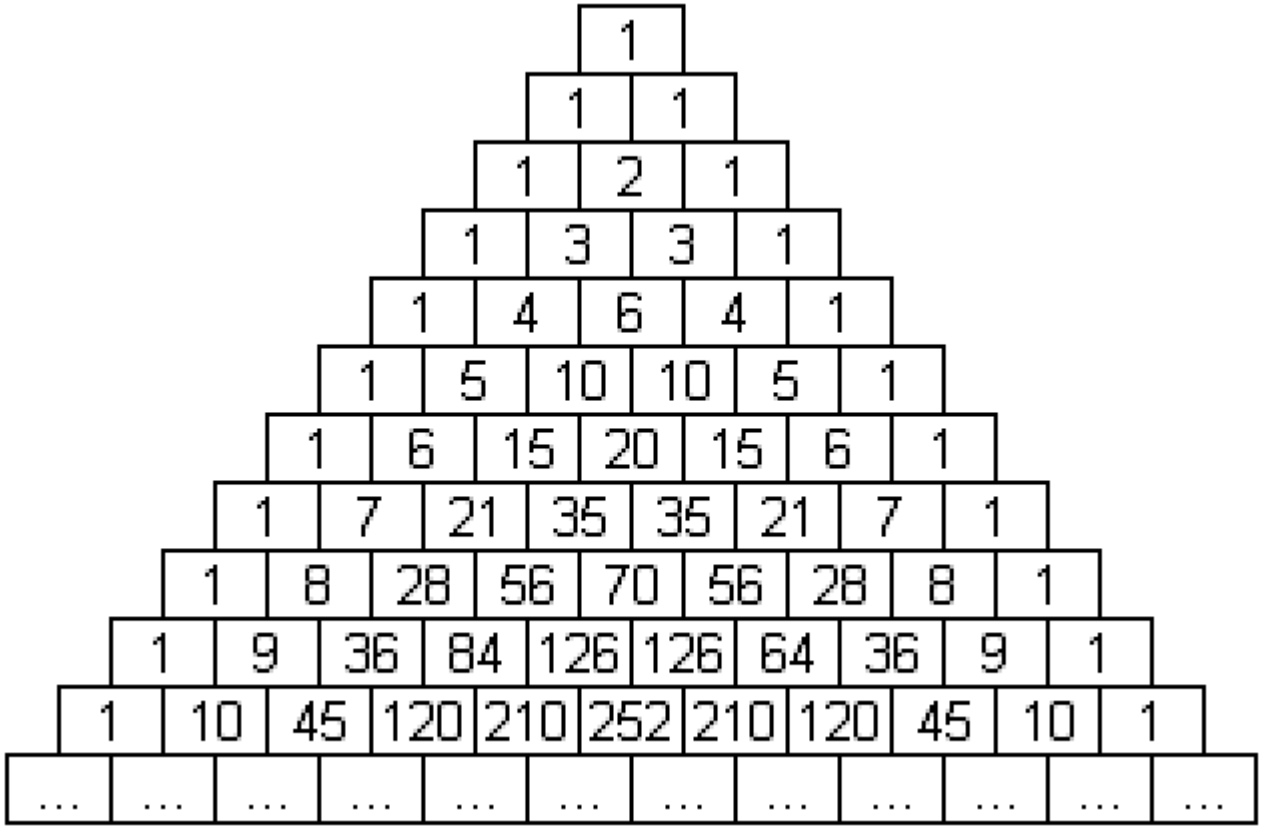
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



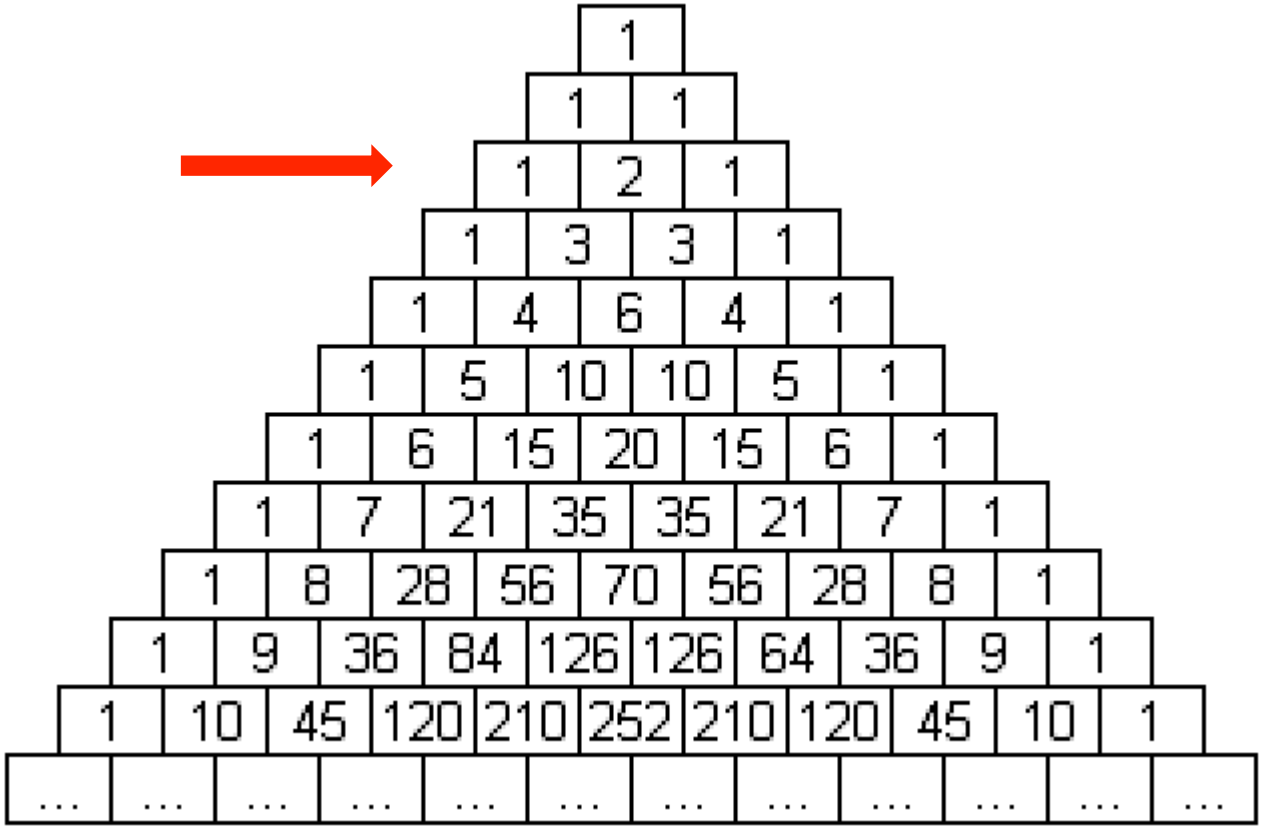
Le triangle de Sierpinski est une courbe !



Triangle de Sierpinski et triangle de Pascal

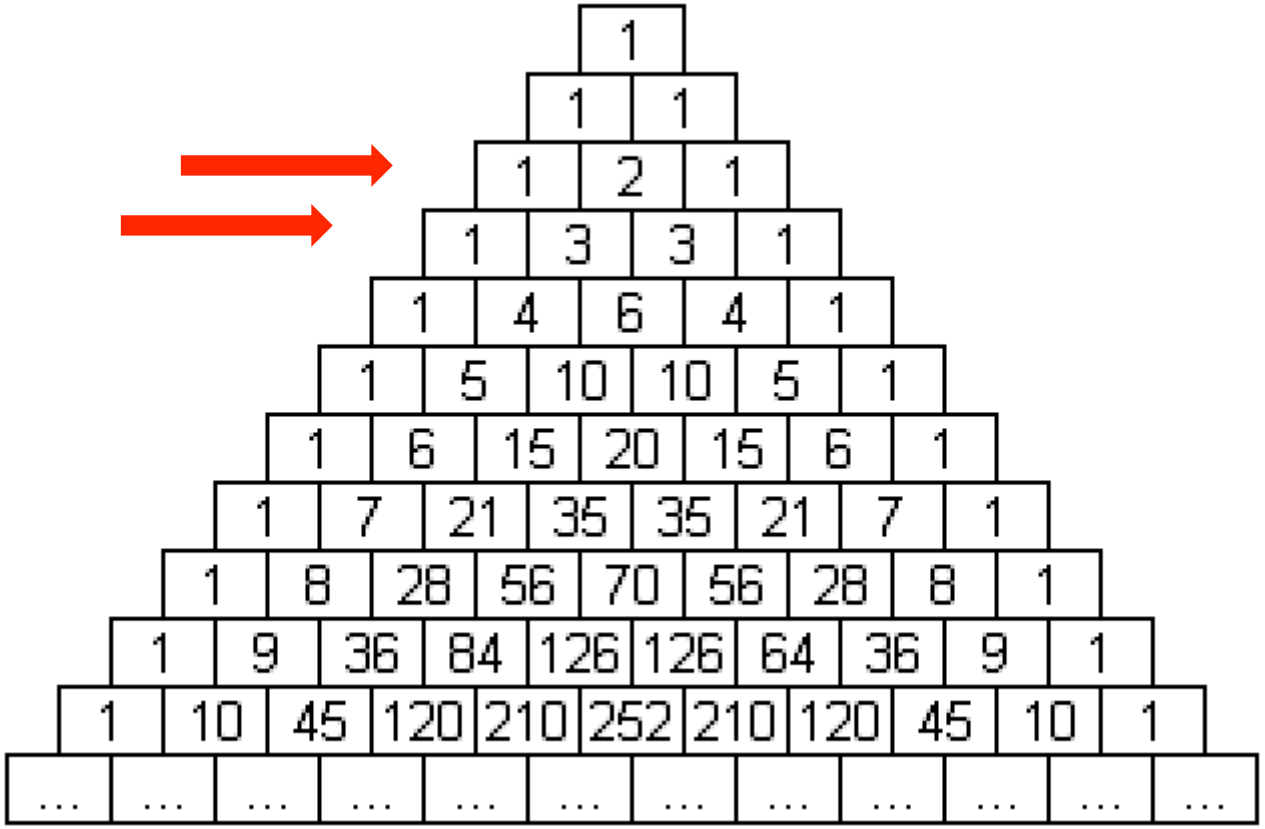


Triangle de Sierpinski et triangle de Pascal



$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$

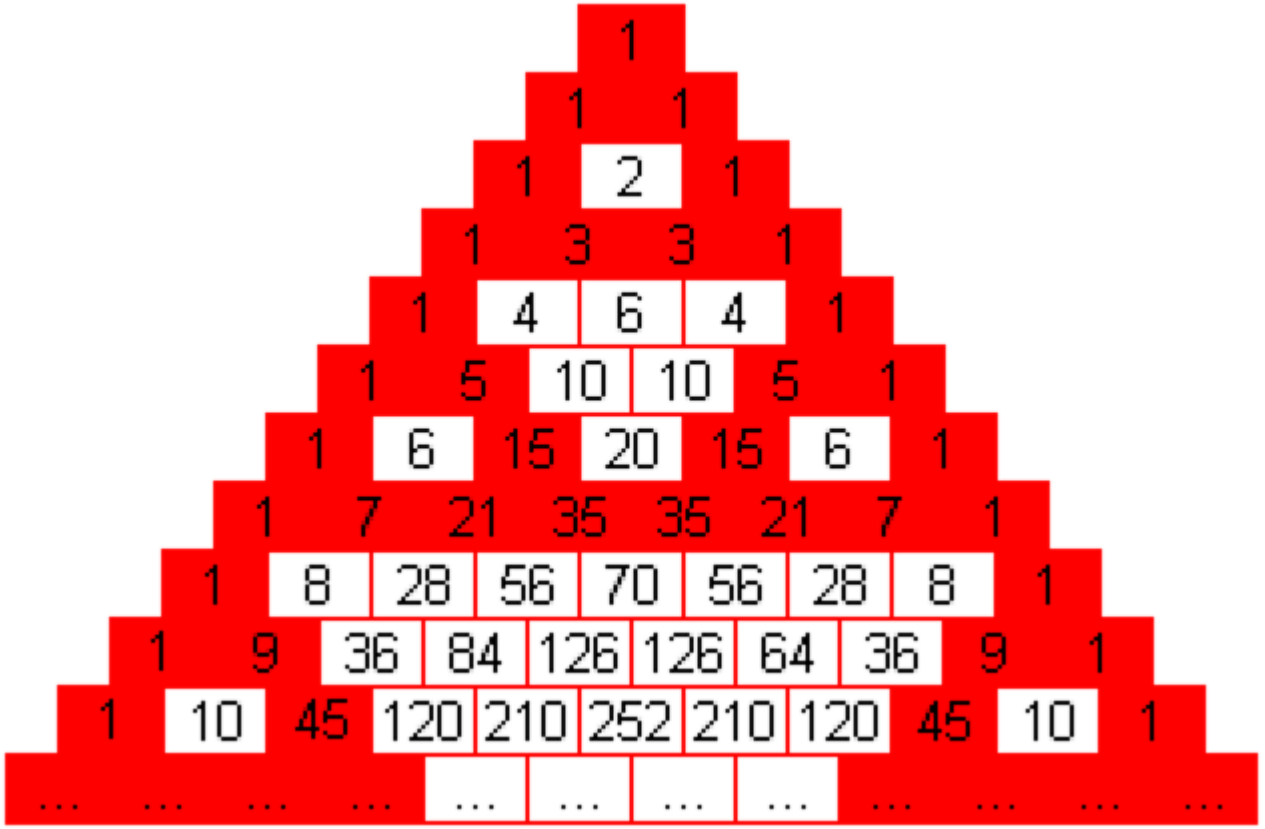
Triangle de Sierpinski et triangle de Pascal



$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$

$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$

Triangle de Sierpinski et triangle de Pascal

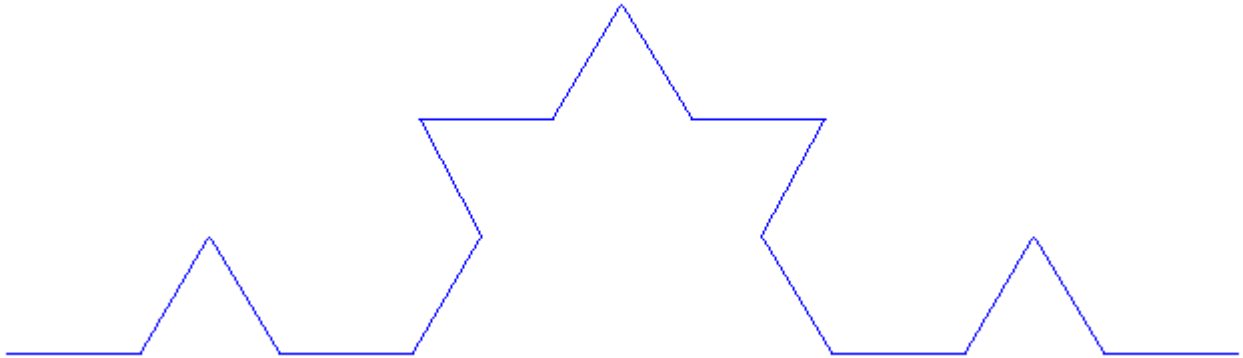


$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$

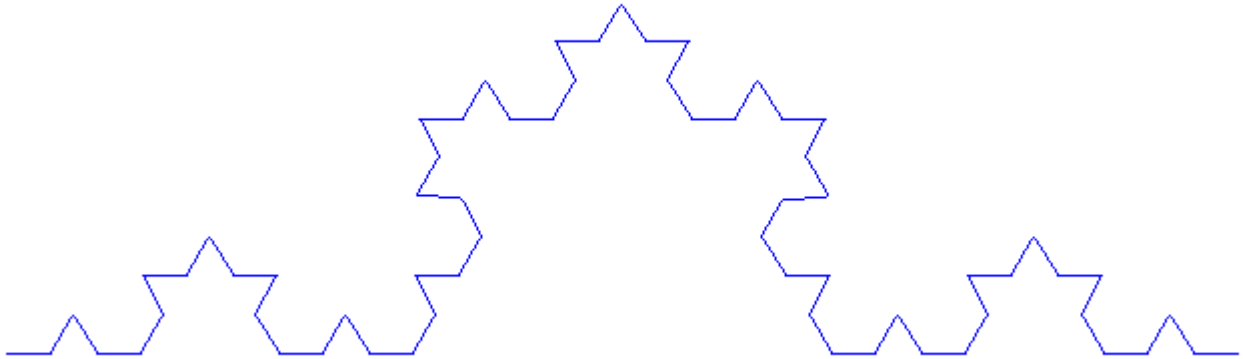
$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$

La courbe de Von Koch

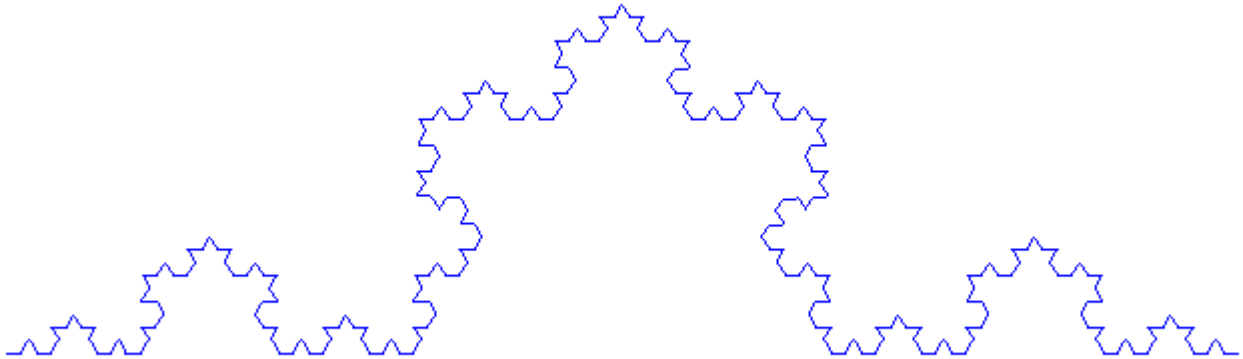
La courbe de Von Koch



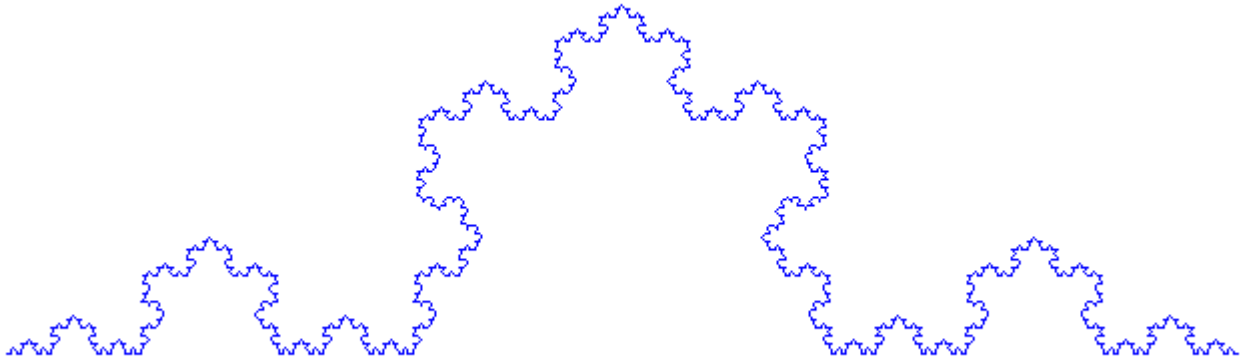
La courbe de Von Koch



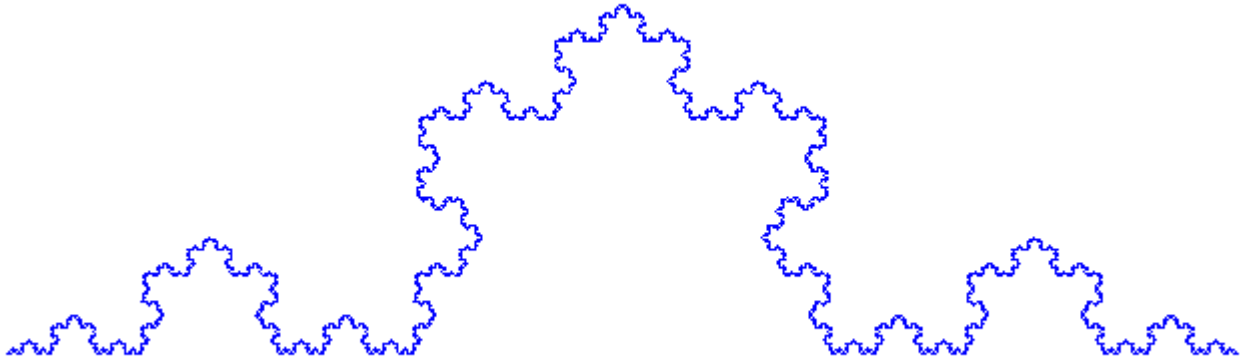
La courbe de Von Koch



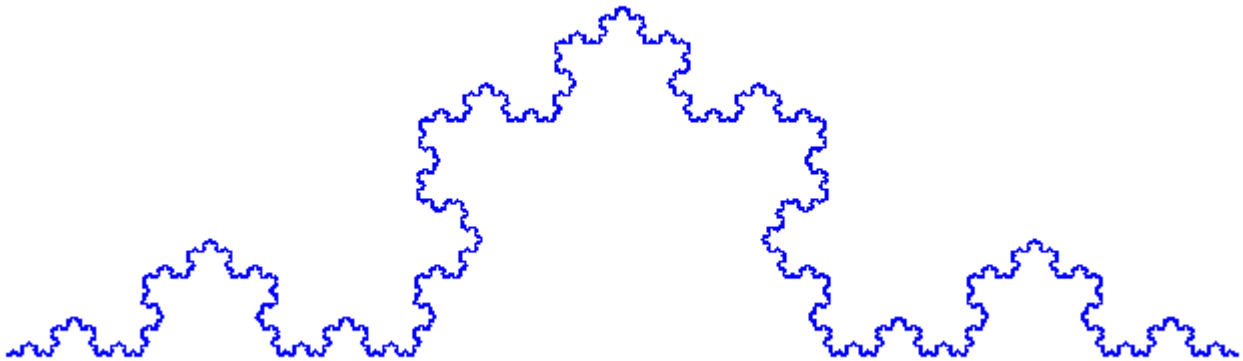
La courbe de Von Koch



La courbe de Von Koch

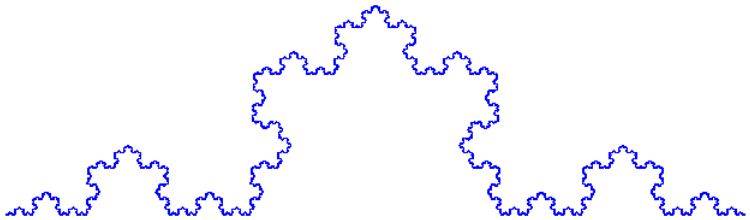


La courbe de Von Koch

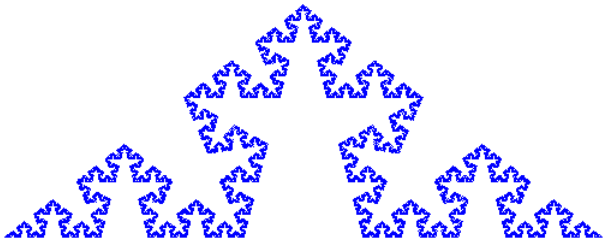


La courbe de Von Koch est réunion de 4 copies d'elle même dans un rapport de contraction 1/3

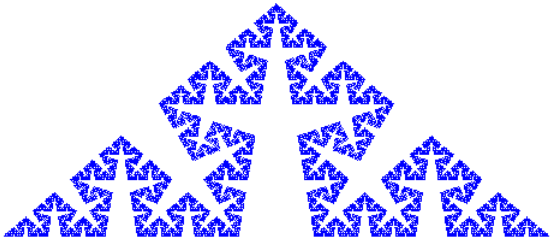
Des courbes de Von Koch à la courbe de Péano



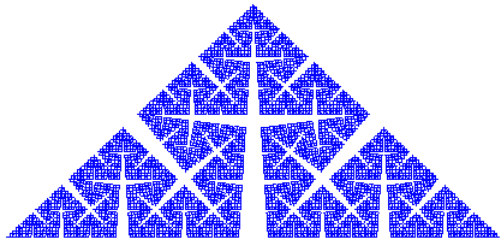
rapport 33/100



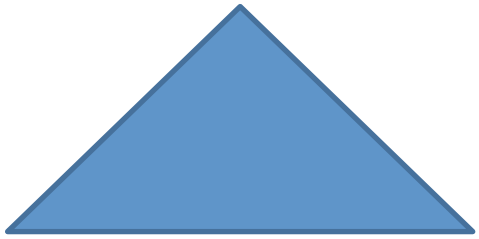
rapport 40/100



rapport 43/100

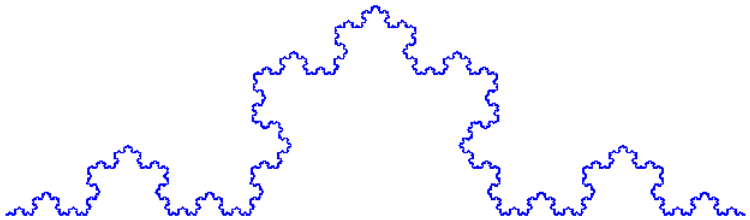


rapport 47/100

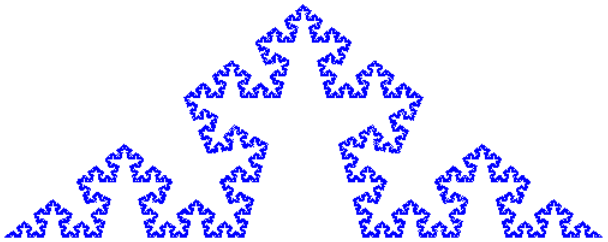


rapport 50/100

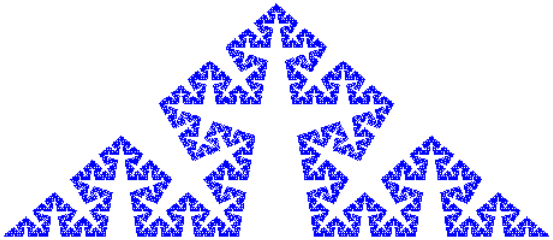
Des courbes de Von Koch à la courbe de Péano



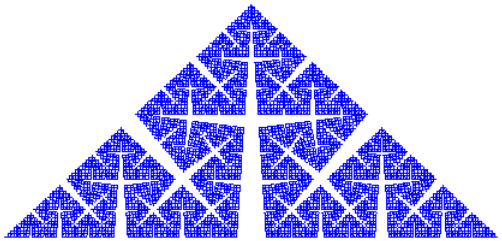
rapport 33/100



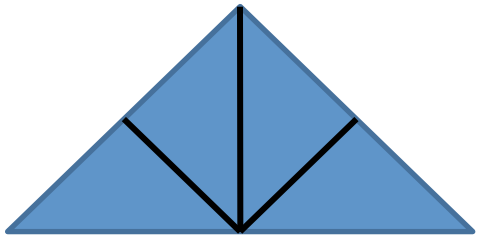
rapport 40/100



rapport 43/100

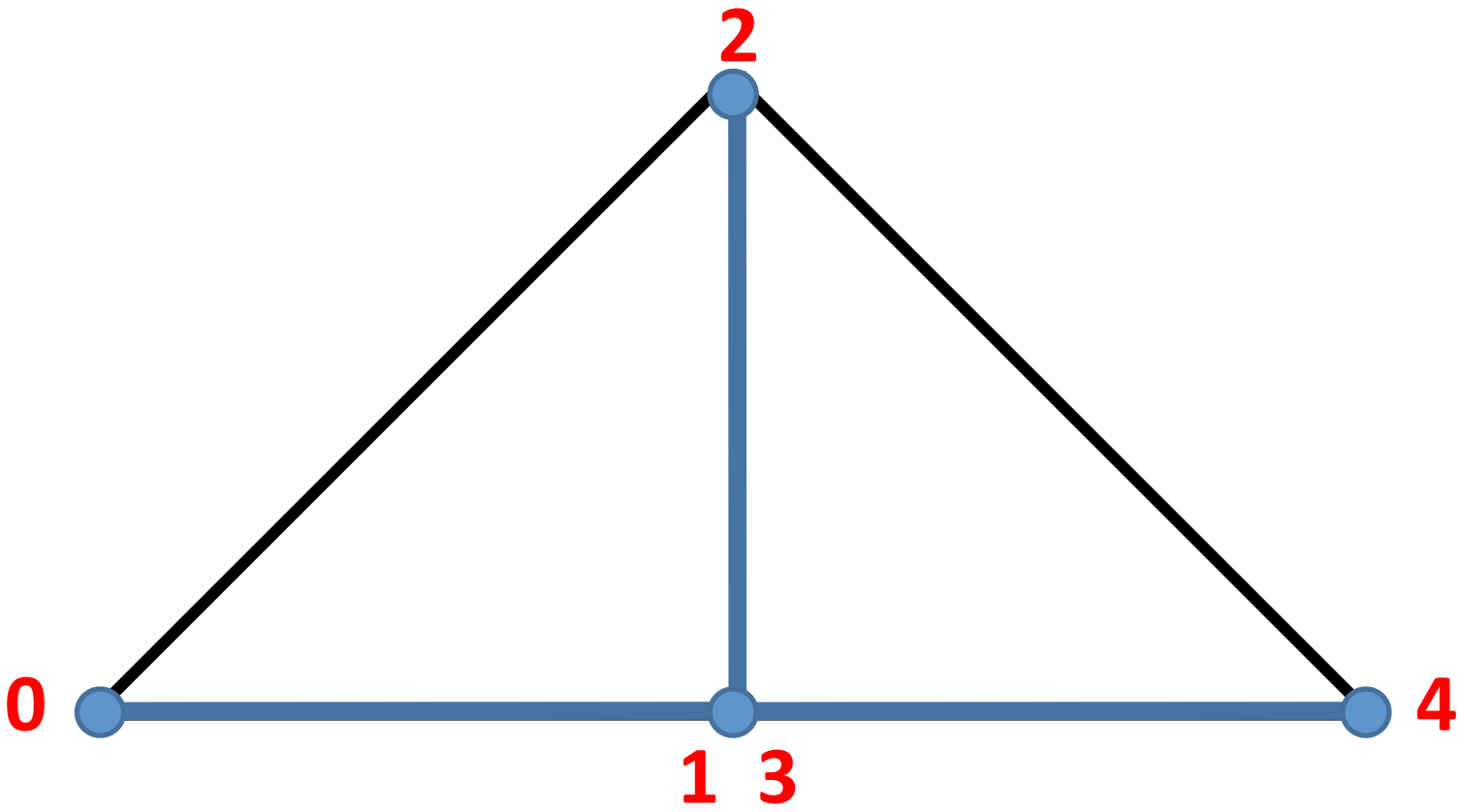


rapport 47/100



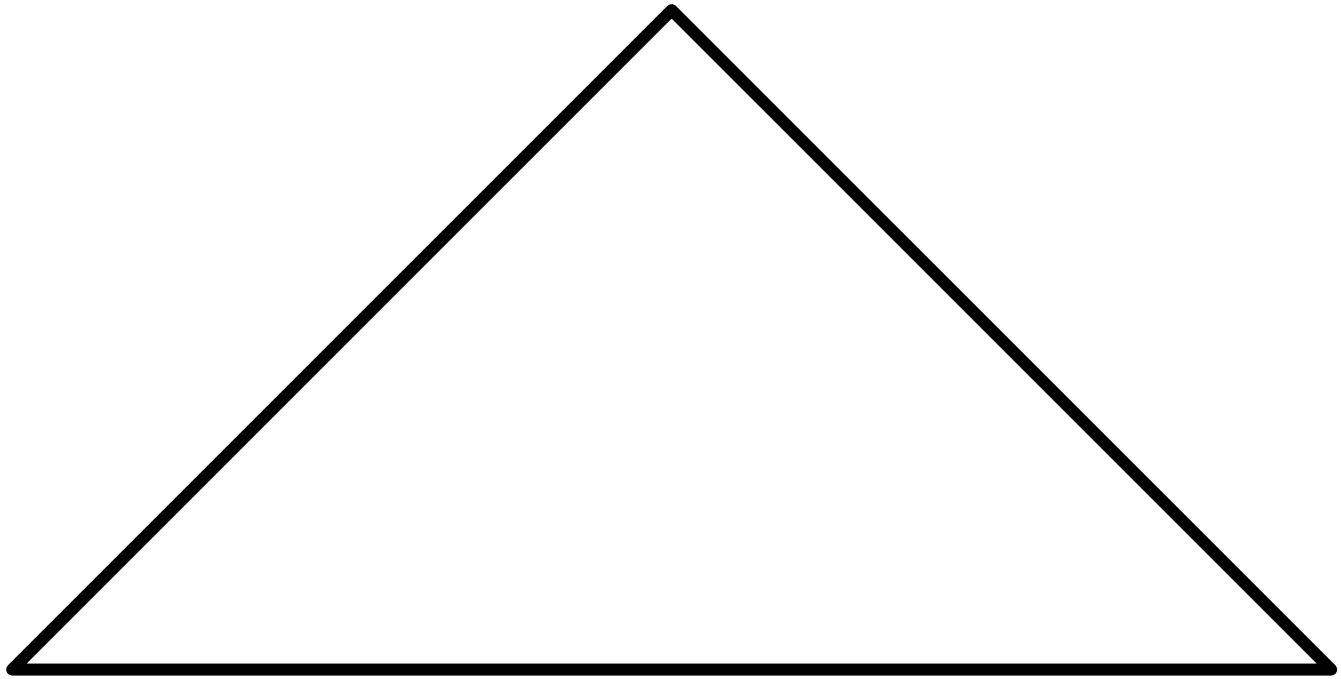
rapport 50/100

La courbe de Péano : mouvement de base

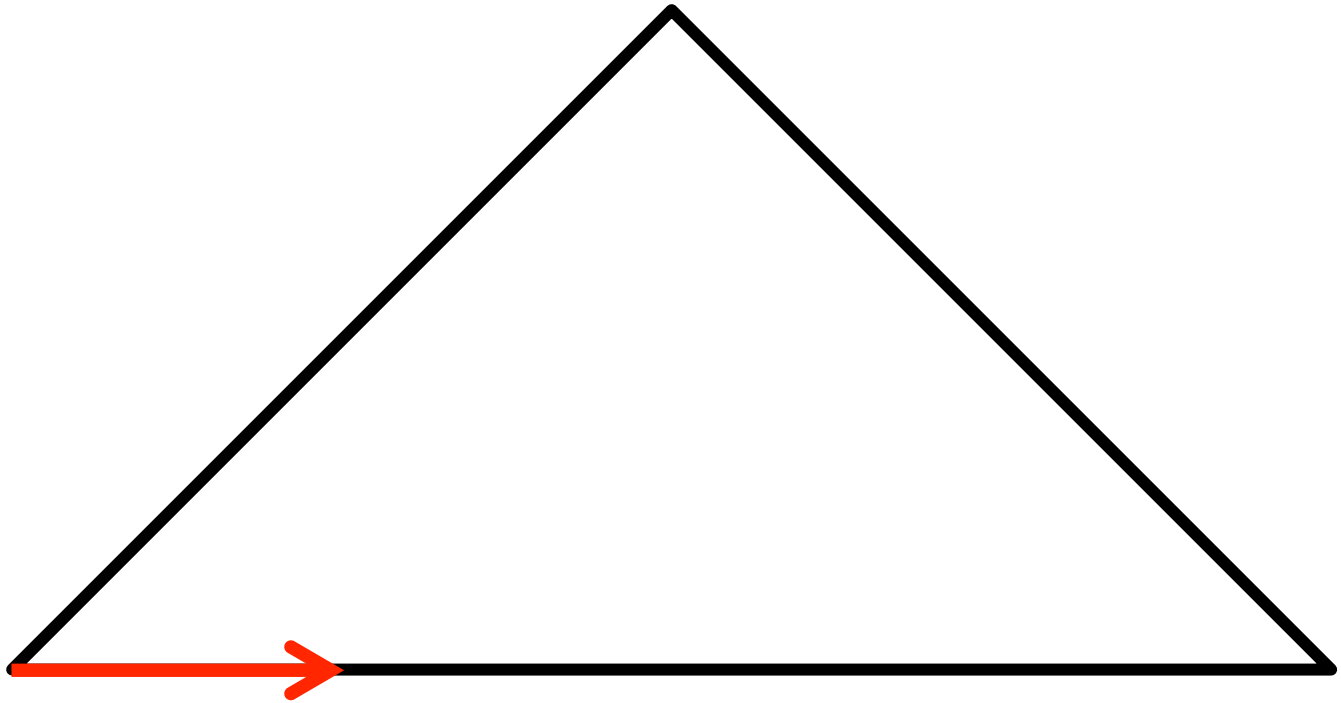


Le point passe de la position 0 à la position 4 en passant par les positions 1, 2 et 3

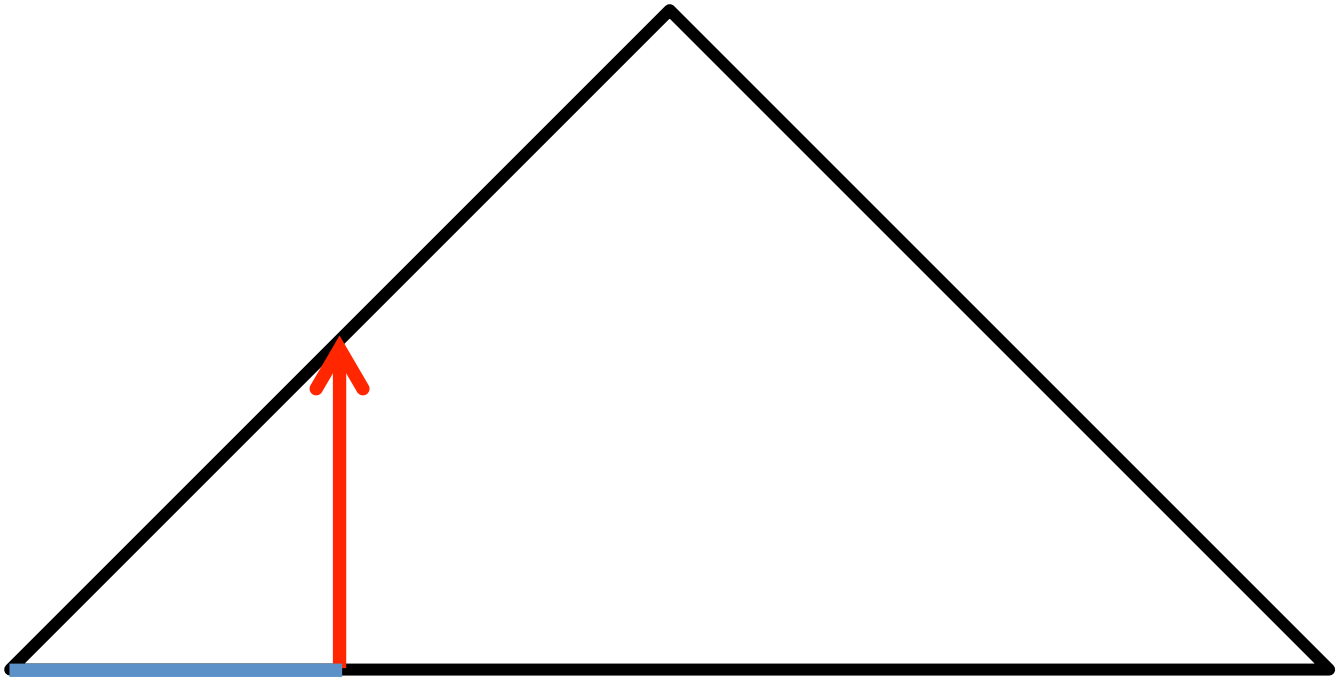
La courbe de Péano : deuxième génération



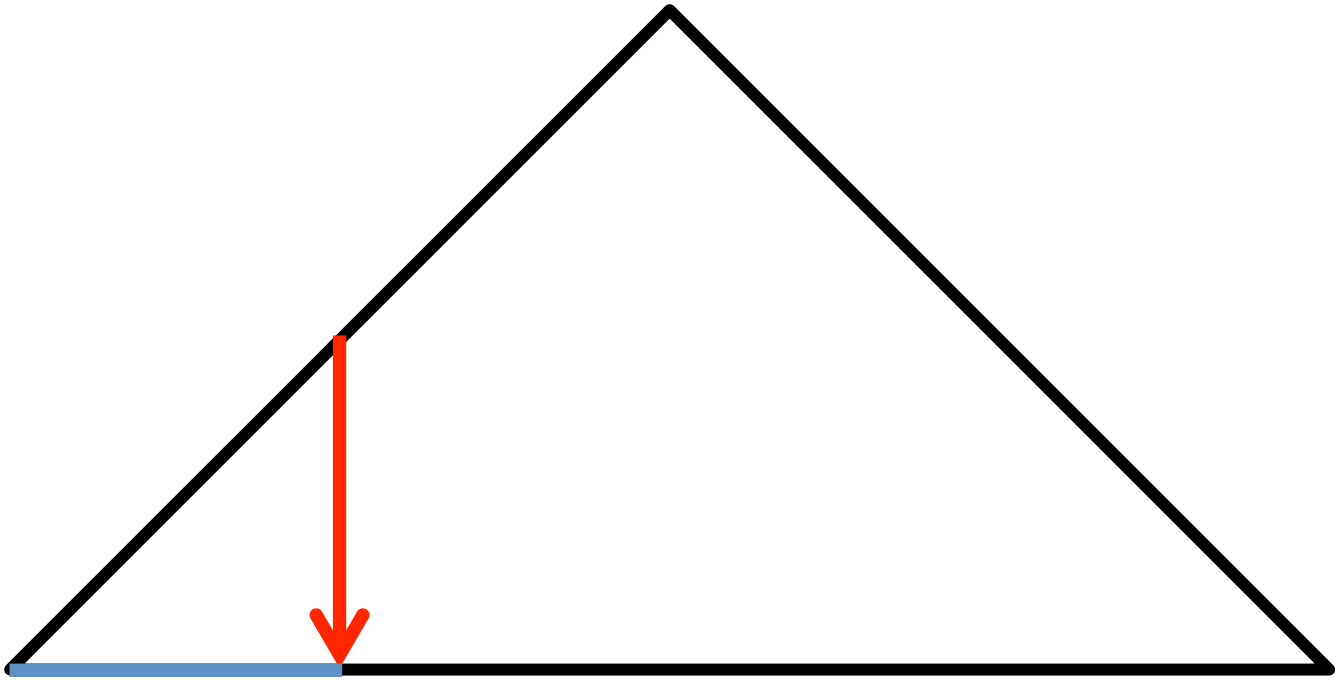
La courbe de Péano : deuxième génération



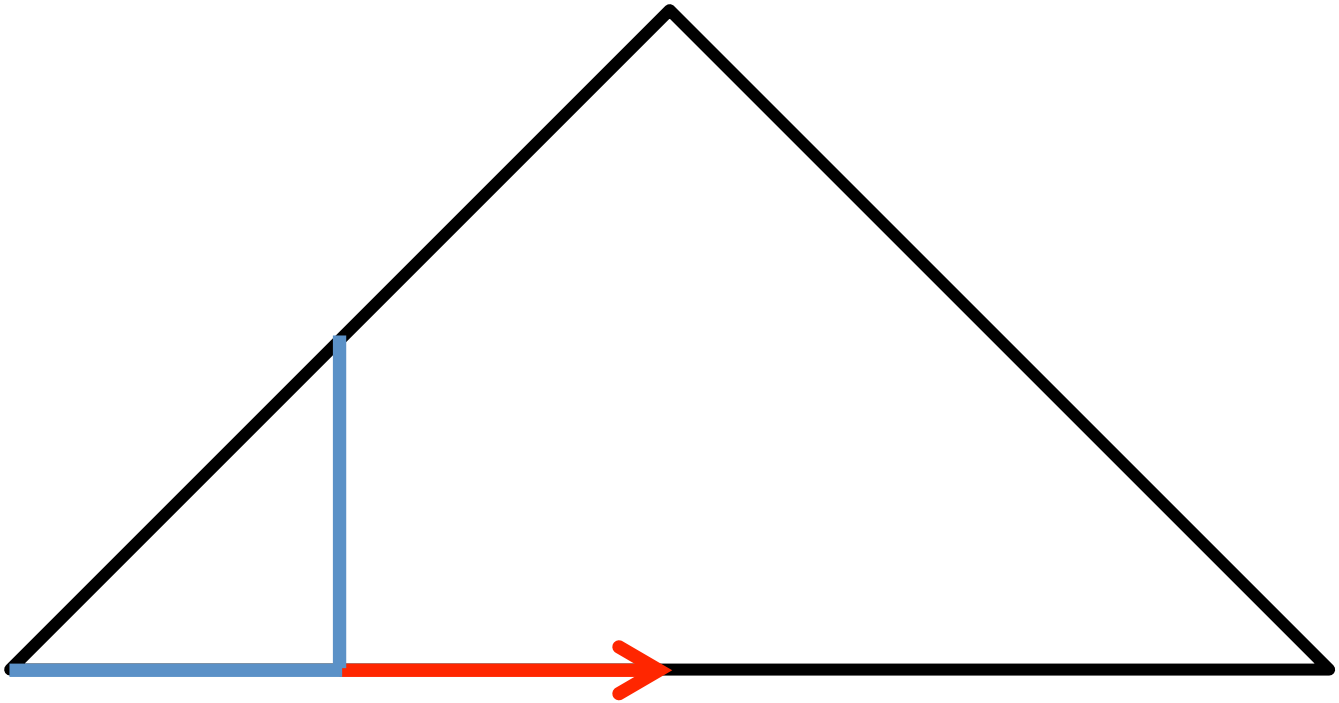
La courbe de Péano : deuxième génération



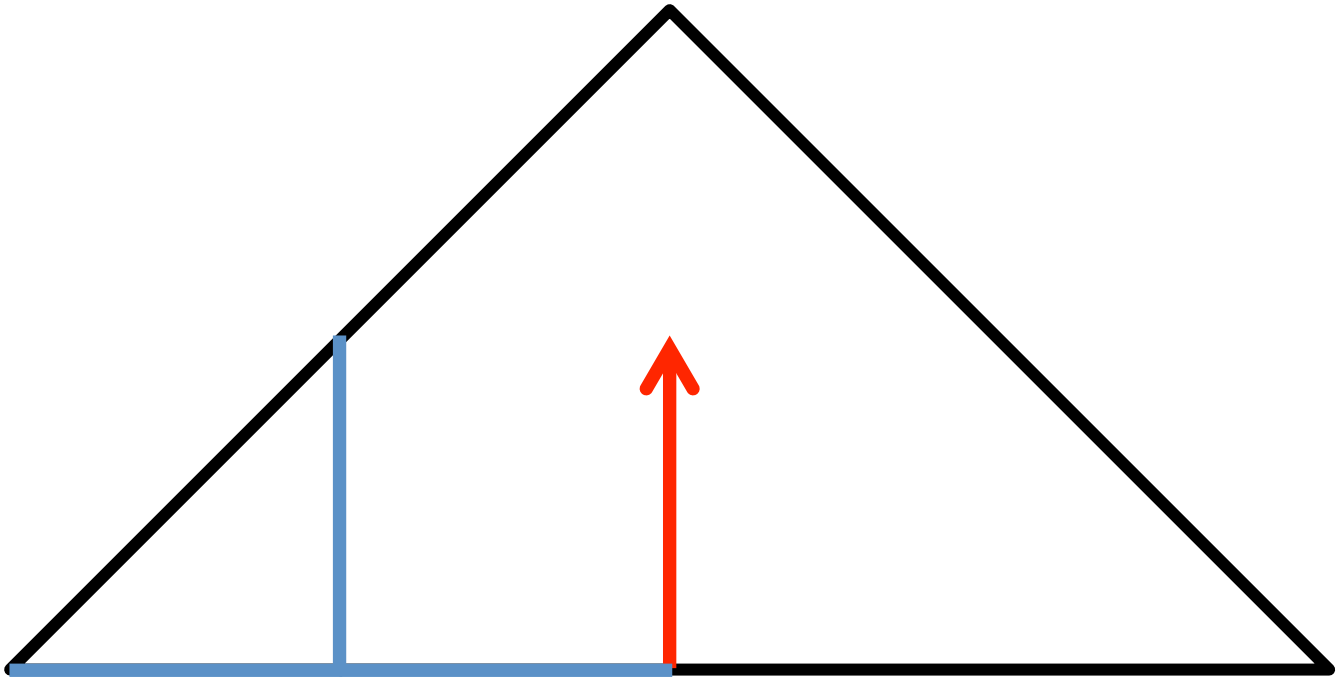
La courbe de Péano : deuxième génération



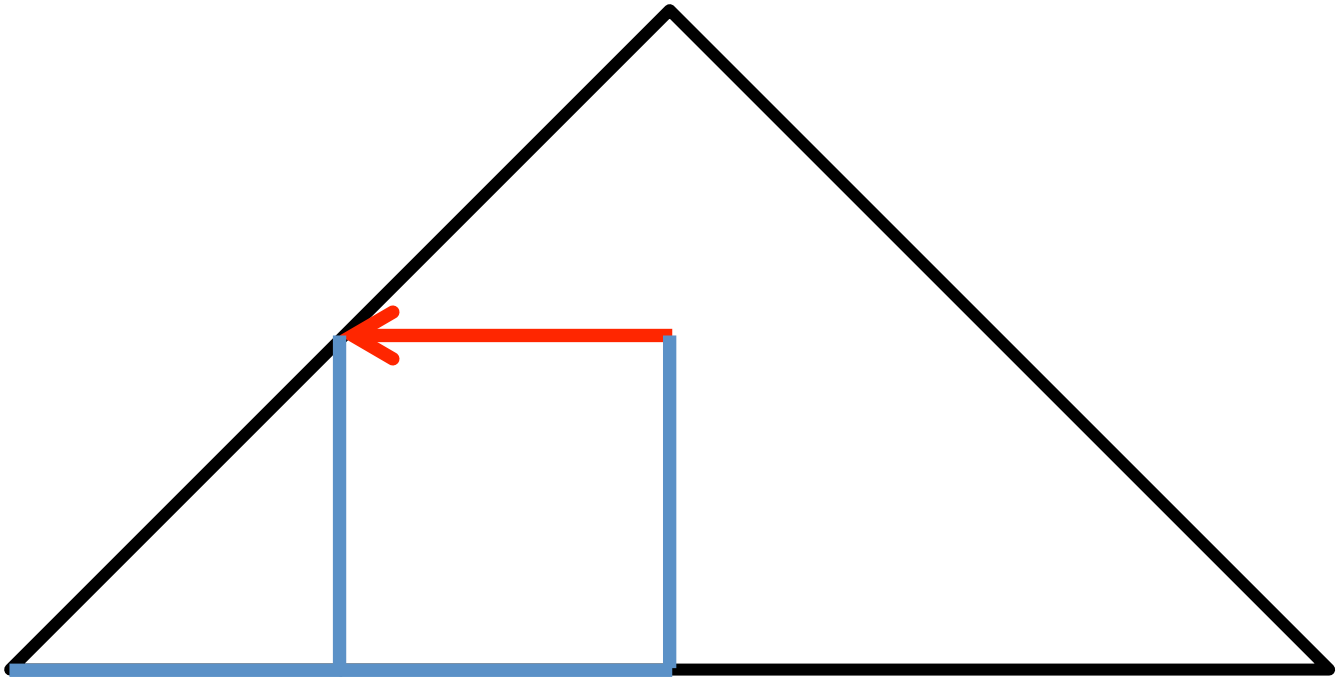
La courbe de Péano : deuxième génération



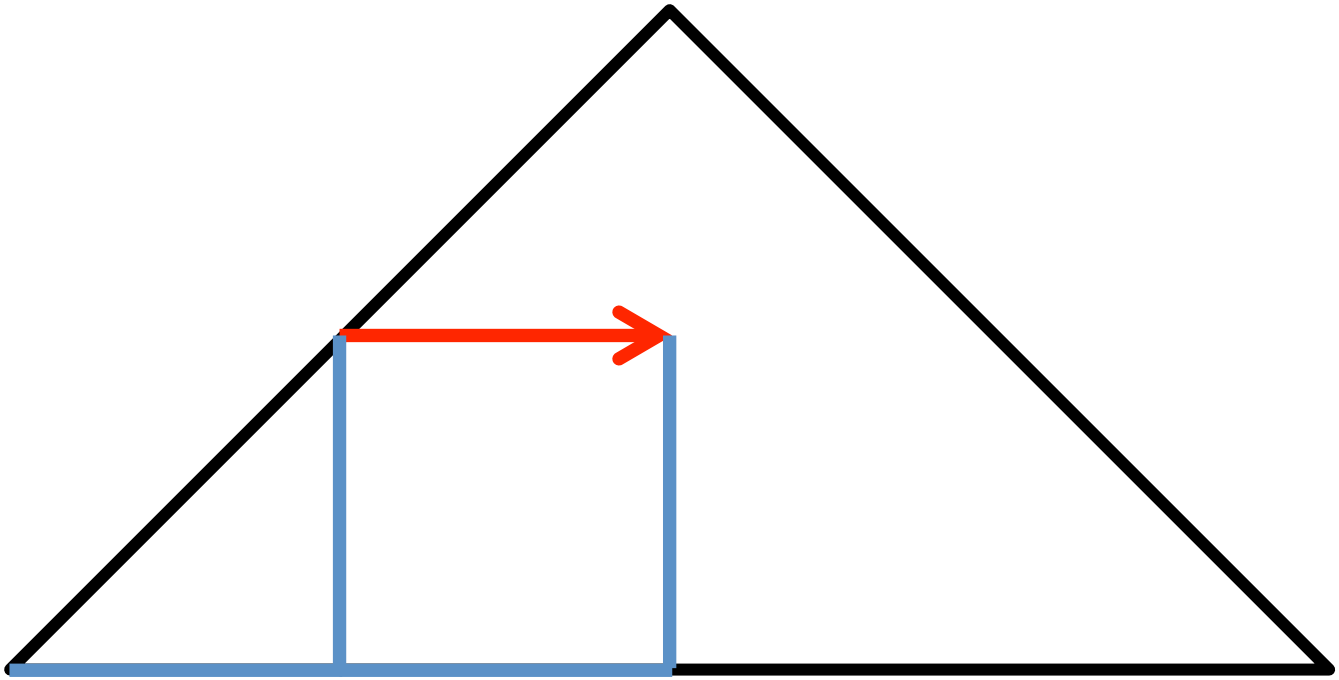
La courbe de Péano : deuxième génération



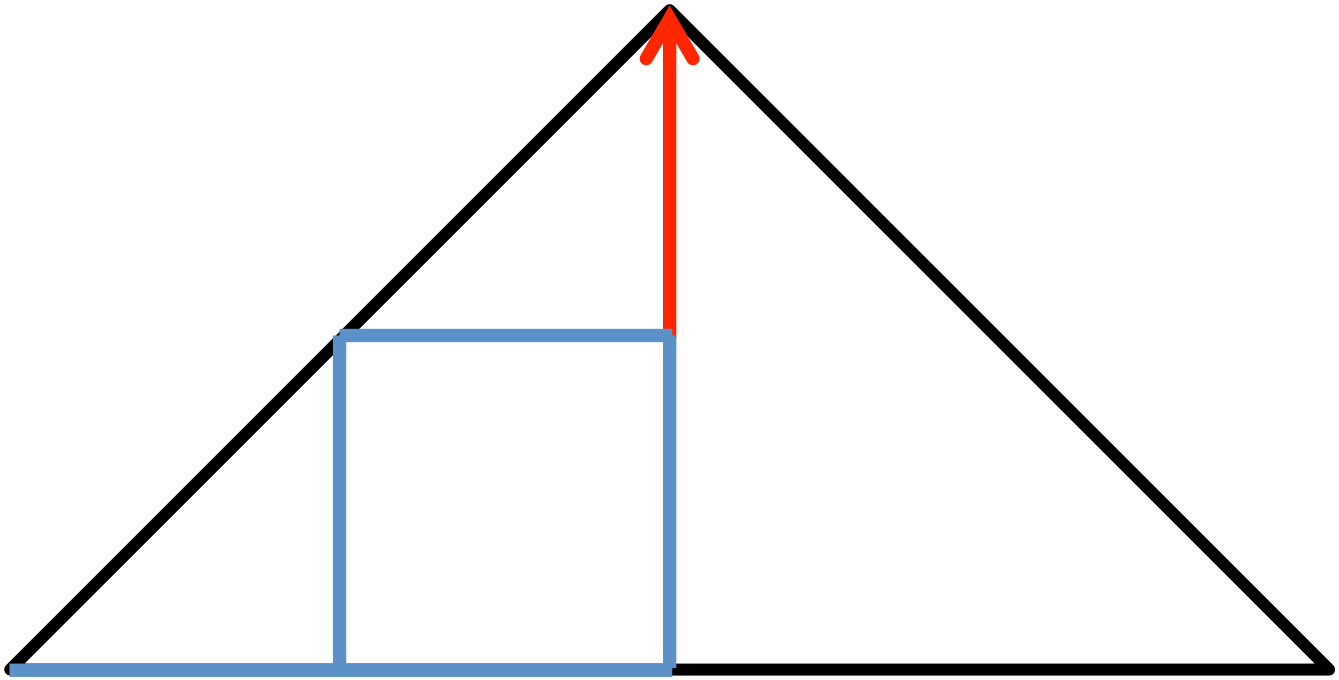
La courbe de Péano : deuxième génération



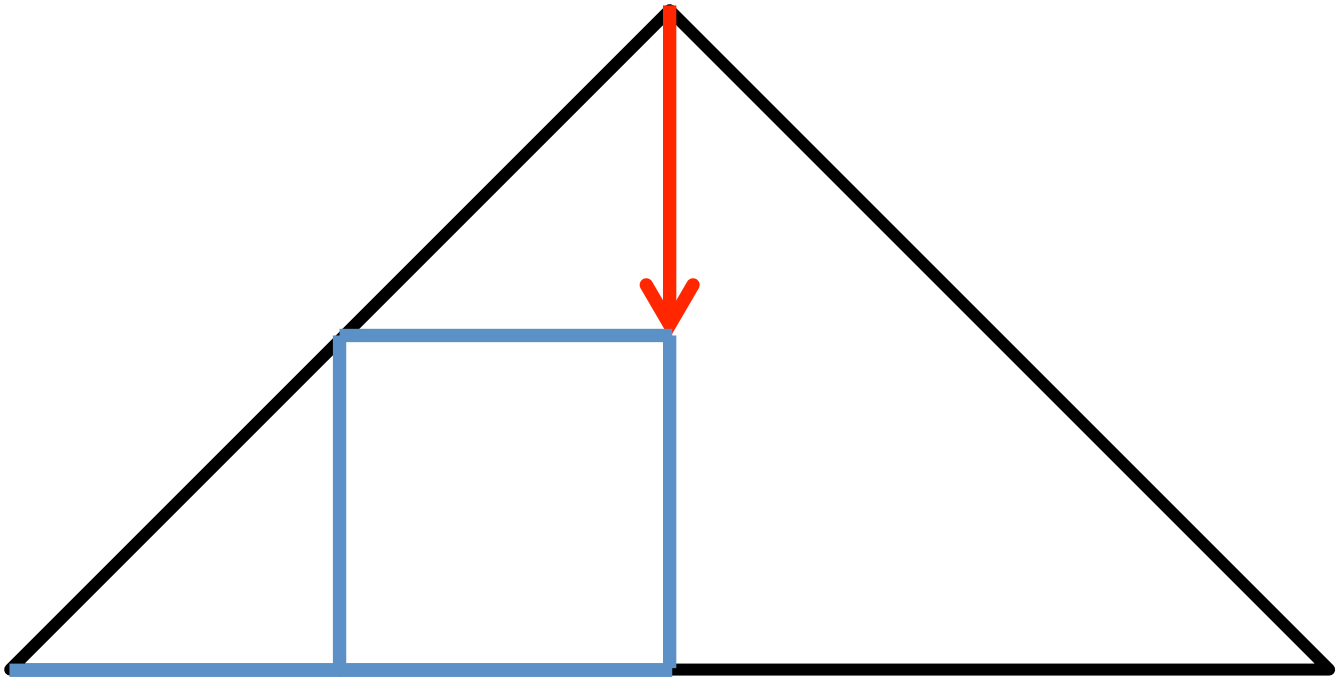
La courbe de Péano : deuxième génération



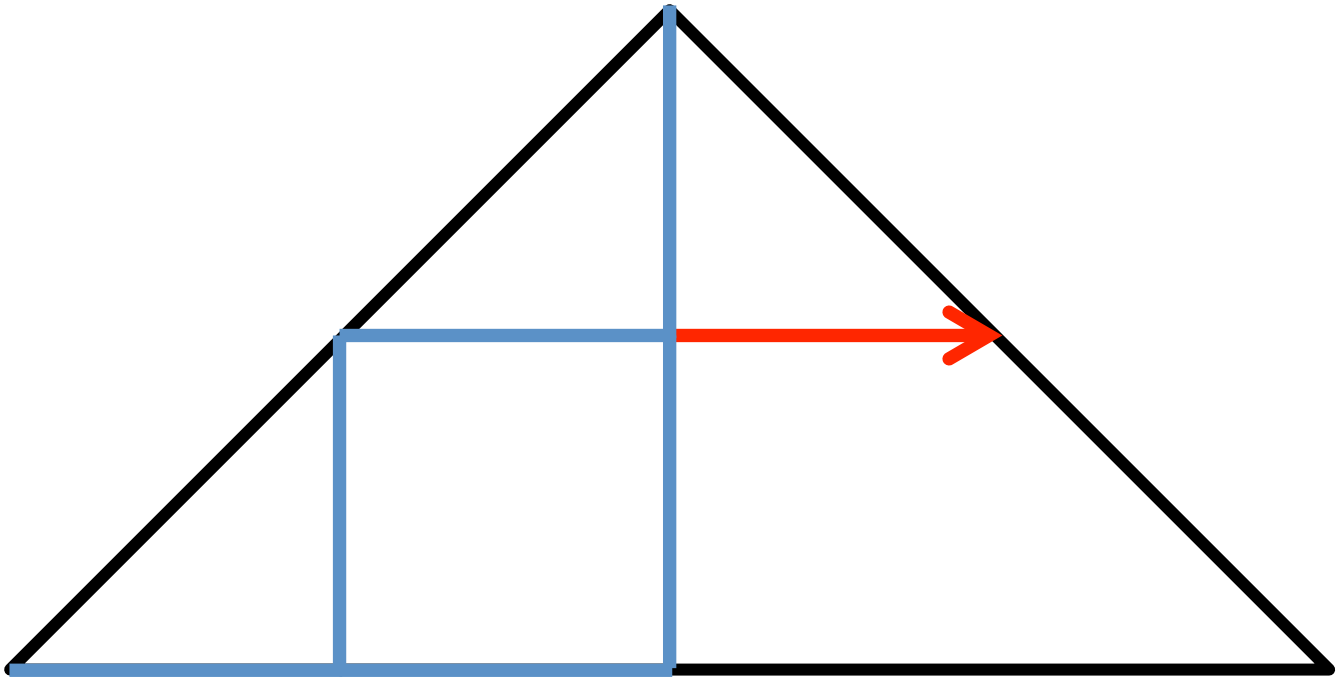
La courbe de Péano : deuxième génération



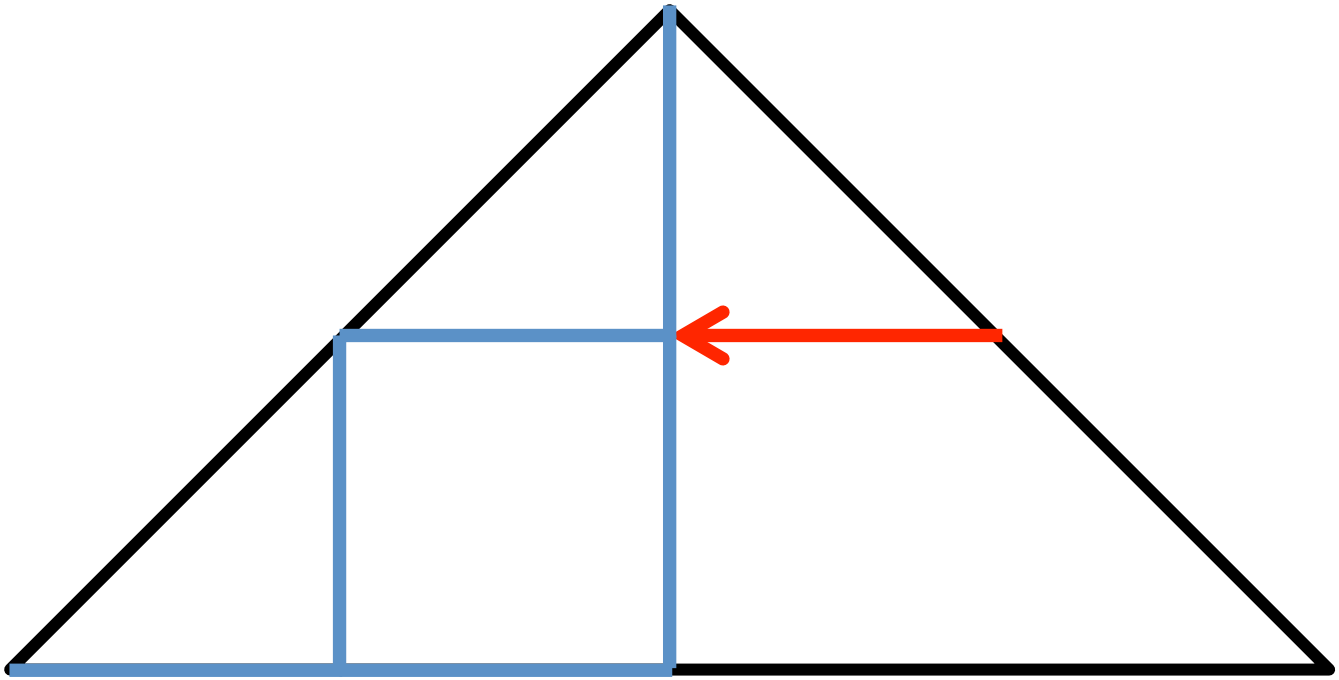
La courbe de Péano : deuxième génération



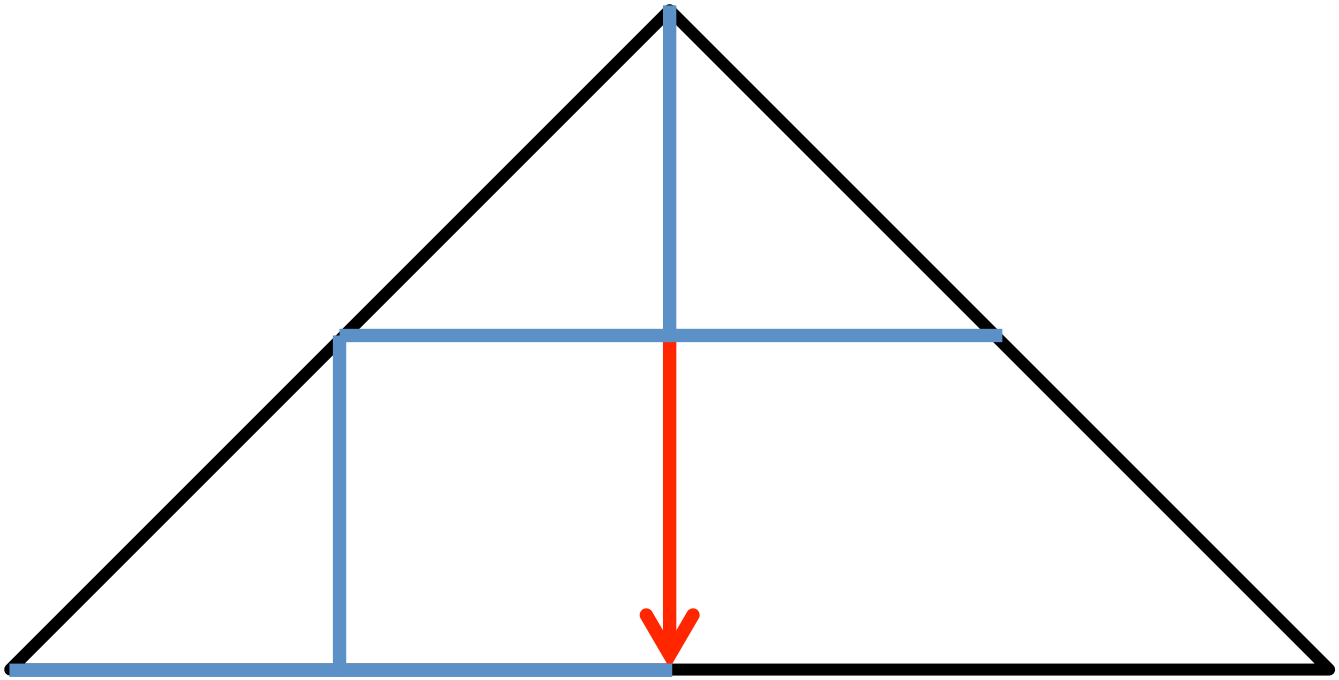
La courbe de Péano : deuxième génération



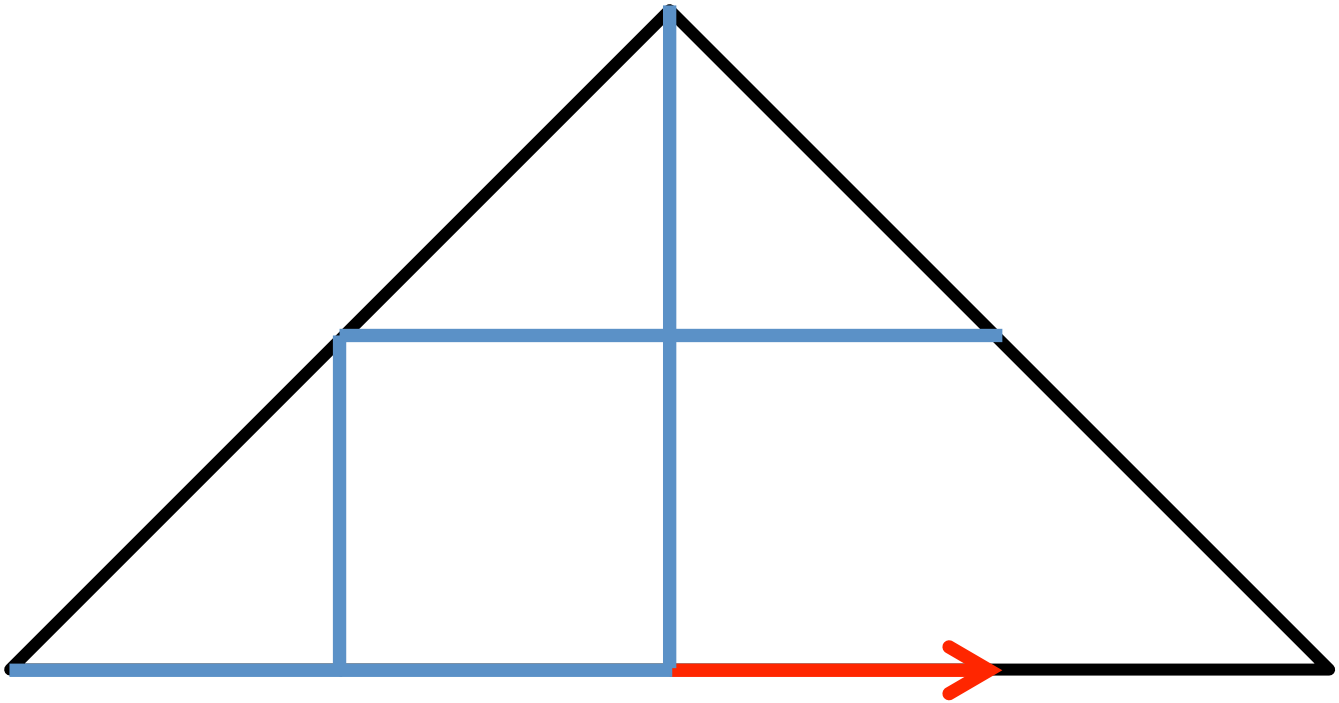
La courbe de Péano : deuxième génération



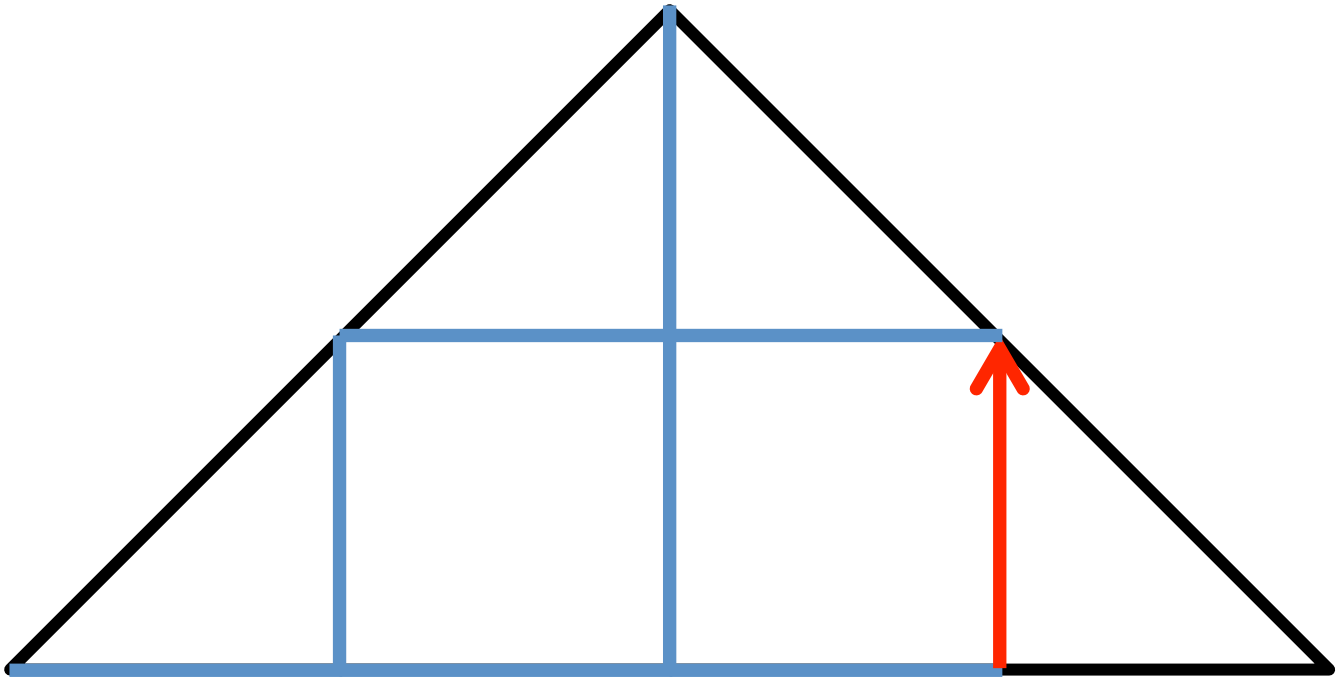
La courbe de Péano : deuxième génération



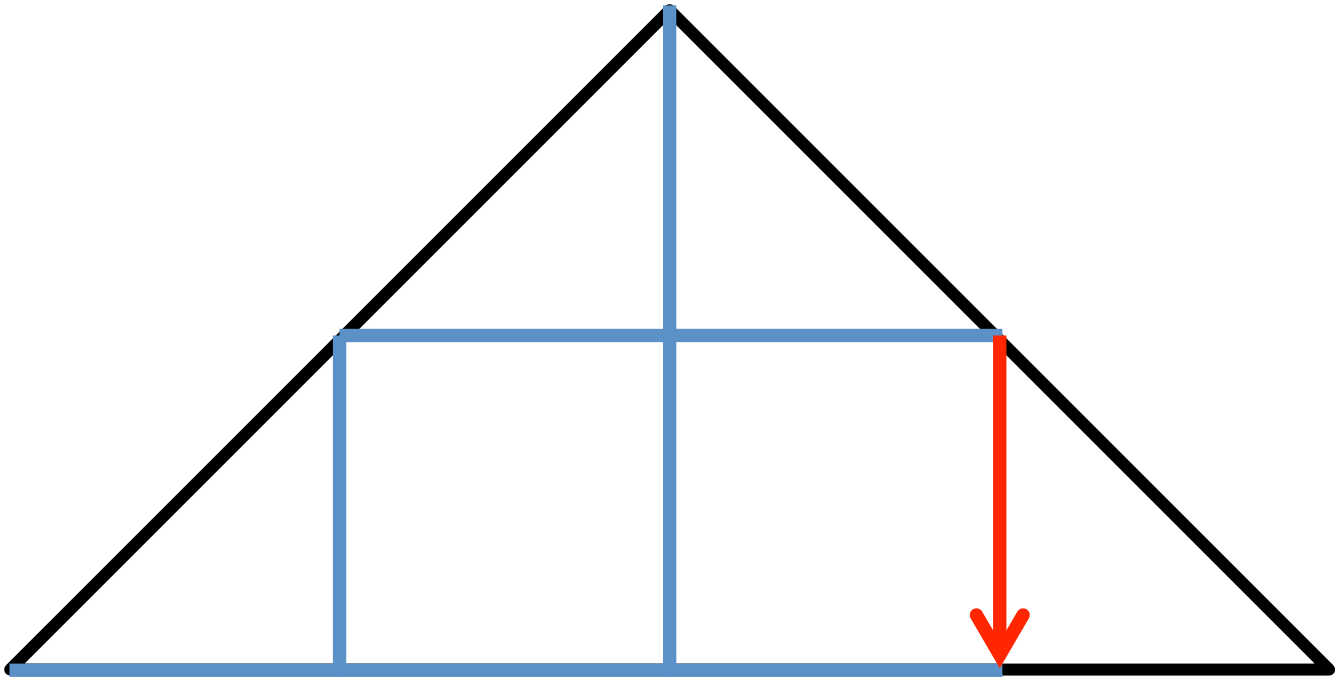
La courbe de Péano : deuxième génération



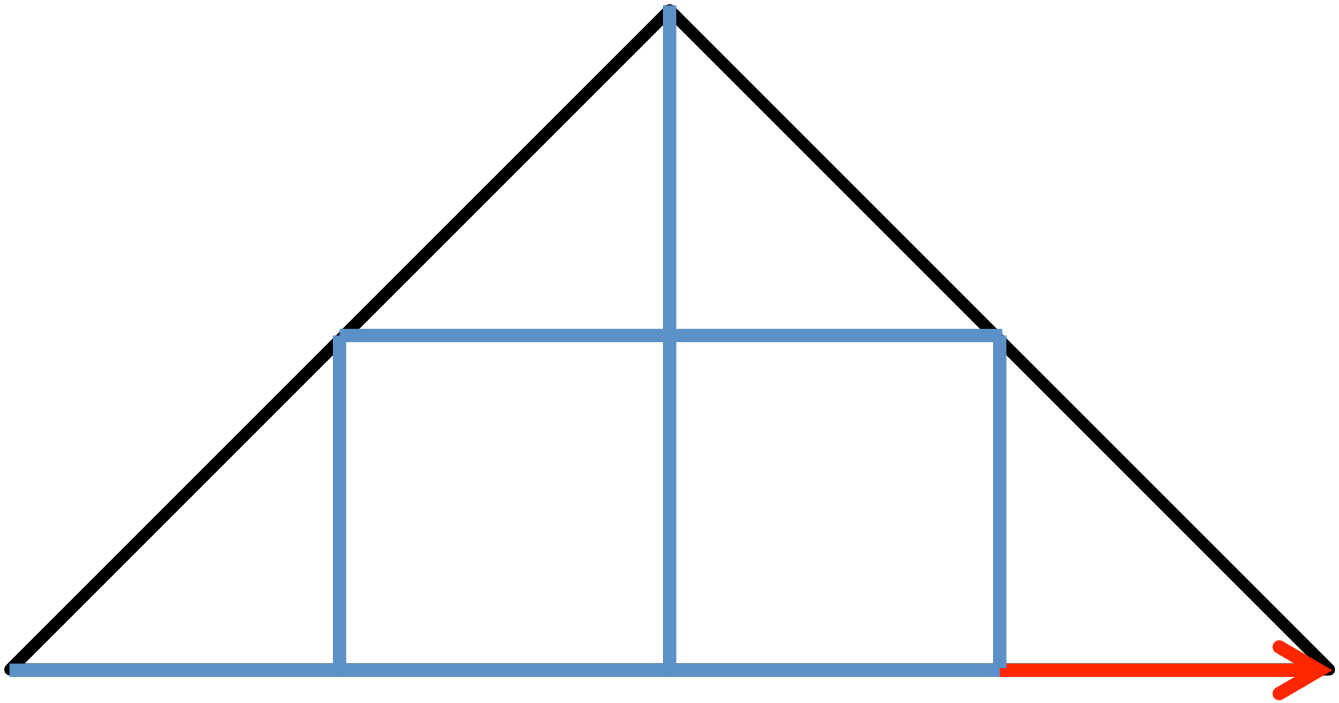
La courbe de Péano : deuxième génération



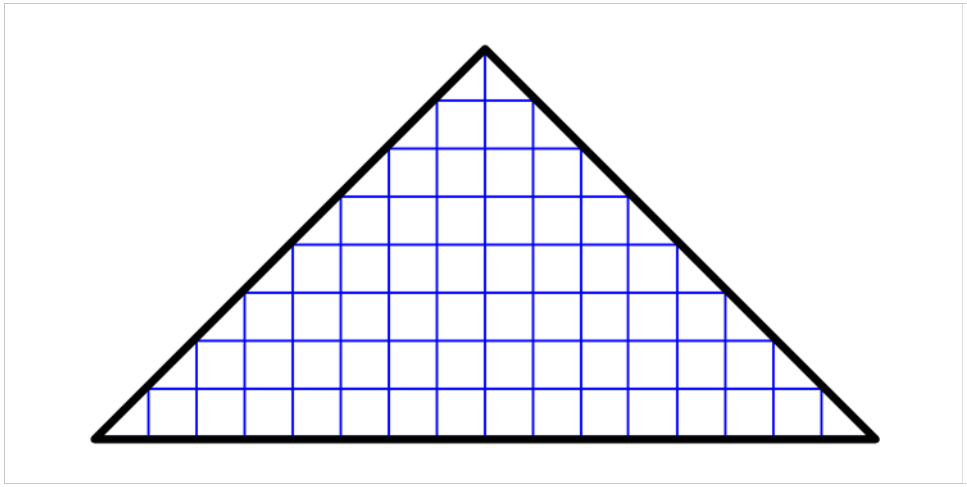
La courbe de Péano : deuxième génération



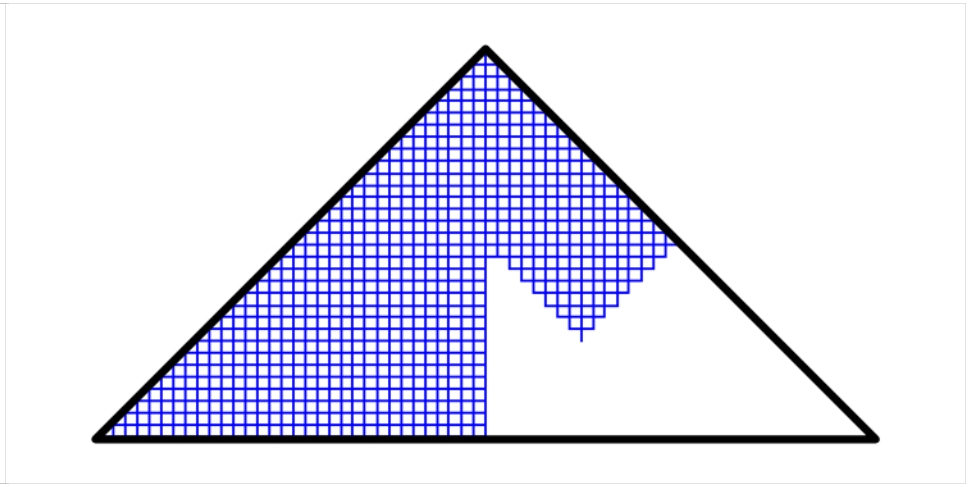
La courbe de Péano : deuxième génération



La courbe de Péano



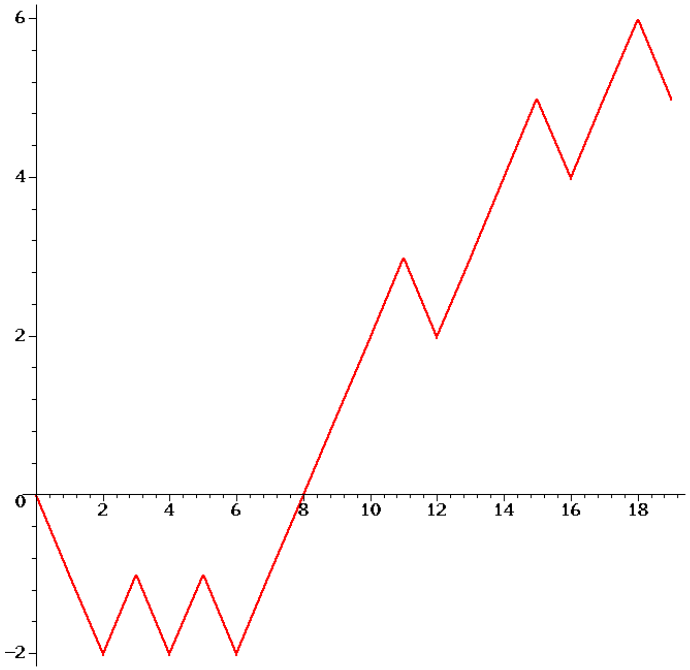
La courbe de Péano
3ème génération



La courbe de Péano
5ème génération
en cours de réalisation

Jeu de pile ou face : la fortune du joueur

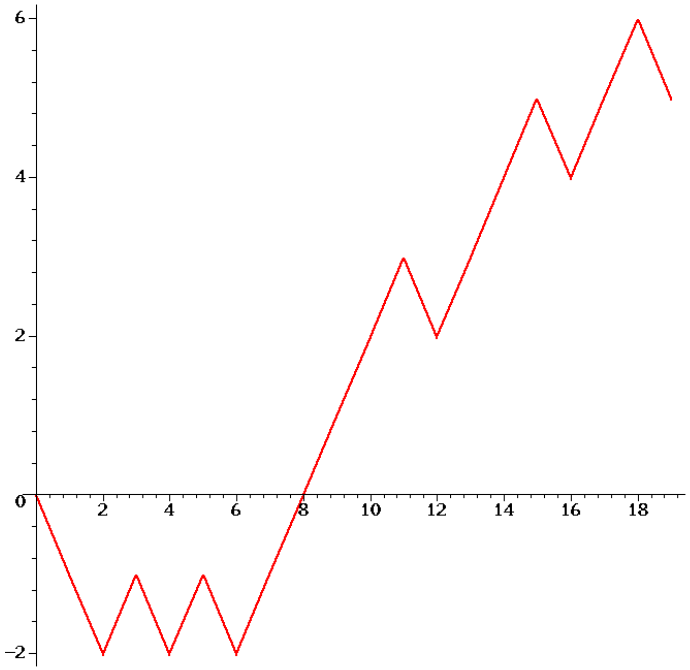
Le joueur joue à pile ou face.
Il gagne 1€ avec probabilité 1/2
et en perd 1 avec probabilité 1/2



Jeu de pile ou face : la fortune du joueur

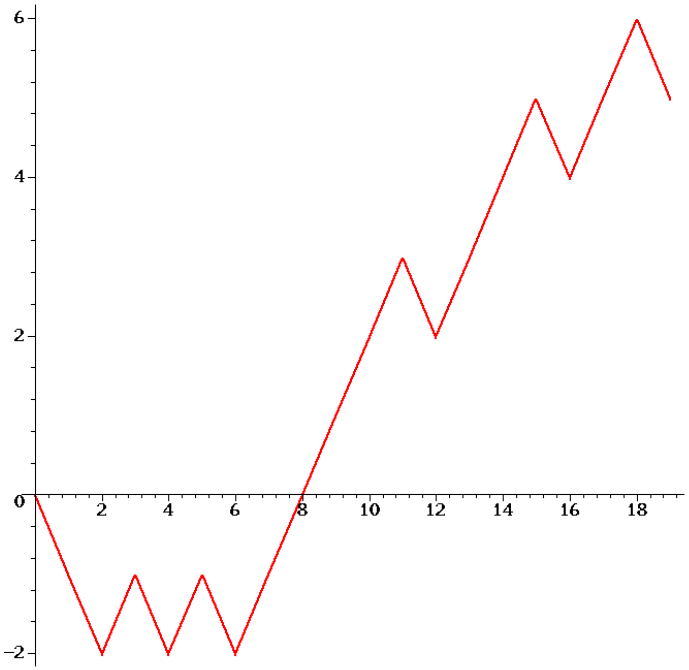
Le joueur joue à pile ou face.
Il gagne 1€ avec probabilité 1/2
et en perd 1 avec probabilité 1/2

X_i : gain (ou perte) au i-ème jeu



Jeu de pile ou face : la fortune du joueur

Le joueur joue à pile ou face.
Il gagne 1€ avec probabilité 1/2
et en perd 1 avec probabilité 1/2

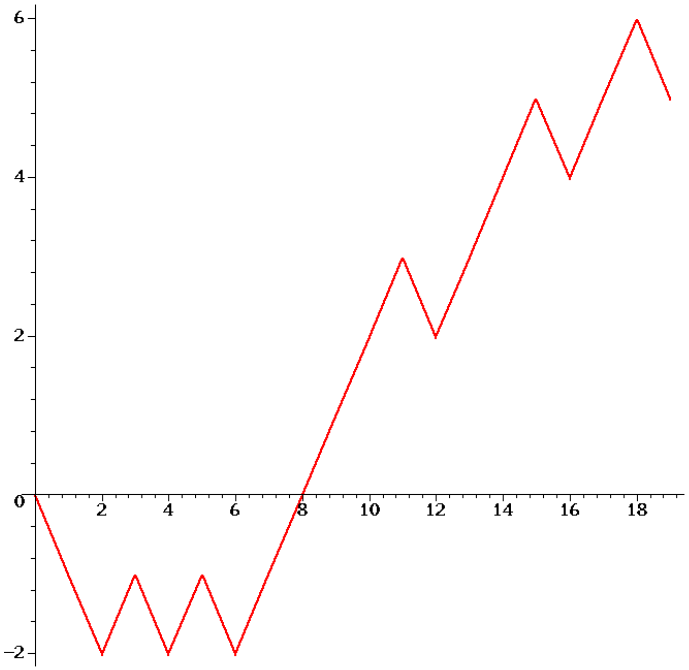


X_i : gain (ou perte) au i-ème jeu

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$: fortune du joueur

Jeu de pile ou face : la fortune du joueur

Le joueur joue à pile ou face.
Il gagne 1€ avec probabilité 1/2
et en perd 1 avec probabilité 1/2



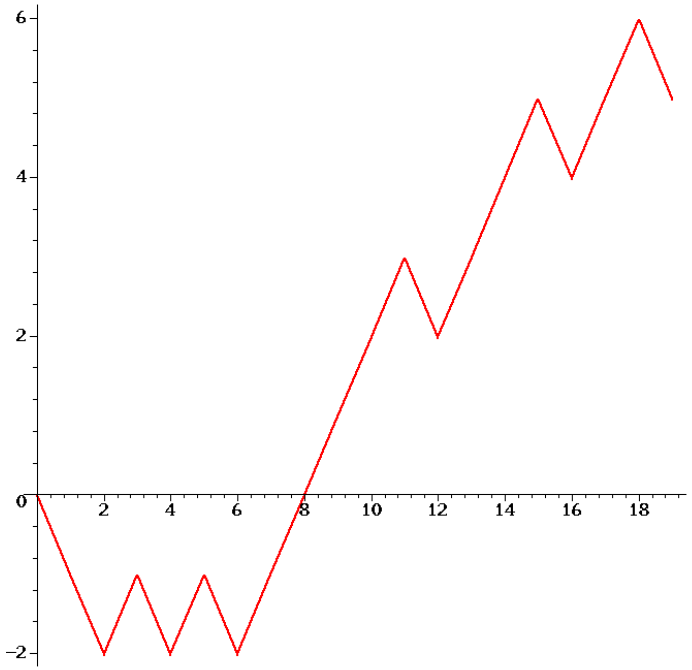
X_i : gain (ou perte) au i-ème jeu

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$: fortune du joueur

X_i = -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1,…

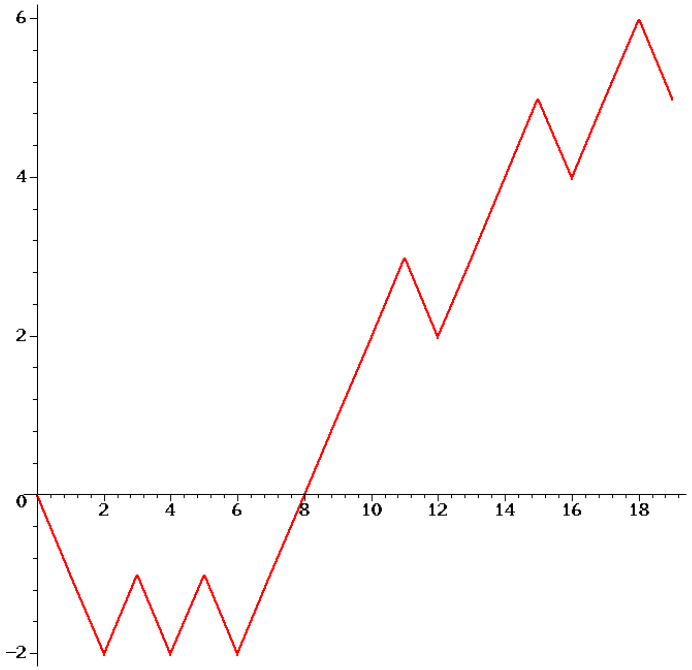
S_n = -1, -2, -1, -2, -1, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 2, 3,…

Le principe de renormalisation



Marche à 20 pas

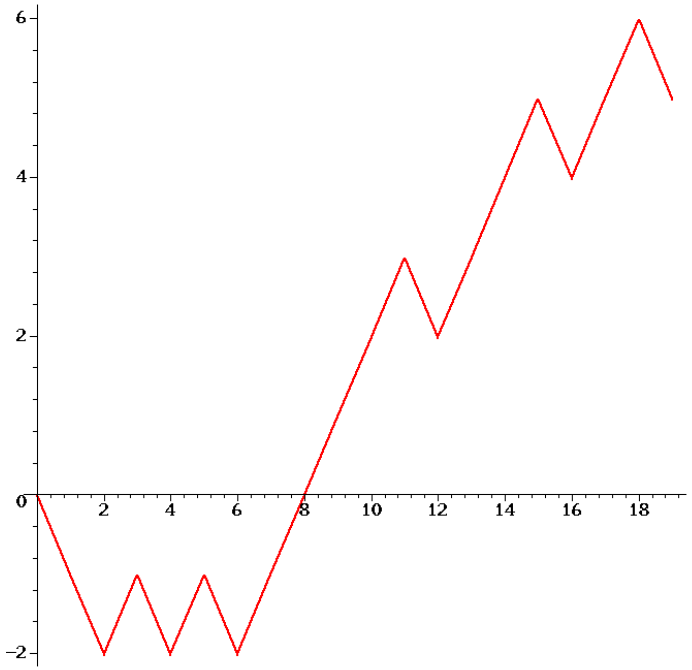
Le principe de renormalisation



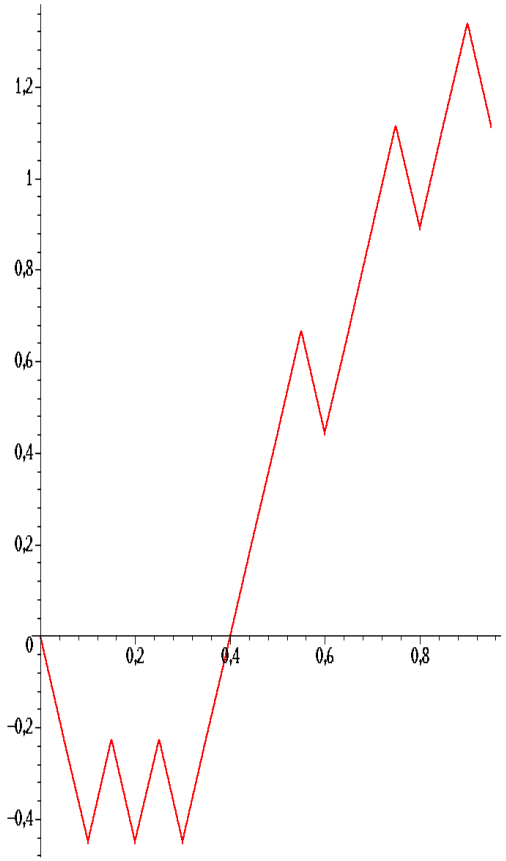
Marche à 20 pas

On renormalise
d'un facteur 20 en abscisse
et d'un facteur $\sqrt{20}$ en ordonnée

Le principe de renormalisation

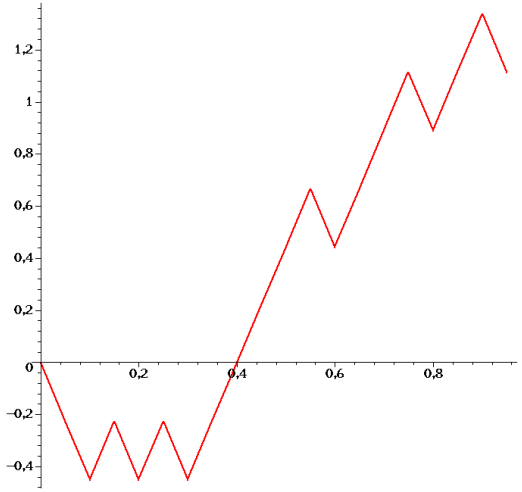


Marche à 20 pas

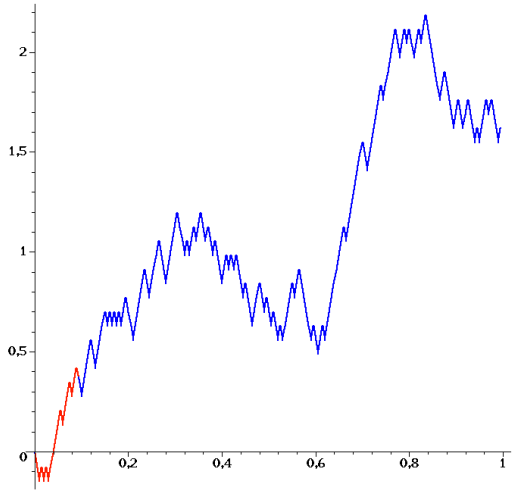


Marche à 20 pas renormalisée

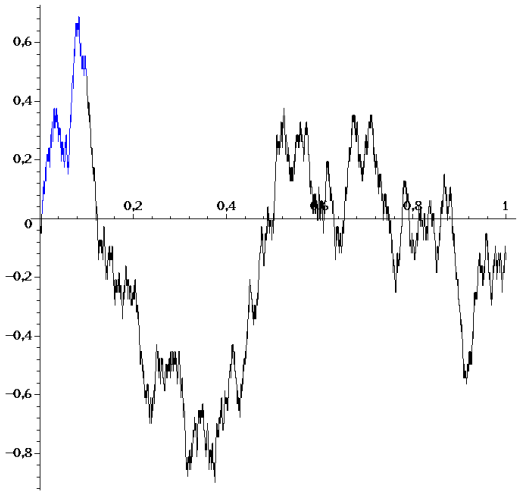
De la fortune du joueur au mouvement brownien



Marche à 20 pas renormalisée



Marche à 200 pas renormalisée



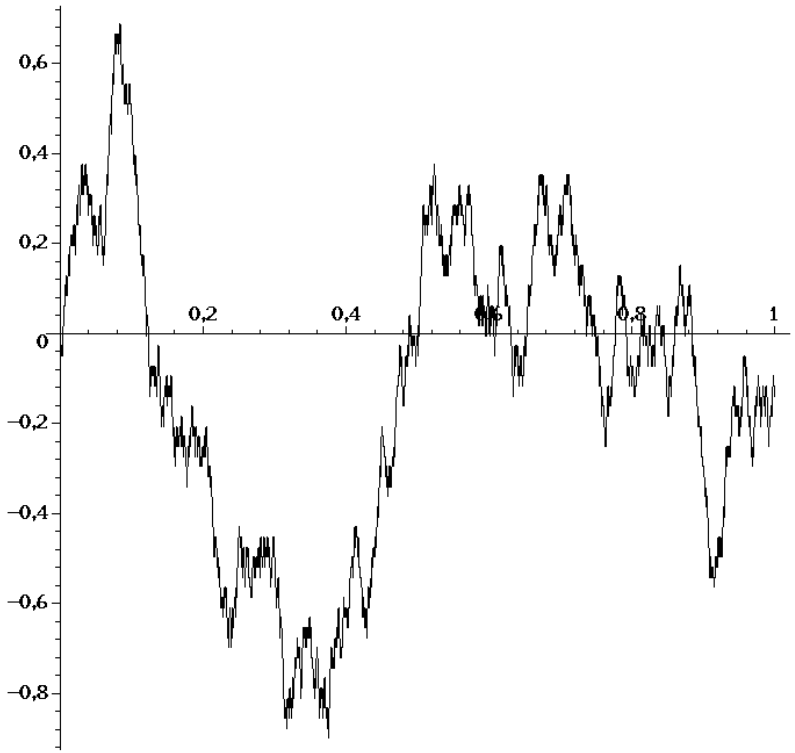
Marche à 2000 pas renormalisée

Le mouvement brownien

Statistiquement :

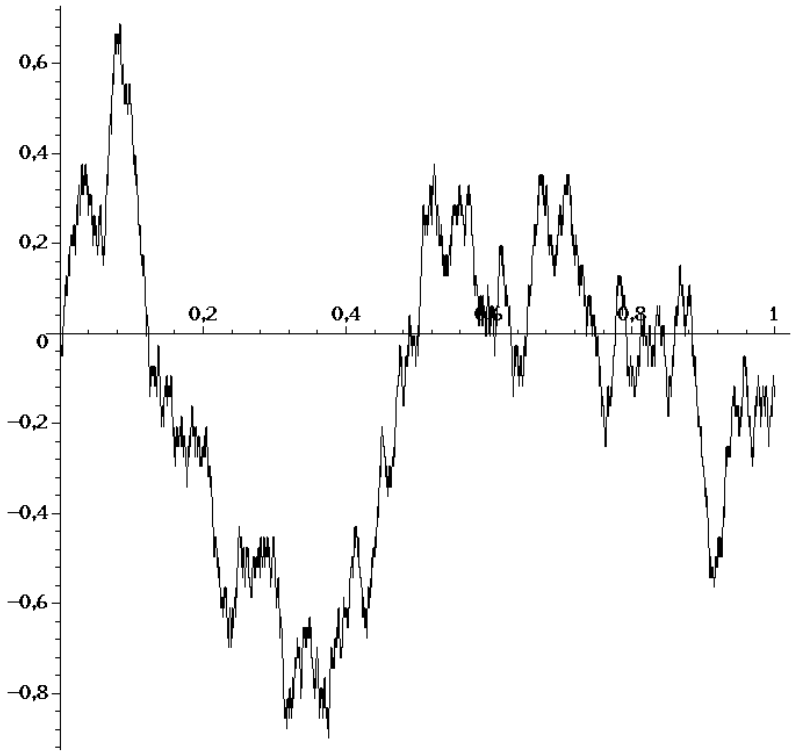
$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} B(nt)$$

$$B(t_0 + t) - B(t_0) = B(t)$$

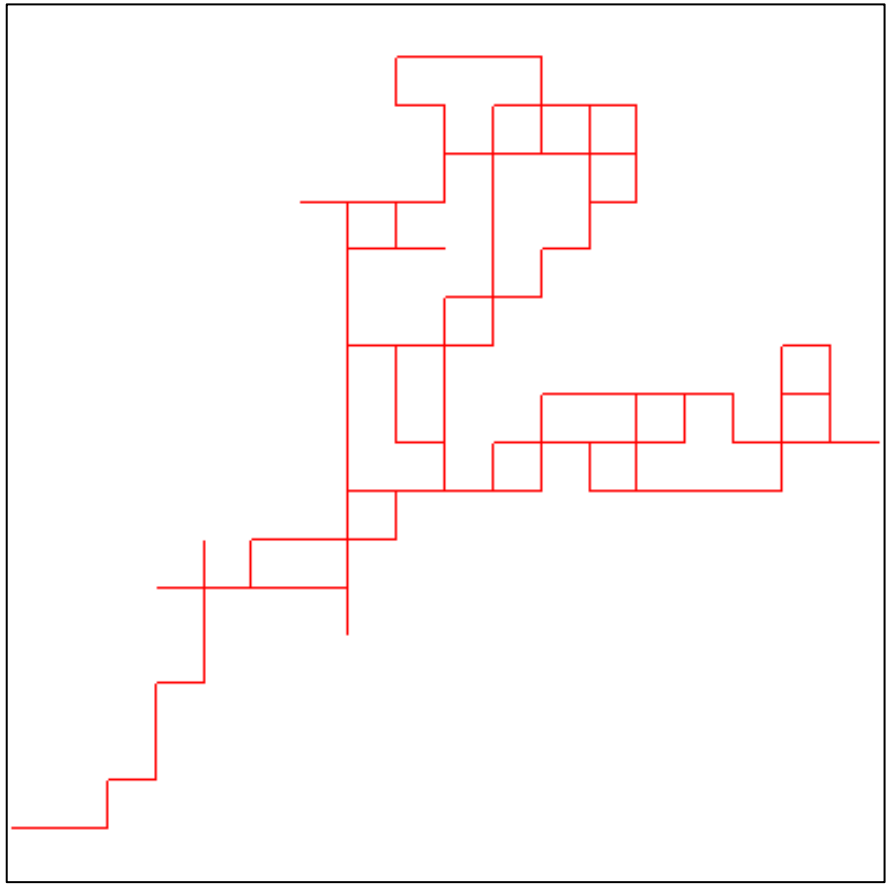


Le mouvement brownien

Robert Brown, 1773-1858

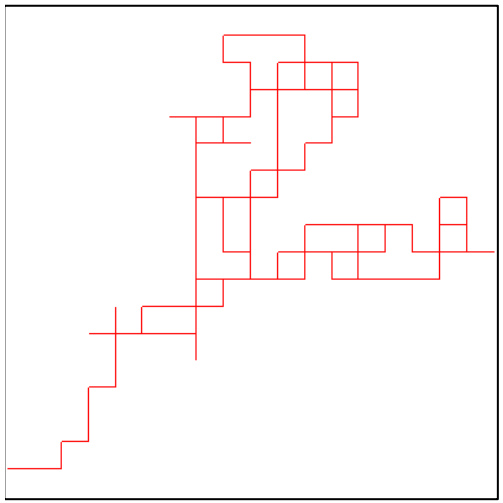


La marche aléatoire en dimension 2

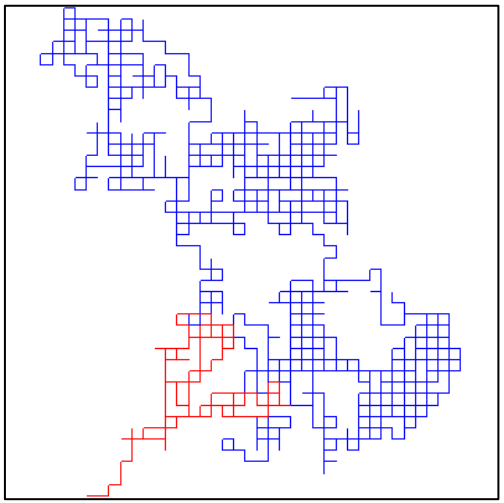


A chaque étape, le marcheur fait au hasard un pas vers le nord, vers l'est, vers le sud ou vers l'ouest

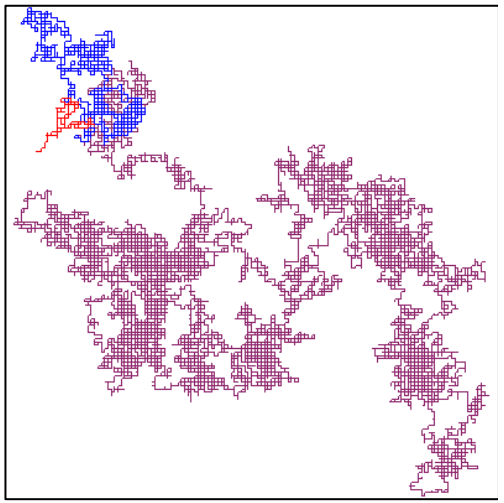
Vers le mouvement brownien en dimension 2



Marche à 200 pas



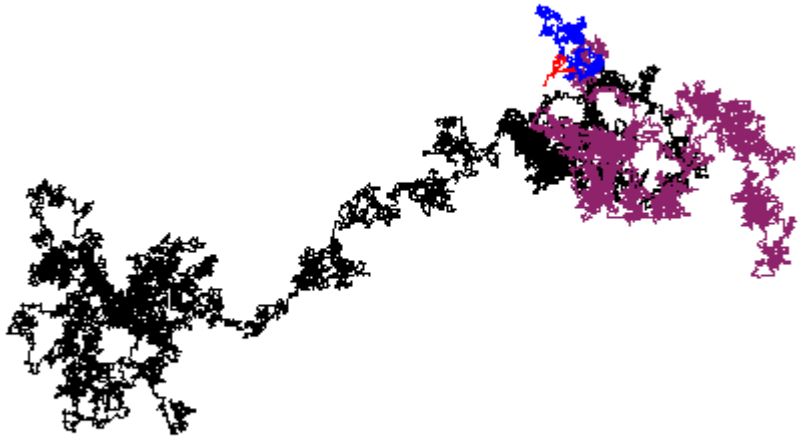
Marche à 2000 pas



Marche à 20000 pas

A chaque étape, on accélère le mouvement d'un facteur n et on contracte la trajectoire d'un facteur $\sqrt{n}$

Une trajectoire brownienne en dimension 2

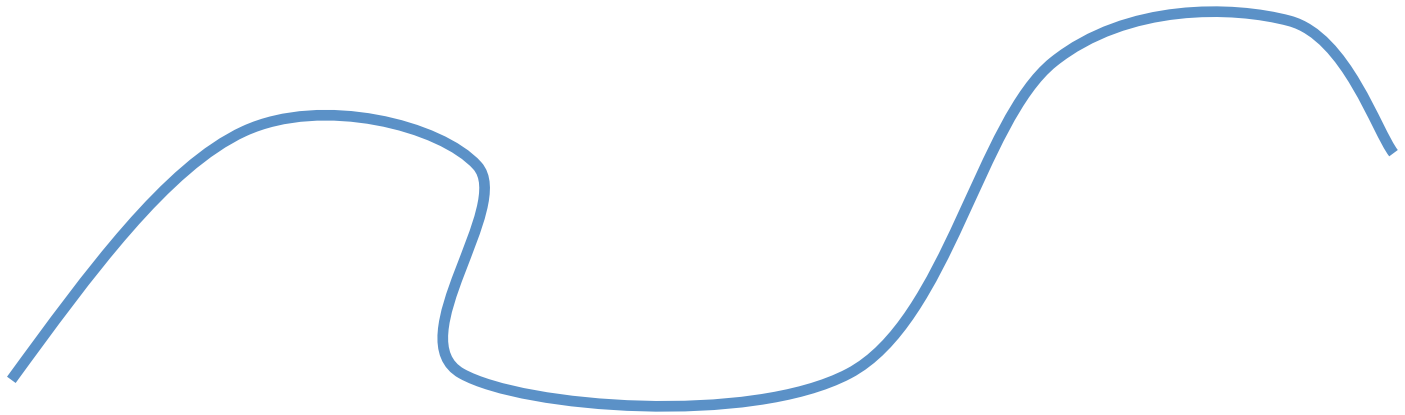


Statistiquement : $$B(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} B(nt)$$

Autosimilarité approchée

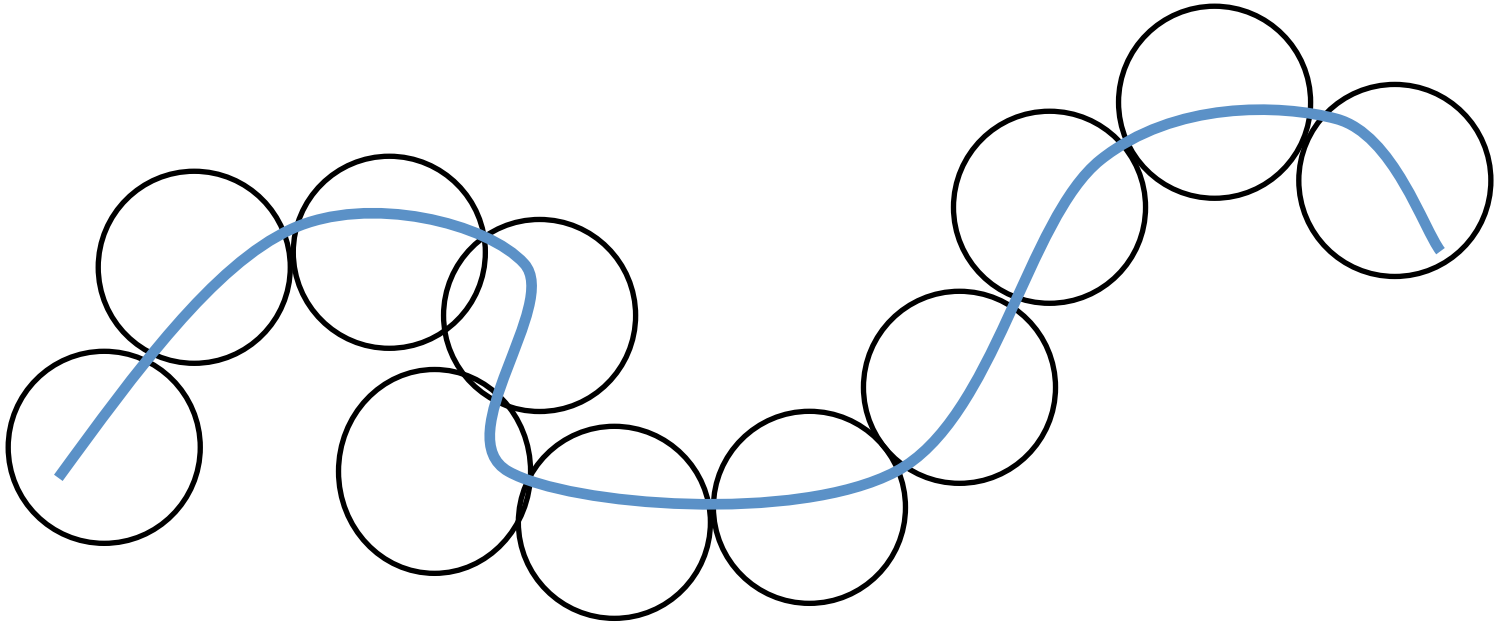
Un outil d'analyse : la dimension

N(a) = nombre de disques de rayon a nécessaires pour recouvrir la courbe



Un outil d'analyse : la dimension

N(a) = nombre de disques de rayon a nécessaires pour recouvrir la courbe

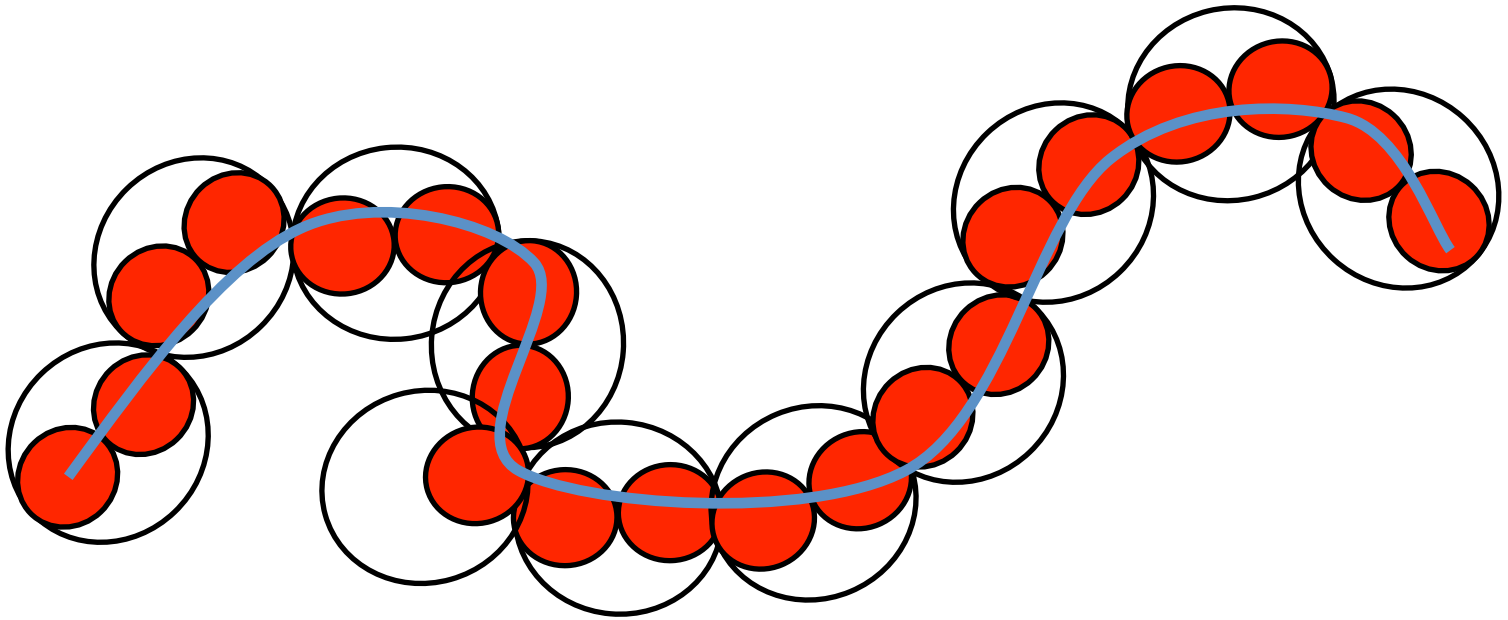


On recouvre la courbe par des disques de rayon a

$$L \approx N(a) \times a$$

Un outil d'analyse : la dimension

N(a) = nombre de disques de rayon a nécessaires pour recouvrir la courbe

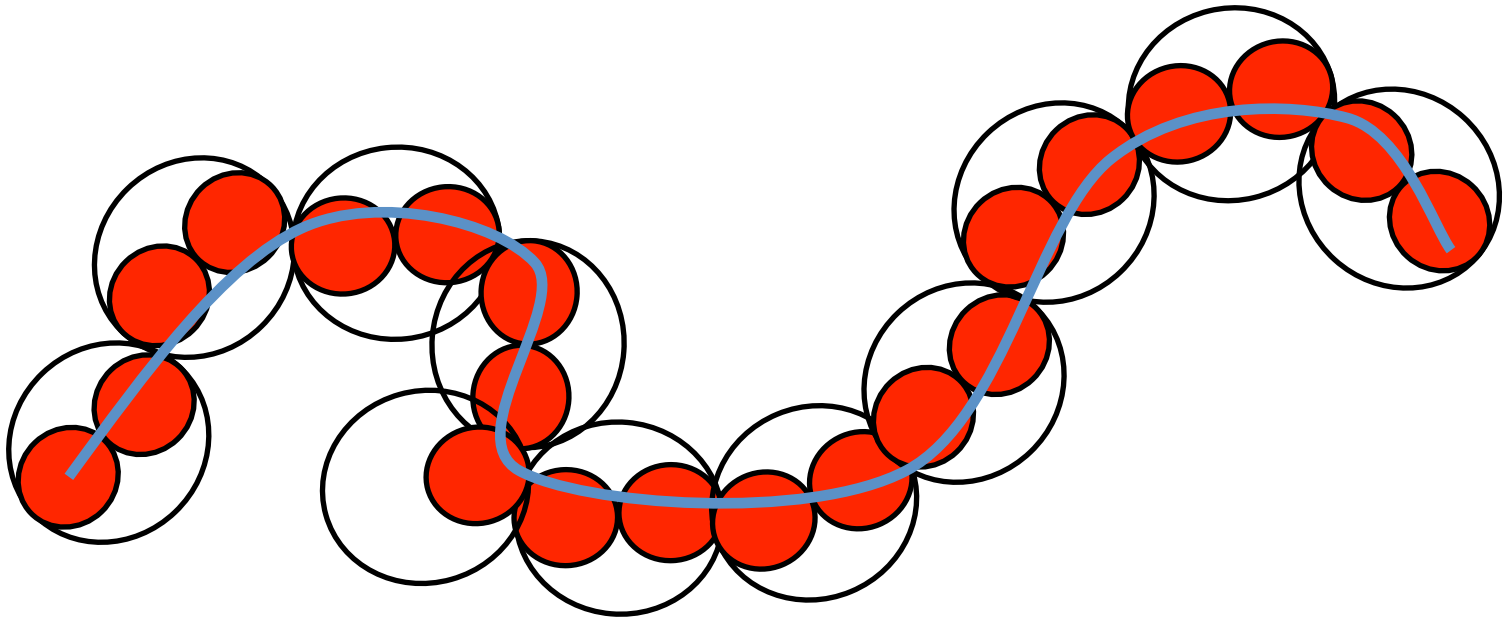


On recouvre la courbe par des disques de rayon a/2

$$L \approx N(a/2) \times a/2$$

Un outil d'analyse : la dimension

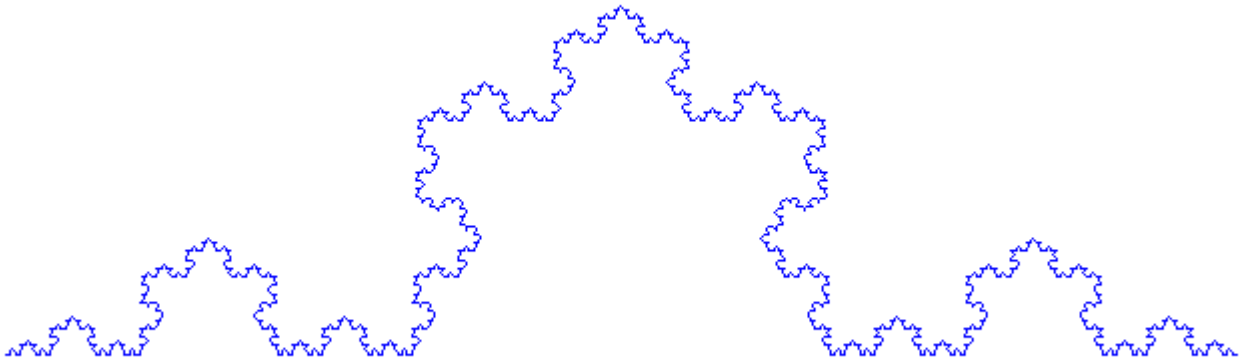
N(a) = nombre de disques de rayon a nécessaires pour recouvrir la courbe



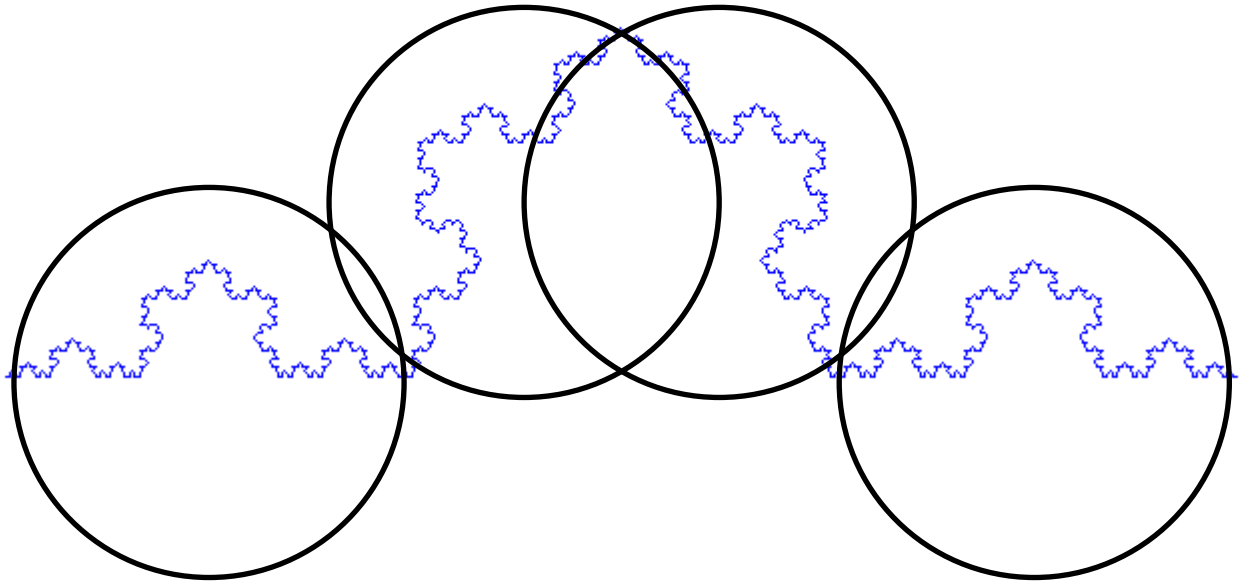
$$N(a) \times a^1 \approx N(a/2) \times (a/2)^1 \approx N(r) \times r^1$$

La dimension de la courbe vaut 1

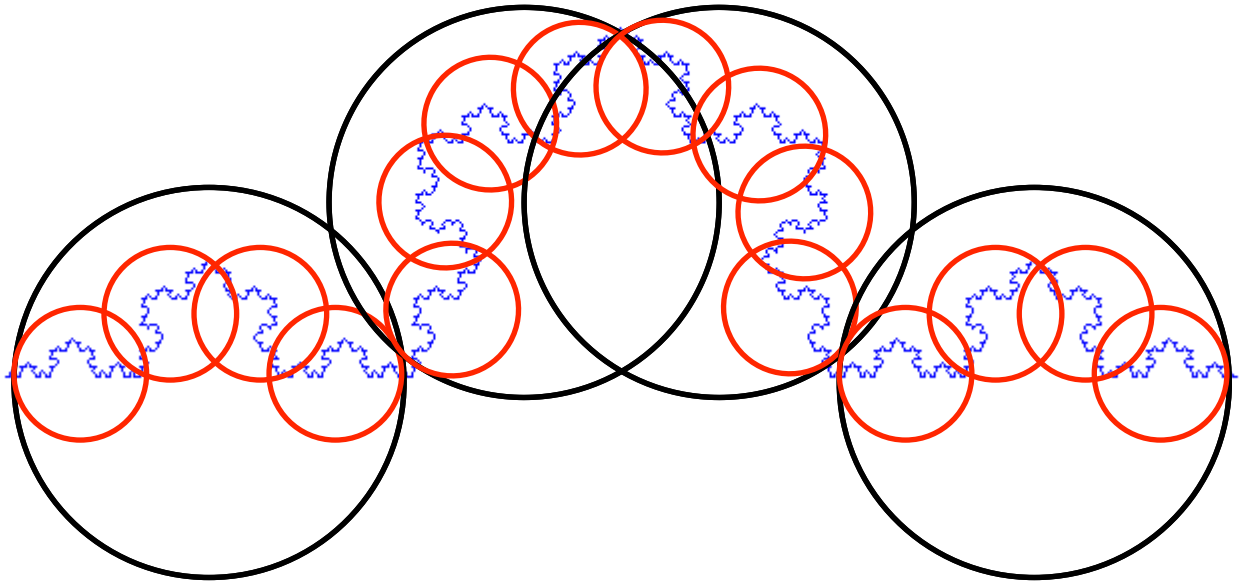
La courbe de Von Koch



La courbe de Von Koch

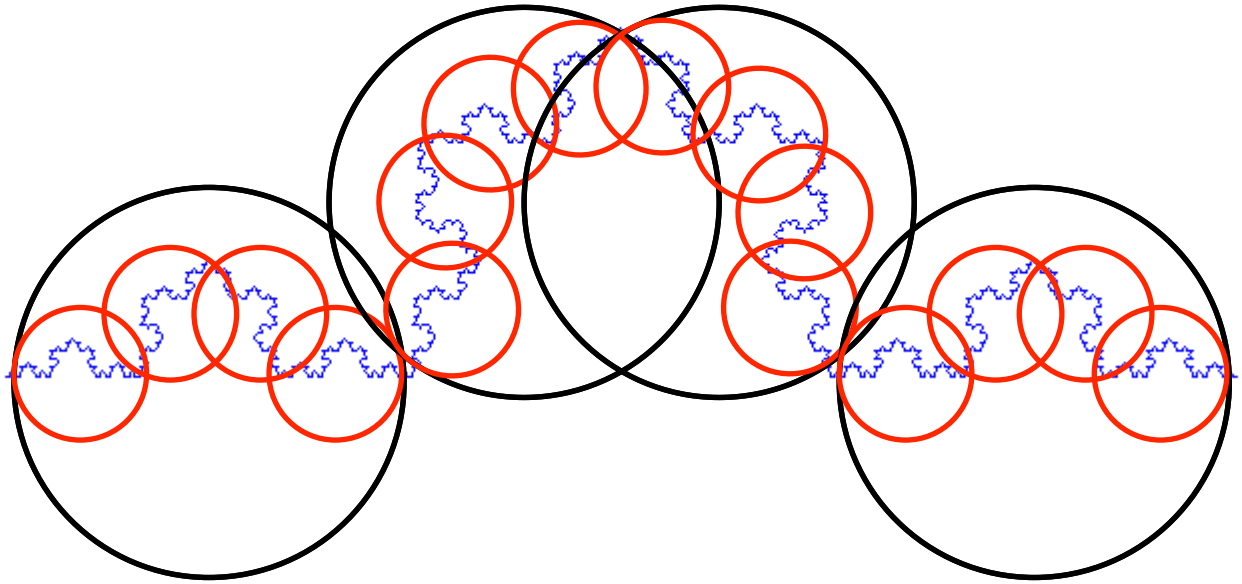


La courbe de Von Koch



$$N(a/3) = 4 \times N(a)$$

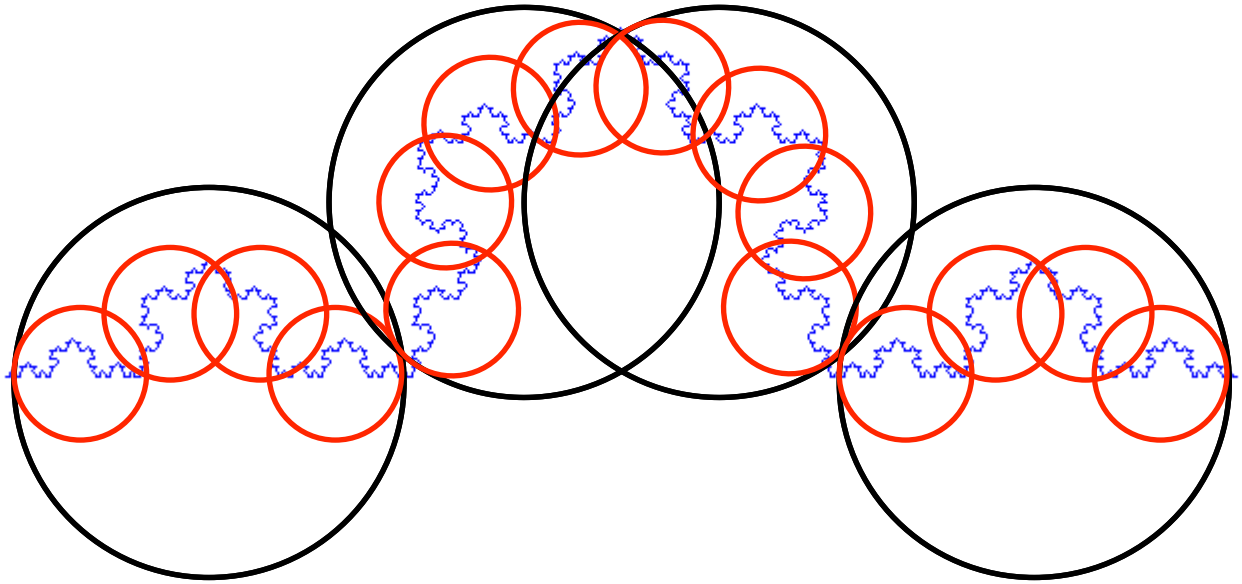
La courbe de Von Koch



$N(a/3) = 4 \times N(a)$

$N(a/3^n) = 4^n \times N(a)$

La courbe de Von Koch



$N(a/3) = 4 \times N(a)$ $\qquad$ $N(a/3^n) = 4^n \times N(a)$

$N(r) \times r^d = 1$ si $r = 3^{-n}$ et $d = \log_3(4)$

La dimension de la courbe vaut $d = \log_3(4) \approx 1{,}26$

Définition de la dimension

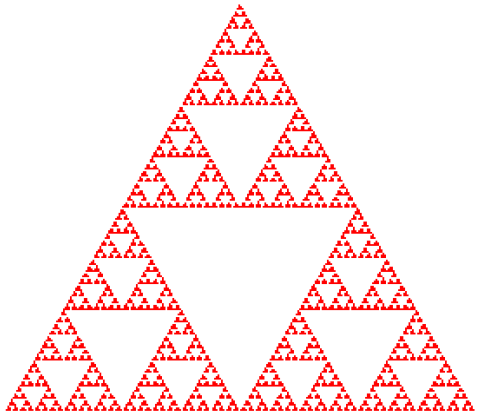
La dimension d'un ensemble K est définie par

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log (N(r))}{-\log(r)}$$

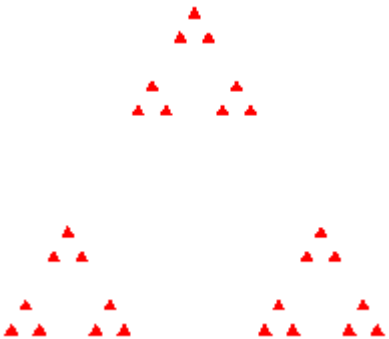
où N(r) est le nombre de boules de rayon r nécessaires pour recouvrir K

Quelques exemples

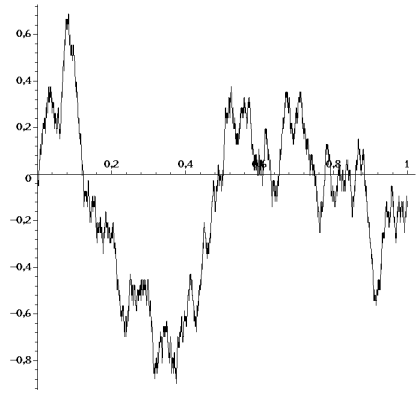
$d = \log_3(4)$



$d = \log_2(3)$



d = 1



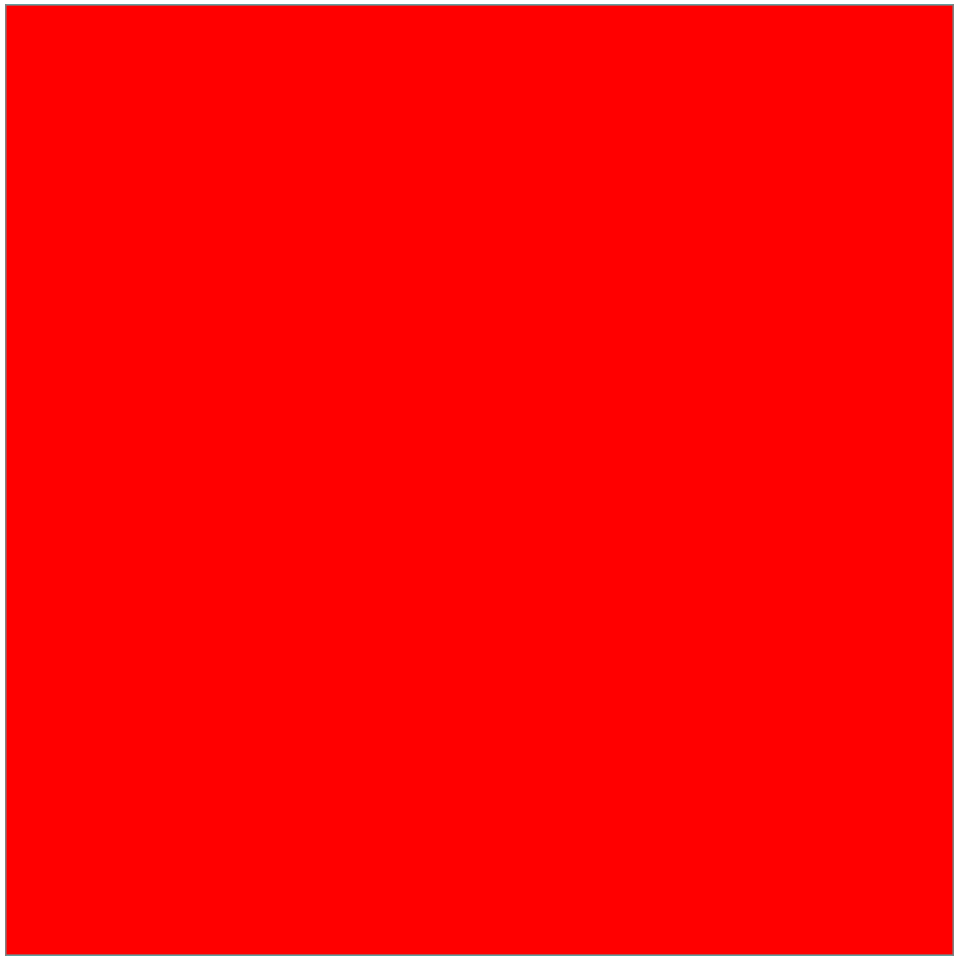
d = 3/2

Et le dimension de la côte bretonne ?

$d \approx 1{,}2$

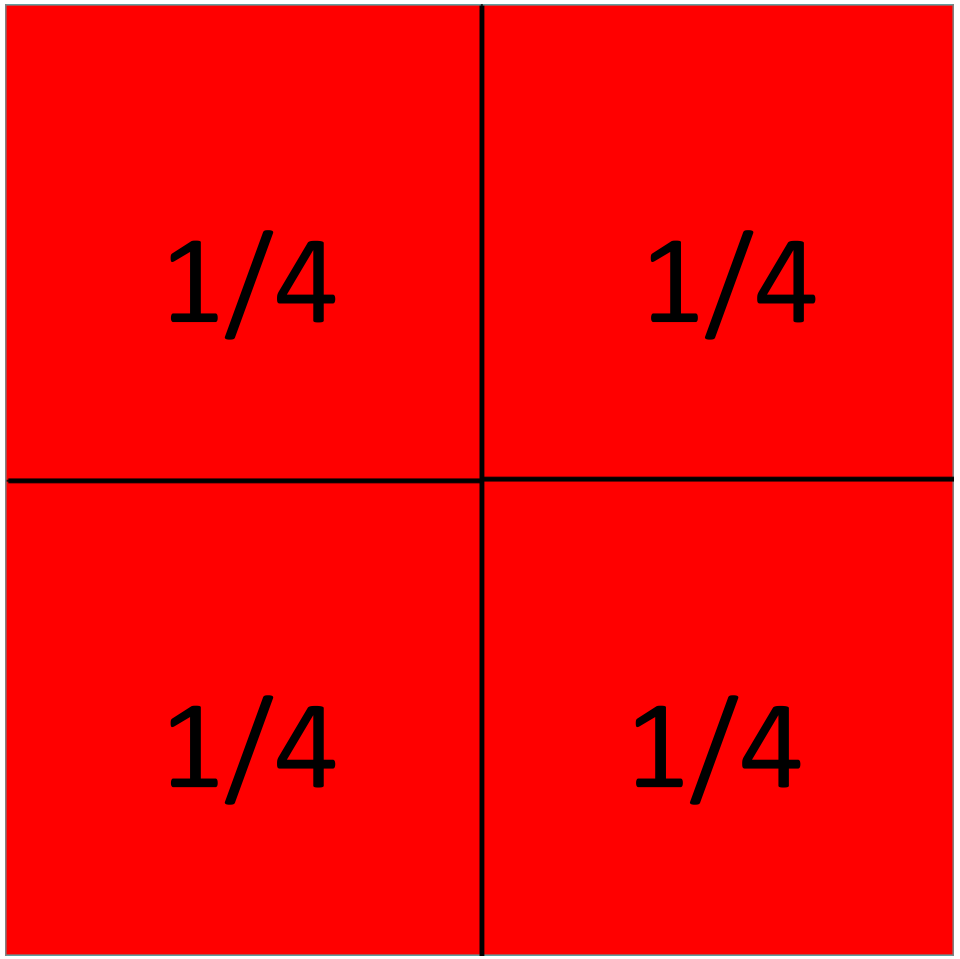
Au-delà des ensembles, les mesures

un exemple : la mesure de surface



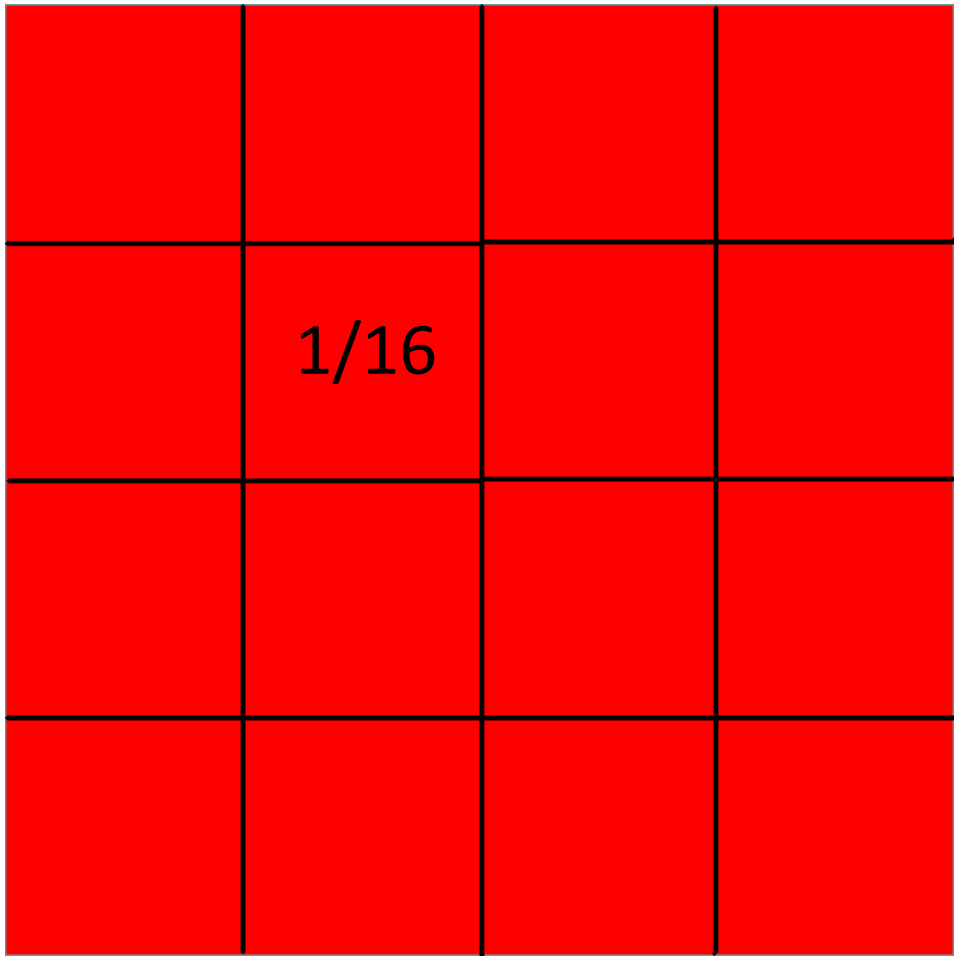
Au-delà des ensembles, les mesures

un exemple : la mesure de surface



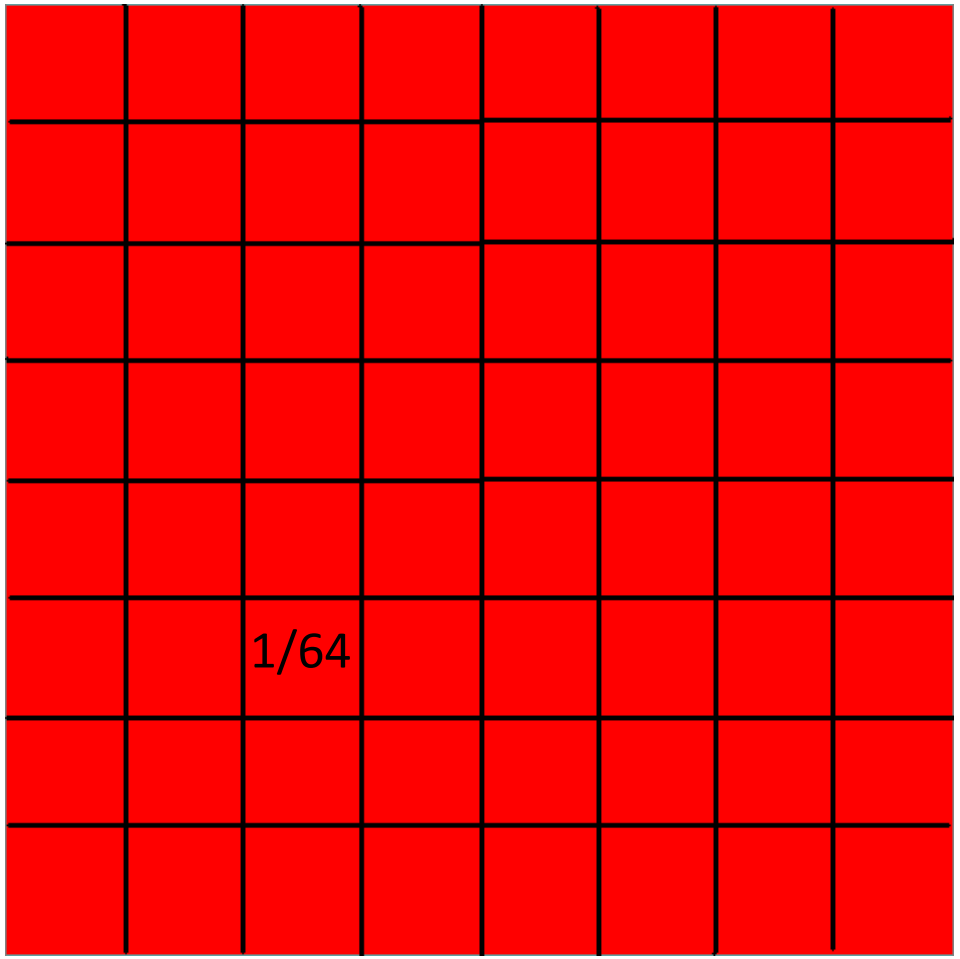
Au-delà des ensembles, les mesures

un exemple : la mesure de surface



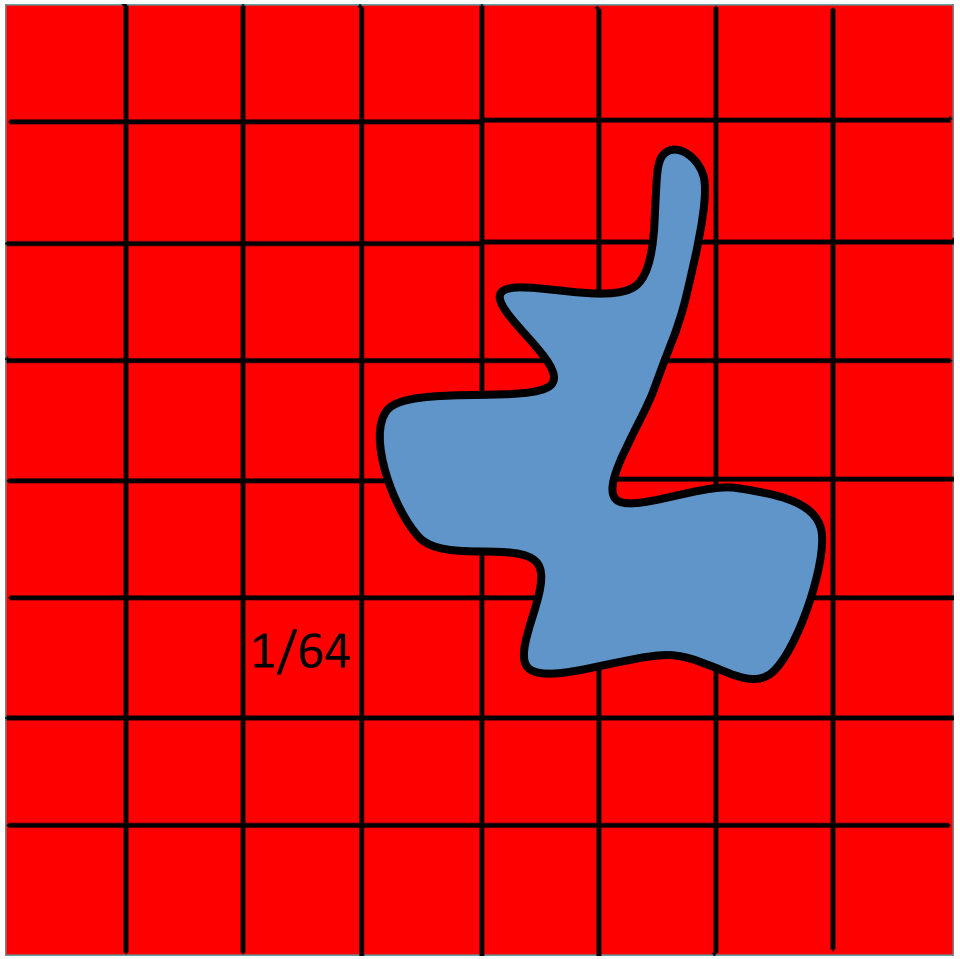
Au-delà des ensembles, les mesures

un exemple : la mesure de surface



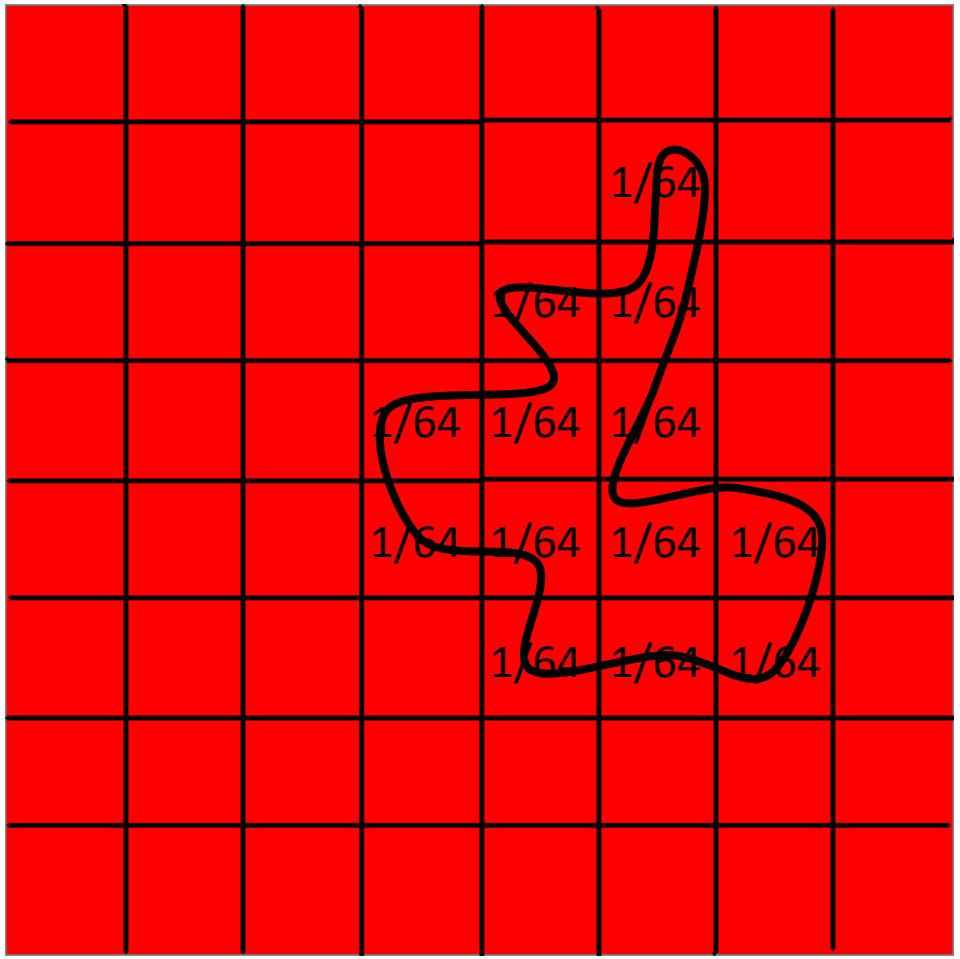
Au-delà des ensembles, les mesures

un exemple : la mesure de surface



Au-delà des ensembles, les mesures

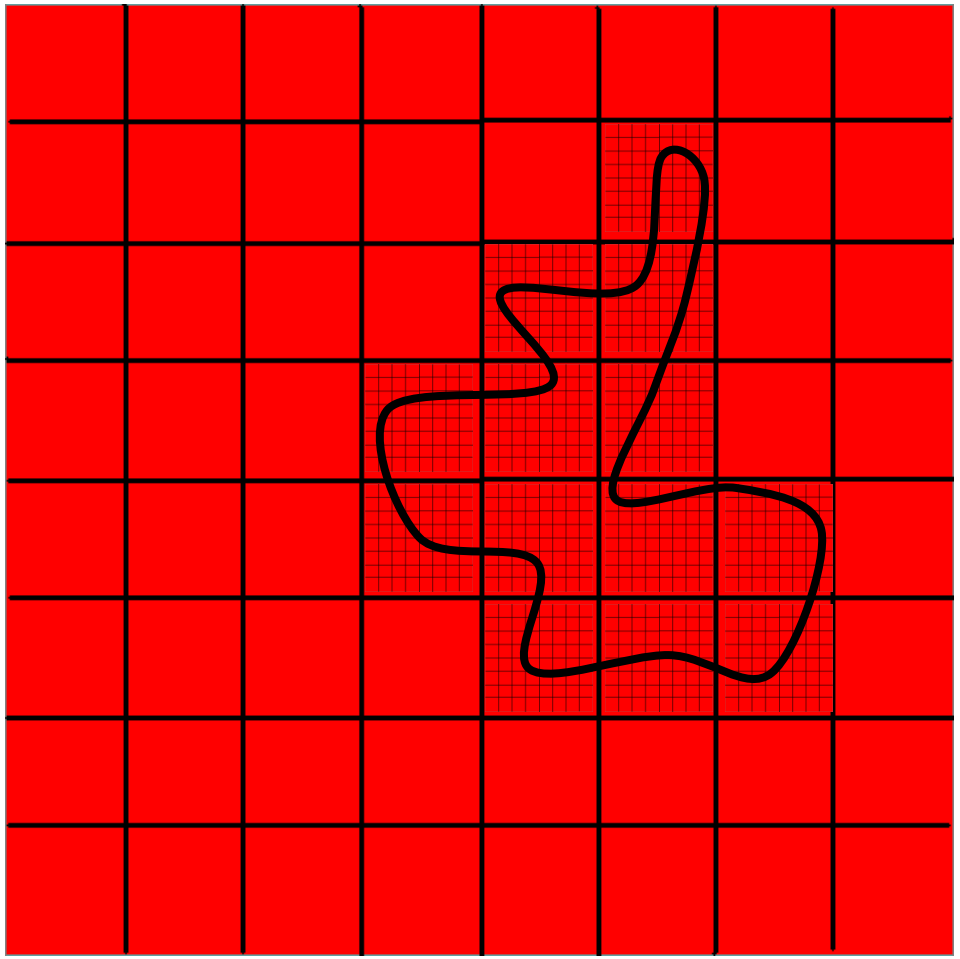
un exemple : la mesure de surface



$m_3(K)=13x1/64=0,203125$

Au-delà des ensembles, les mesures

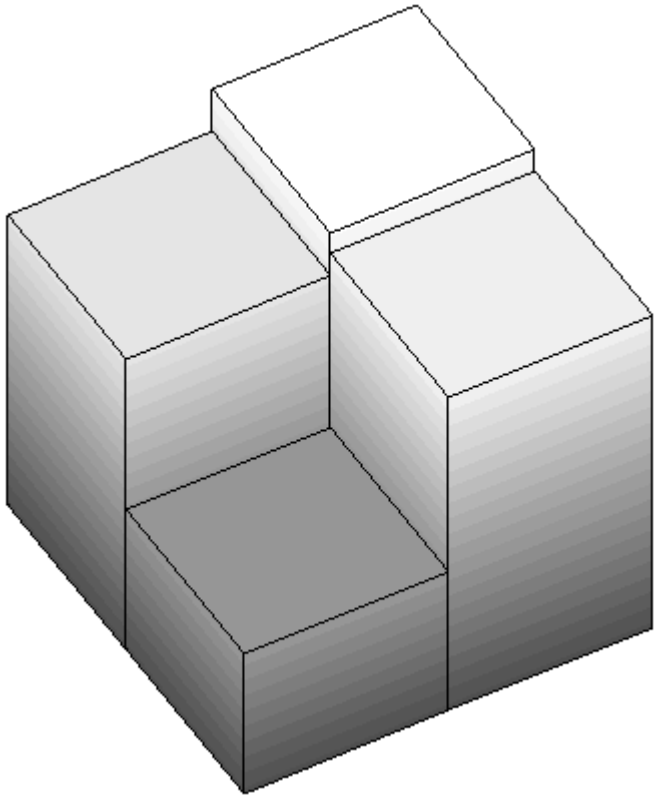
un exemple : la mesure de surface



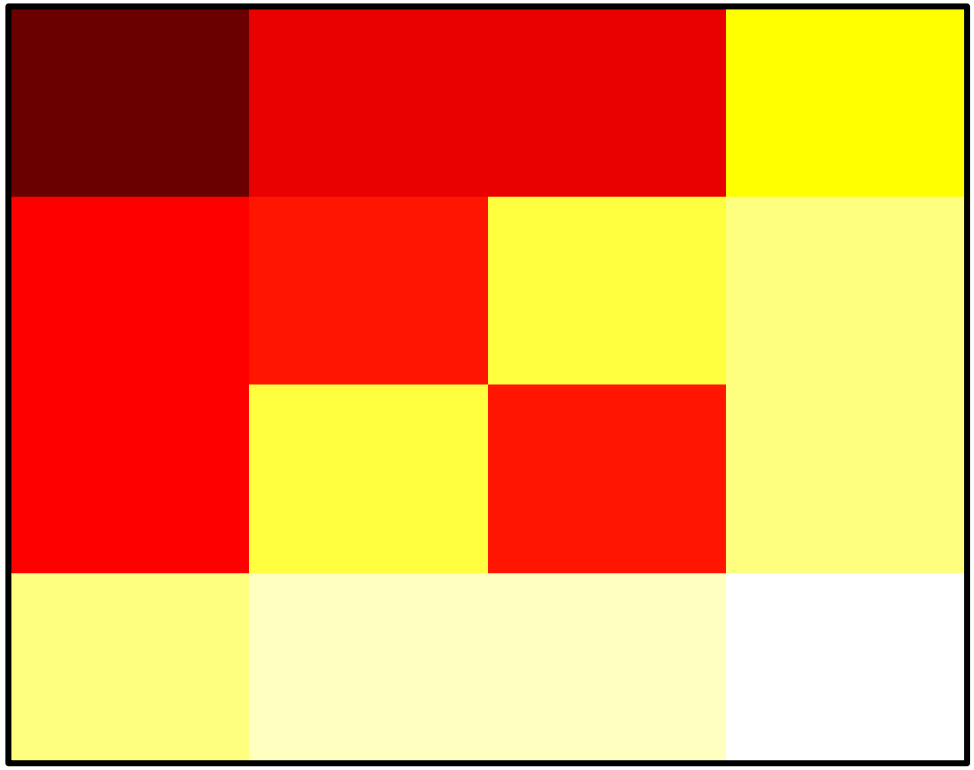
$m_1(K), m_2(K), m_3(K), \ldots, m_6(K), \ldots, m_n(K), \ldots$

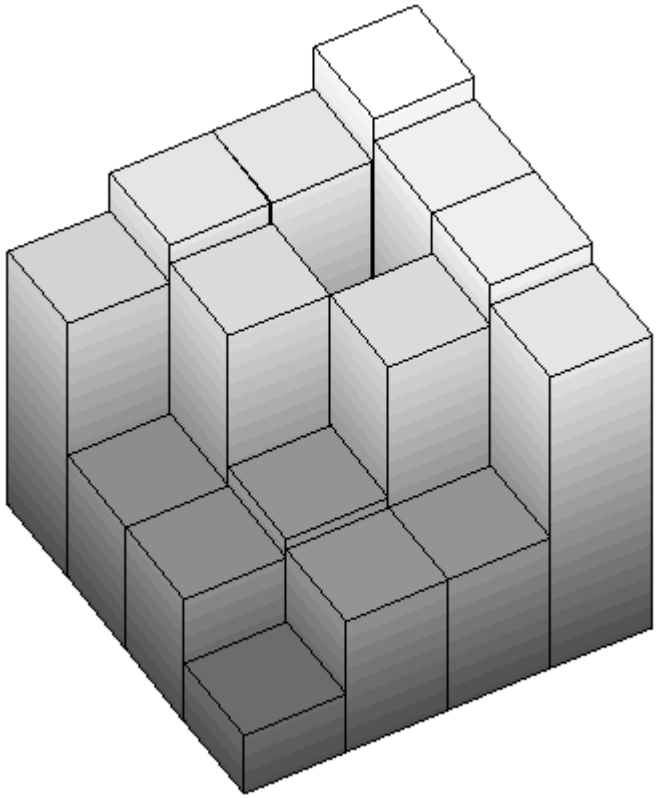
Mesures autosimilaires

0,31	0,29
0,27	0,13

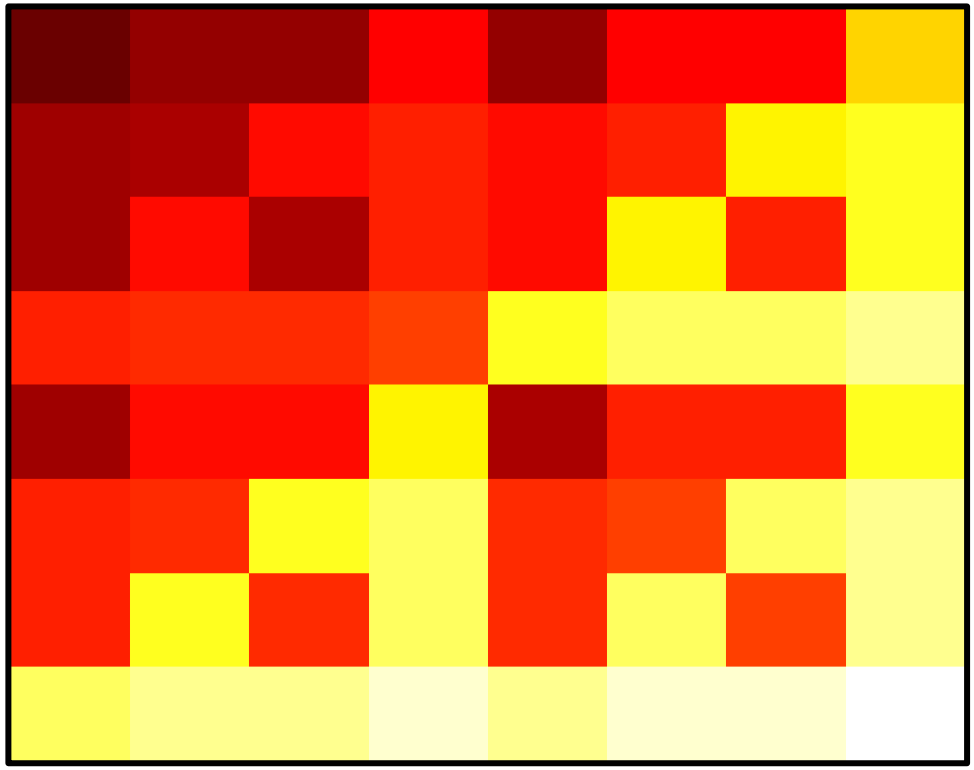


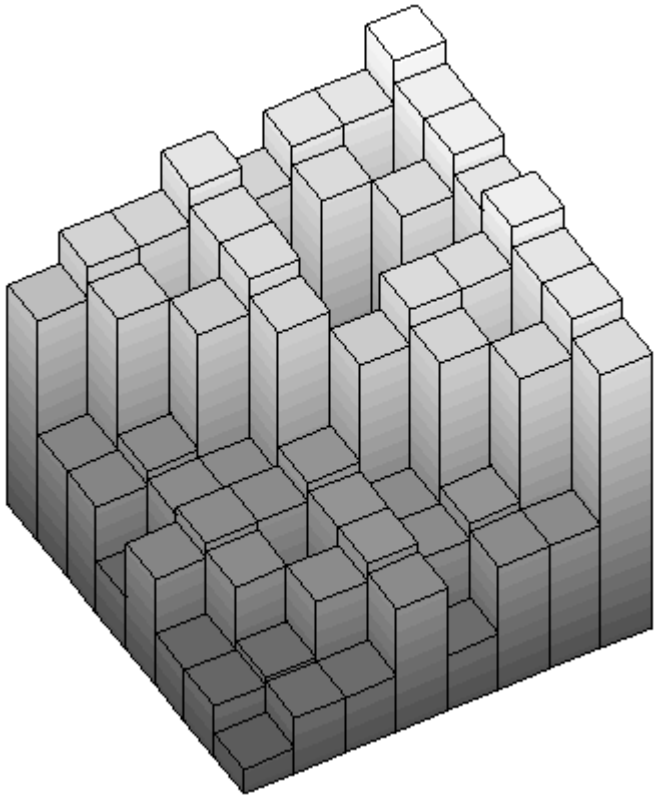
Mesures autosimilaires



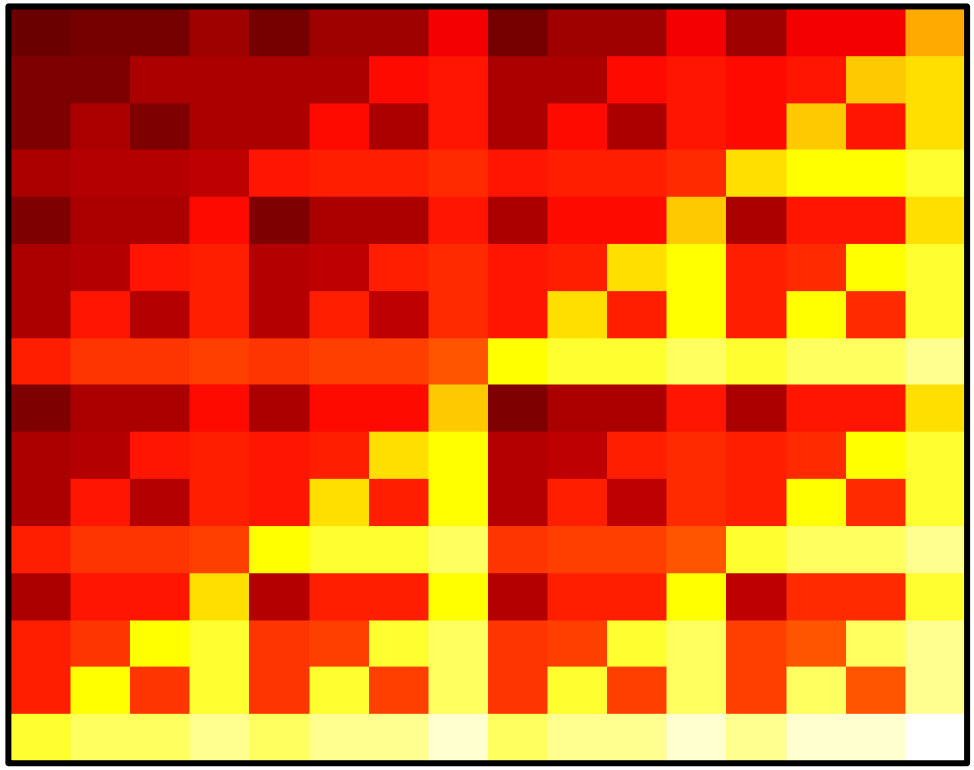


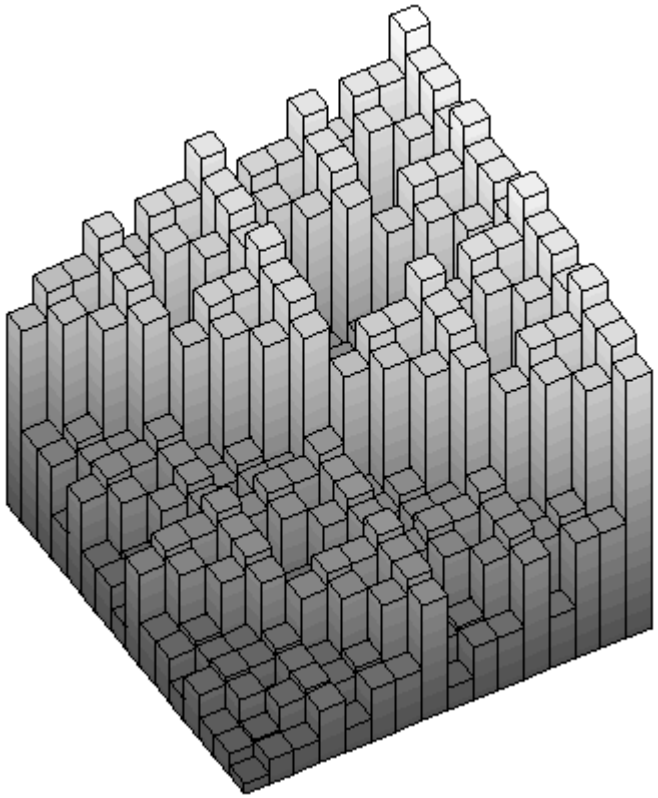
Mesures autosimilaires



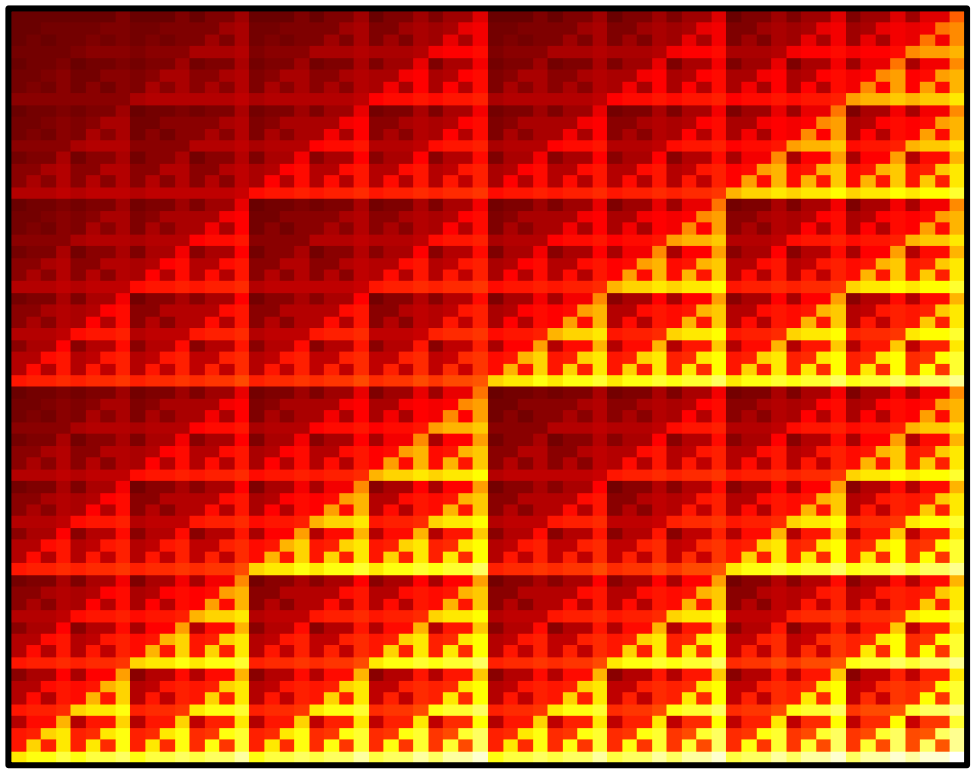


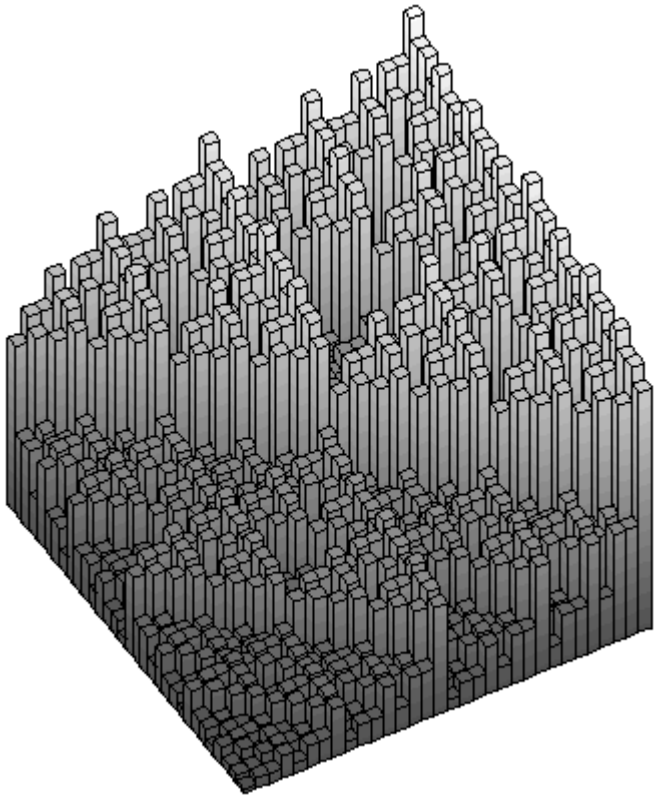
Mesures autosimilaires



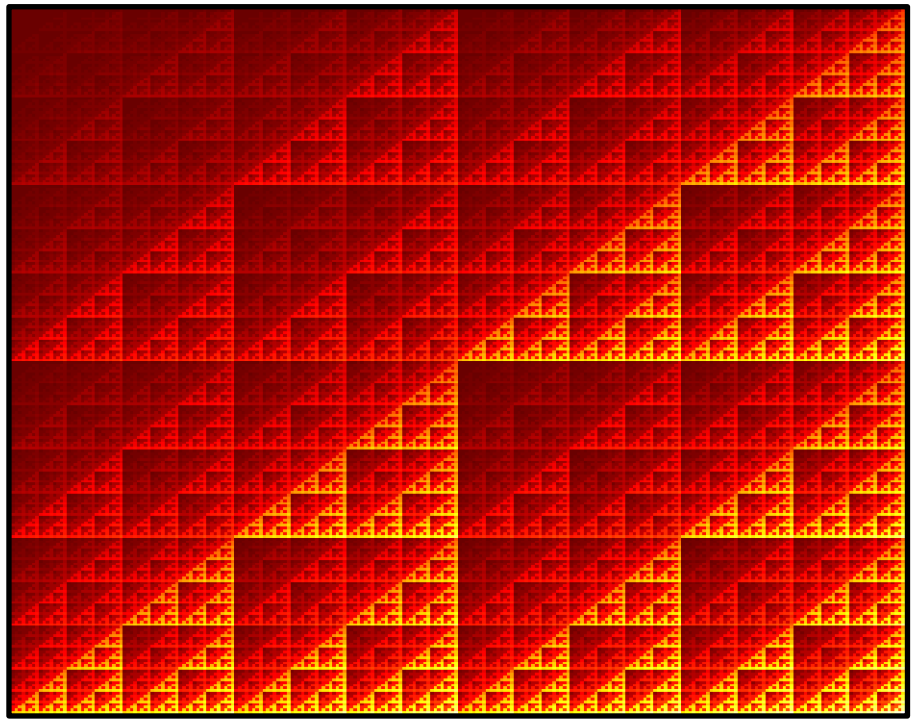


Mesures autosimilaires





Mesures autosimilaires



$m = 0{,}31m_1 + 0{,}29m_2 + 0{,}27m_3 + 0{,}13m_4$

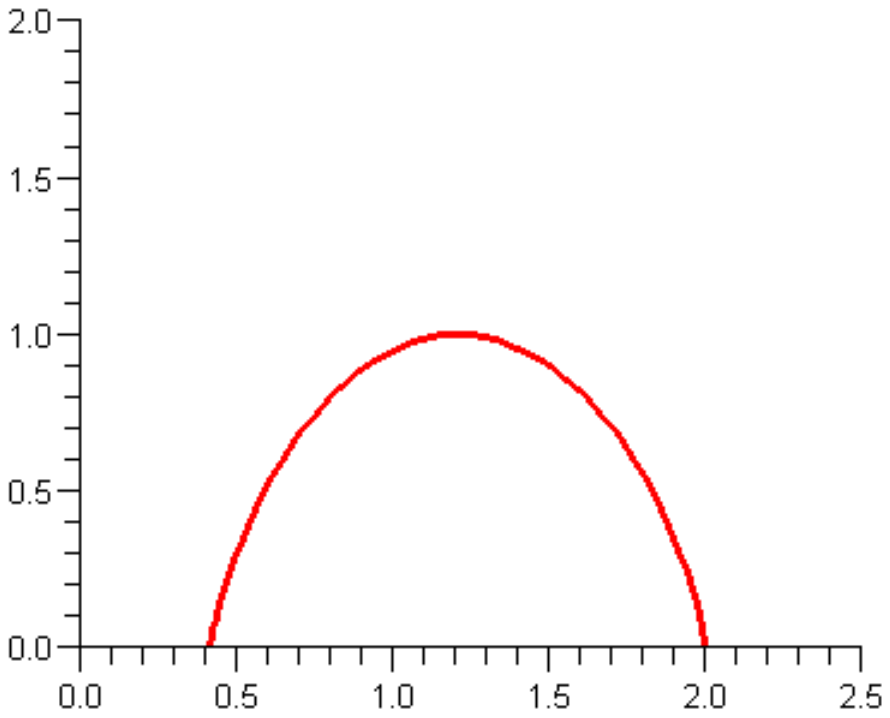
où m_1, m_2, m_3, m_4 sont semblables à m

Mesure multifractale : un aperçu

$$E_a = \{ x \text{ tels que } m(B(x,r)) \approx r^a \}$$

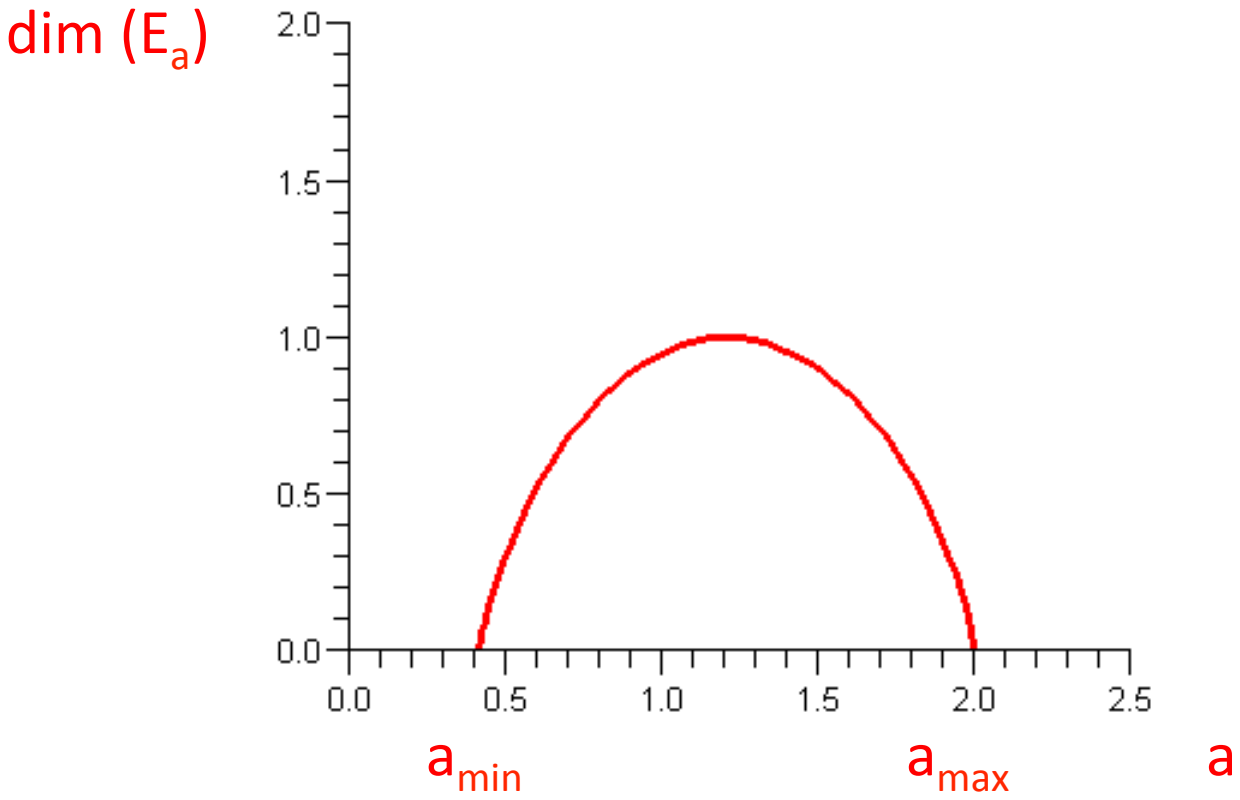
Mesure multifractale : un aperçu

dim (E_a)



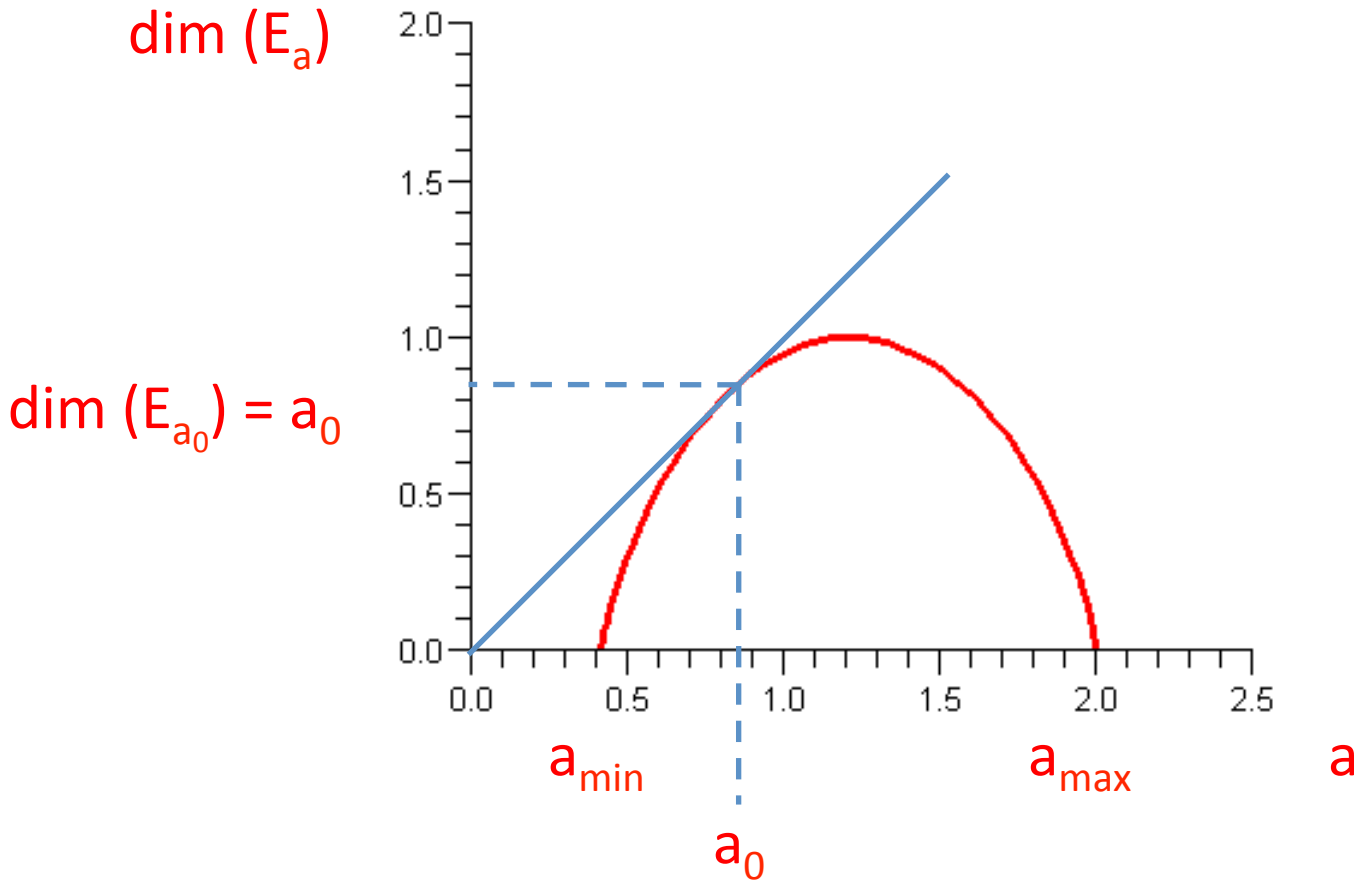
$$E_a = \{\, x \text{ tels que } m(B(x,r)) \approx r^a \,\}$$

Mesure multifractale : un aperçu



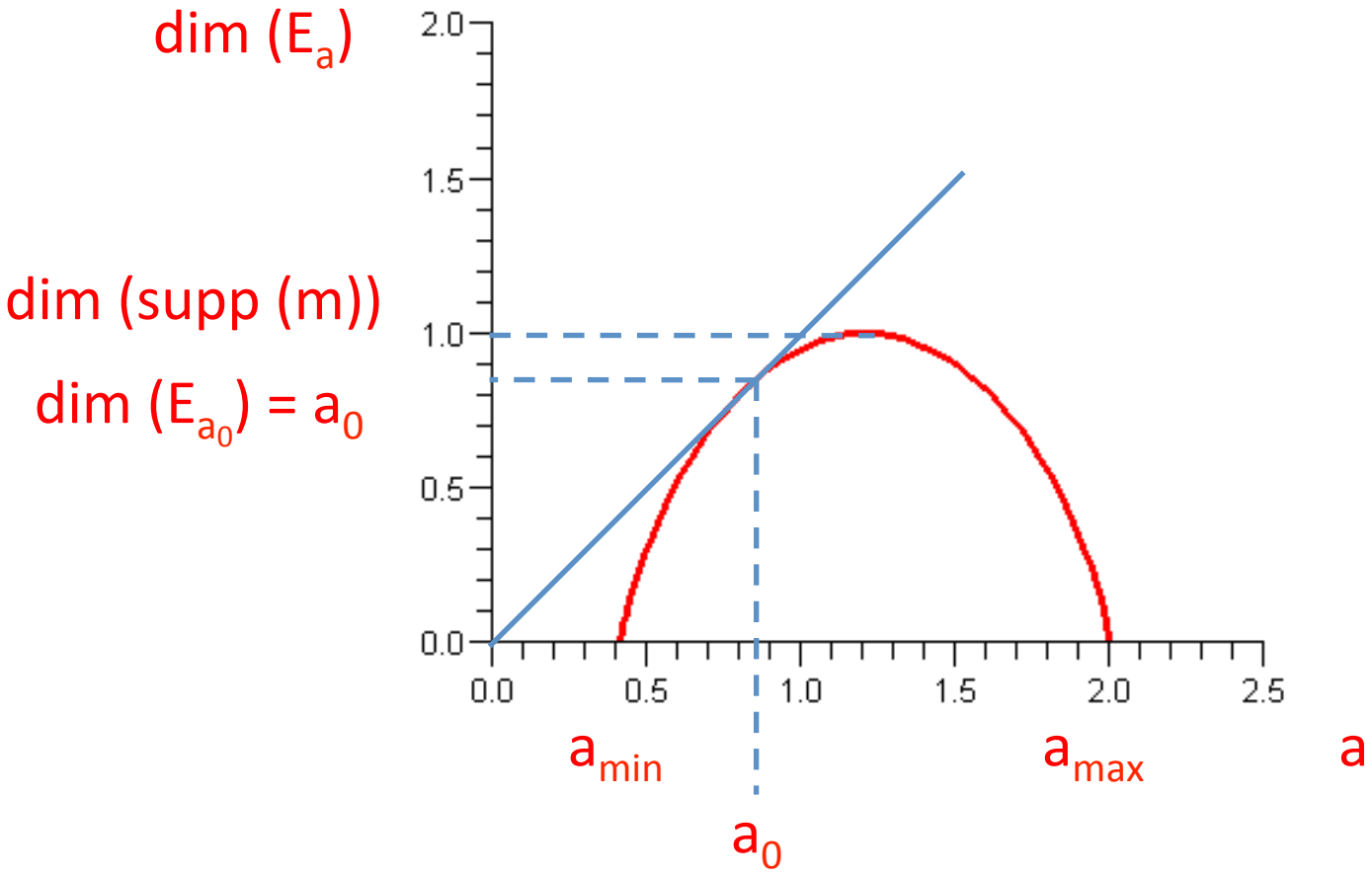
$$E_a = \{ x \text{ tels que } m(B(x,r)) \approx r^a \}$$

Mesure multifractale : un aperçu



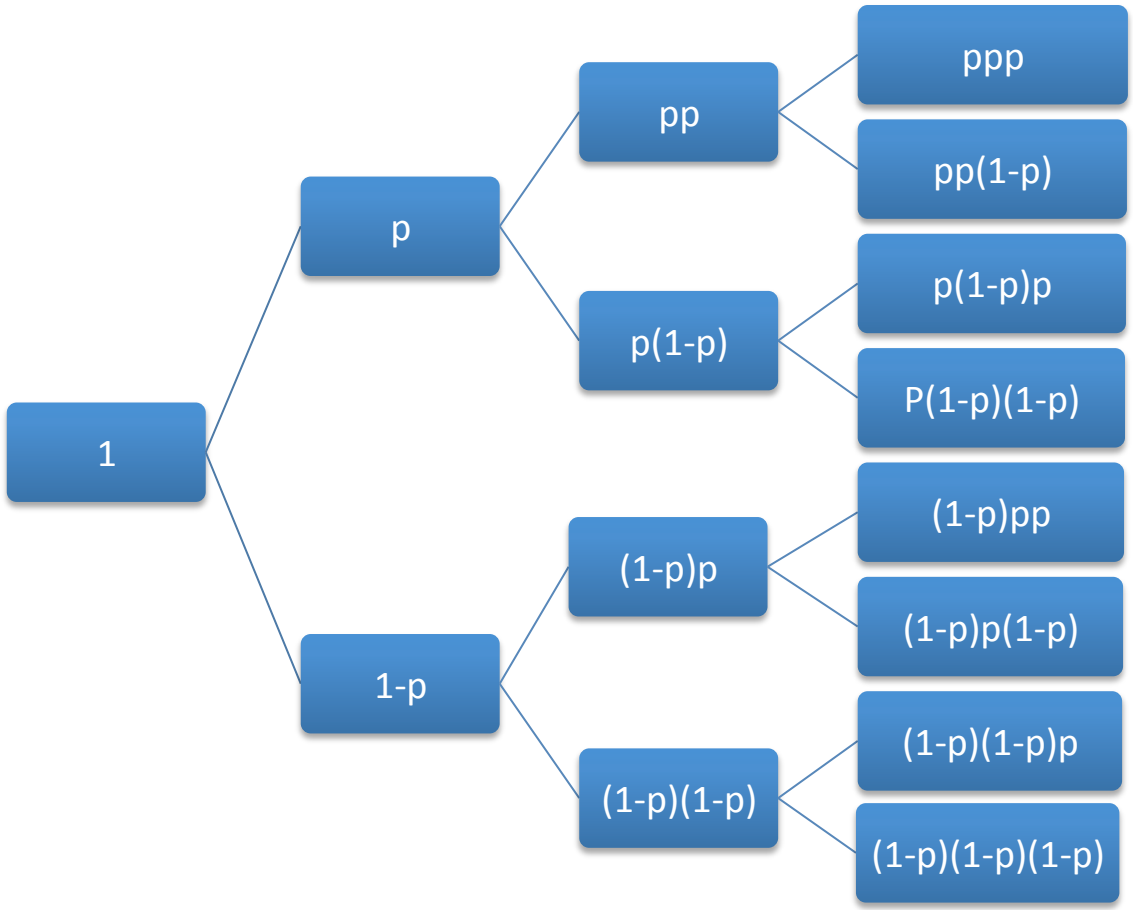
$$E_a = \{ x \text{ tels que } m(B(x,r)) \approx r^a \}$$

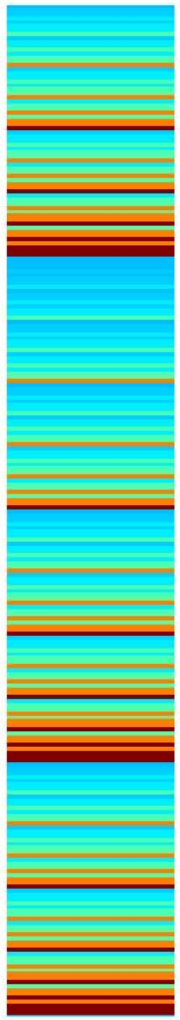
Mesure multifractale : un aperçu



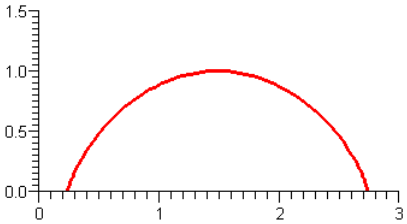
$$E_a = \{ x \text{ tels que } m(B(x,r)) \approx r^a \}$$

Un exemple jouet : la mesure de Bernoulli

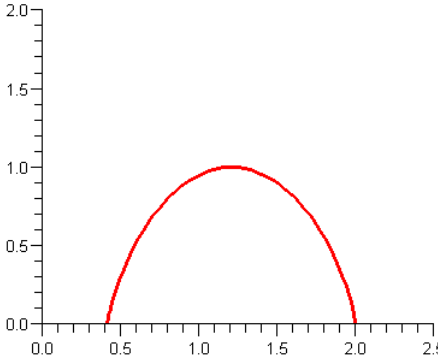




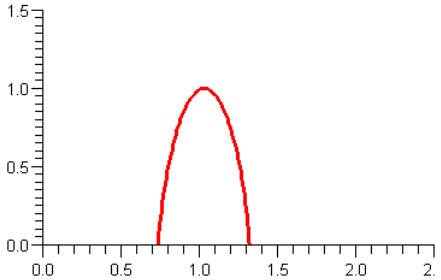
Le spectre de la mesure de Bernoulli



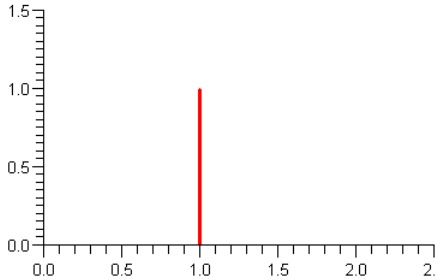
p = 0,15



p = 0,25



p = 0,40



p = 0,50

Remerciements

- À Andrzej Stos

  pour son aide dans la conception des animations

- À Claude Tricot

  pour sa vision géométrique toujours éclairante et
  pour les nombreuses discussions partagées

- À Sophie Delhaye

  pour son aide dans la réalisation de ce diaporama