

Phénomènes multifractals et dimension de packing

Yanick Heurteaux

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Avignon, 18-22 Septembre 2016

Travail commun avec Frédéric Bayart

Phénomènes multifractals génériques

- Régularité ponctuelle des fonctions (Jaffard)
- Séries de Fourier : comportement asymptotique de $S_n f(x)$ (Bayart & H.)
- Fonctions harmoniques : comportement radial des fonctions harmoniques au bord d'un ouvert (Bayart & H.)
- Régularité locale des mesures (Buczolich & Seuret, Bayart)
- Régularité ponctuelle des fonctions convexes (Buczolich & Seuret)
- Intégrale de Fourier : comportement de $\int_{-R}^R f(t) e^{-it\xi} dt$
- Séries de Dirichlet : comportement de $\sum_{k=1}^n a_k k^{-1/2+it}$
- Séries d'ondelettes : comportement de $\langle f, \varphi \rangle \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\mu \in \Lambda_j} 2^{j/2} \langle f, \psi_\mu \rangle \psi_\mu$
- ...

Régularité ponctuelle

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue}$$

Indice de régularité ponctuelle :

$$\begin{aligned} h^-(x_0) &= \sup \left\{ h > 0 ; f \in C^h(x_0) \right\} \\ &= \sup \left\{ h > 0 ; \exists P \in \mathbb{R}[X] ; |f(x) - P(x)| = O(|x - x_0|^h) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^-(h, f) &= \left\{ x \in [0, 1]^d ; h^-(x) \leq h \right\} \\ E^-(h, f) &= \left\{ x \in [0, 1]^d ; h^-(x) = h \right\} \end{aligned}$$

$$h^-(x_0) \leq h : \quad \forall \varepsilon, \forall P, \quad |f(x) - P(x)| \geq c|x - x_0|^{h+\varepsilon} \quad \text{i.s.}$$

$$h^-(x_0) = h : \quad \text{si de plus } \forall \varepsilon, \exists P, \quad |f(x) - P(x)| \leq c|x - x_0|^{h-\varepsilon}$$

Régularité ponctuelle

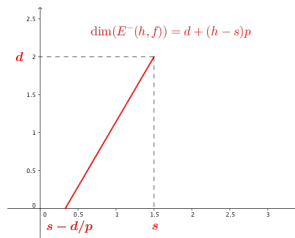
Théorème (Jaffard, 2000)

(i) Pour toute fonction $f \in B_{p,q}^s([0,1]^d)$ et tout $h \in [s - d/p, s]$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}^-(h, f)) \leq d + (h - s)p.$$

(ii) Pour quasi toute fonction $f \in B_{p,q}^s([0,1]^d)$, pour tout $h \in [s - d/p, s]$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(E^-(h, f)) = d + (h - s)p.$$



Séries de Fourier

$$f \in L^p(\mathbb{T}), \quad p \geq 1$$

Indice de divergence :

$$\begin{aligned}\beta^-(x_0) &= \inf \left\{ \beta \geq 0 ; |S_n f(x_0)| = O(n^\beta) \right\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ |S_n f(x_0)|}{\log n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^-(\beta, f) &= \{x \in \mathbb{T} ; \beta^-(x) \geq \beta\} \\ E^-(\beta, f) &= \{x \in \mathbb{T} ; \beta^-(x) = \beta\}\end{aligned}$$

$\beta^-(x_0) \geq \beta$: $\forall \varepsilon > 0$, $|S_n f(x_0)| \geq cn^{\beta-\varepsilon}$ infiniment souvent

$\beta^-(x_0) = \beta$: si de plus $\forall \varepsilon > 0$, $|S_n f(x_0)| \leq cn^{\beta+\varepsilon}$ pour tout n

Séries de Fourier

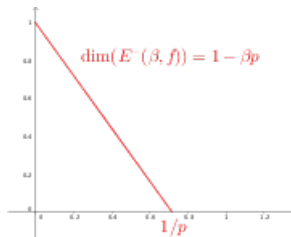
Théorème (Aubry 2006, Bayart & H.)

(i) Pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ et tout $\beta \in [0, 1/p]$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}^-(\beta, f)) \leq 1 - \beta p.$$

(ii) Pour quasi toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$, pour tout $\beta \in [0, 1/p]$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(E^-(\beta, f)) = 1 - \beta p.$$



Comportement radial des fonctions harmoniques

$$f \in L^1(\mathcal{S}_d), \quad P[f](x) = \int_{\mathcal{S}_d} P(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi) = \int_{\mathcal{S}_d} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^{d+1}} f(\xi) d\sigma(\xi)$$

Indice de divergence :

$$\begin{aligned} \beta^-(x_0) &= \inf \left\{ \beta \geq 0 ; |P[f](rx_0)| = O((1-r)^{-\beta}) \right\} \\ &= \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log^+ |P[f](x_0)|}{-\log(1-r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^-(\beta, f) &= \{x \in \mathcal{S}_d ; \beta^-(x) \geq \beta\} \\ E^-(\beta, f) &= \{x \in \mathcal{S}_d ; \beta^-(x) = \beta\} \end{aligned}$$

$$\beta^-(x_0) \geq \beta : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad |P[f](rx_0)| \geq c(1-r)^{-\beta+\varepsilon} \quad \text{i.s.}$$

$$\beta^-(x_0) = \beta : \quad \text{si de plus } \forall \varepsilon > 0, \quad |P[f](rx_0)| \leq c(1-r)^{-\beta-\varepsilon} \quad \forall r$$

Comportement radial des fonctions harmoniques

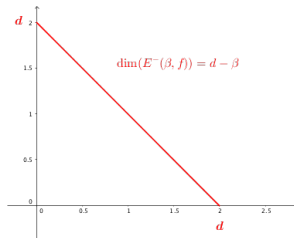
Théorème (Bayart & H.)

(i) Pour toute fonction $f \in L^1(\mathcal{S}_d)$ et tout $\beta \in [0, d]$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}^-(\beta, f)) \leq d - \beta.$$

(ii) Pour quasi toute fonction $f \in L^1(\mathcal{S}_d)$, pour tout $\beta \in [0, d]$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(E^-(\beta, f)) = d - \beta.$$



Un protocole commun

- Estimer $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}^-(\beta, f))$ par un argument de recouvrement à l'aide d'une inégalité maximale
- Montrer que la borne est optimale pour un β donné en partant d'un ensemble de dimension ad hoc
- Construire une fonction saturante à l'aide d'une collection d'ensembles échelonnés en dimension
- Utiliser un argument de topologie pour passer de la construction d'une fonction à la construction d'un $\mathcal{G}_\delta$ dense

Régularité ponctuelle :

une collection de coefficients localisés en espace

Wavelet leaders :

Soit $\lambda \in \Lambda_j$ (cube dyadique de génération j)

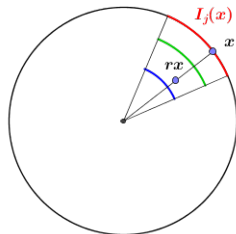
$$e_\lambda(f) = \sup \left\{ |c_\mu^{(i)}(f)| ; 1 \leq i < 2^d, \mu \subset 3\lambda \right\}$$

Notation : $e_\lambda(f) = e_j(f, x)$ si λ est l'unique cube dyadique de génération j contenant x

$$h^-(f, x) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log e_j(f, x)}{-j \log 2}$$

Fonctions harmoniques positives :

construction d'une collection de coefficients localisés en espace



$$\begin{aligned}
 P[f](rx) &\asymp 2^{(j+1)d} \int_{\xi \in I_j(x)} P[f]((1 - 2^{-(j+1)})\xi) d\sigma(\xi) \\
 &\asymp 2^{jd} \int_{\xi \in I_j(x)} P[f]((1 - 2^{-j})\xi) d\sigma(\xi) \\
 &:= 2^{jd} e_\lambda(f)
 \end{aligned}$$

Et pour les séries de Fourier ?

Lemme (Aubry, Bayart & H.)

Soit $p \geq 1$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, pour tout $x \in \mathbb{T}$ tel que $|S_{2^j}f(x)| \geq \|S_{2^j}f\|_p$,

$$\|S_{2^j}f\|_{L^p(3I_j(x))} \geq \frac{\delta 2^{-j/p}}{j^{3/p}} |S_{2^j}f(x)|.$$

Ce lemme suggère d'introduire :

$$e_\lambda(f) = \|S_{2^j}f\|_{L^p(3\lambda)} \quad \text{si } \lambda \text{ est de génération } j$$



Indice moins pertinent que dans d'autres contextes
Le noyau de Dirichlet n'est pas positif.

Un contexte général

(poursuivant les travaux de Jaffard, Abry, Roux, Vedel et Wendt)

► $K \subset \mathbb{R}^N$ compact et $d > 0$. $(\Lambda_j)_{j \geq 0}$ famille de "cubes dyadiques" tels que

- Pour tout $\lambda \in \Lambda_j$, il existe $x_\lambda \in K$ tel que $B(x_\lambda, c2^{-j}) \subset \lambda \subset B(x_\lambda, C2^{-j})$
- Si $\lambda \neq \mu \in \Lambda_j$, $\lambda \cap \mu = \emptyset$
- $\cup_{\lambda \in \Lambda_j} \lambda = K$
- $\text{card}(\Lambda_j) \asymp 2^{jd}$

► $X \subset Y$ deux cônes fermés d'un espace de Banach
(dans la pratique $X = Y$ est un cône ou alors Y est un espace de Banach de fonctions et X est le cône des fonctions positives)

► Une famille d'applications continues $f \mapsto e_\lambda(f)$, $\lambda \in \bigcup_j \Lambda_j$

Indice de régularité ponctuelle (ou indice inférieur)

Notation : si $\lambda \in \Lambda_j$ et $x_0 \in \lambda$, $e_\lambda(f) = e_j(f, x_0)$

On dit que $f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)$ si $|e_j(f, x_0)| \leq C2^{-j\alpha}$ pour j grand

Indice de régularité ponctuelle (ou indice inférieur) :

$$h^-(f, x_0) = \sup \{ \alpha \geq 0; f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0) \} = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log |e_j(f, x_0)|}{-j \log 2}$$

$$\mathcal{F}^-(\alpha, f) = \{x \in K; h^-(f, x) \leq \alpha\}$$

$$F^-(\alpha, f) = \{x \in K; h^-(f, x) = \alpha\}$$

Indice d'irrégularité ponctuelle (ou indice supérieur)

On dit que $f \in \mathcal{I}^\alpha(x_0)$ si $|e_j(f, x_0)| \geq C2^{-j\alpha}$ pour j grand

Indice d'irrégularité ponctuel (ou indice supérieur) :

$$h^+(f, x_0) = \inf \{ \alpha \geq 0; f \in \mathcal{I}^\alpha(x_0) \} = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log |e_j(f, x_0)|}{-j \log 2}$$

$$\mathcal{F}^+(\alpha, f) = \{x \in K; h^+(f, x) \leq \alpha\}$$

$$F^+(\alpha, f) = \{x \in K; h^+(f, x) = \alpha\}$$

Une proposition élémentaire

Proposition

Soit $f \in Y$. Supposons qu'il existe $p \geq 1$ et $C > 0$ tels que, pour tout $j \geq 0$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |e_\lambda(f)|^p \leq C .$$

Alors, pour tout $\alpha \in (0, d/p)$,

$$\dim_{\mathcal{H}} (\mathcal{F}^-(\alpha, f)) \leq p\alpha \quad \text{et} \quad \dim_{\mathcal{P}} (\mathcal{F}^+(\alpha, f)) \leq p\alpha .$$

Preuve de $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}^-(\alpha, f)) \leq p\alpha$

Soit $n \geq 0$, $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathcal{F}^-(\alpha, f)$. Il existe $j \geq n$ tel que

$$(*) \quad |e_j(f, x)| \geq 2^{-j(\alpha+\varepsilon)} \asymp |I_j(x)|^{\alpha+\varepsilon}$$

$\mathcal{F}^-(\alpha, f)$ possède donc un recouvrement $\mathcal{R}$ par des cubes de génération $\geq n$ vérifiant $(*)$.

On a :

$$\sum_{I \in \mathcal{R}} |I|^{(\alpha+2\varepsilon)p} \leq \sum_{j \geq n} c 2^{-j\varepsilon p} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |e_{\lambda}(f)|^p \leq Cste$$

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}^-(\alpha, f)) \leq p(\alpha + 2\varepsilon)$$

Preuve de $\dim_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}^+(\alpha, f)) \leq p\alpha$

Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathcal{F}^+(\alpha, f)$. Il existe j_x tel que pour tout $j \geq j_x$,

$$|e_j(f, x)| \geq |l_j(x)|^{\alpha+\varepsilon}$$

Soit $\mathcal{F}_{l,\varepsilon}^+(\alpha, f) = \{x \in \mathcal{F}^+(\alpha, f); \forall j \geq l, |l_j(x)|^{\alpha+\varepsilon} \leq |e_j(f, x)|\}$

$$\mathcal{F}^+(\alpha, f) = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{l \geq 1} \mathcal{F}_{l,1/n}^+(\alpha, f)$$

Il suffit de constater que $\overline{\dim_B(\mathcal{F}_{l,\varepsilon}^+(\alpha, f))} \leq p(\alpha + \varepsilon)$

Soit Γ_j l'ensemble des cubes de Λ_j rencontrant $\mathcal{F}_{l,\varepsilon}^+(\alpha, f)$

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_j} |\lambda|^{(\alpha+\varepsilon)p} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |e_\lambda|^p \leq C$$

$$\text{Card}(\Gamma_j) \leq C 2^{jp(\alpha+\varepsilon)}$$

Existence d'une fonction multifractale

Hypothèses sur les e_λ :

1. Les e_λ sont linéaires sur Y et positives sur X
2. $\forall f \in Y, \forall j, \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |e_\lambda(f)|^p \leq C \|f\|^p$
3. On peut saturer la condition 2. :

Pour tout $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_j}$, il existe $f \in X$ telle que

- $\|f\|^p \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |a_\lambda|^p$;
- $\forall \lambda \in \Lambda_j, e_\lambda(f) \geq \frac{1}{C} |a_\lambda|$

Théorème

Posons

$$F(\alpha, f) = F^+(\alpha, f) \cap F^-(\alpha, f) = \left\{ x \in K ; \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log |e_j(f, x)|}{-j \log 2} = \alpha \right\}$$

If existe $f \in X$ telle que pour tout $\alpha \in (0, d/p)$

$$\dim_{\mathcal{P}} (F(\alpha, f)) = \dim_{\mathcal{H}} (F(\alpha, f)) = p\alpha.$$

Première étape de la preuve :

comment utiliser l'hypothèse de saturation

Soit G tel que $\overline{\dim_B}(G) < p\alpha$.

Si j est assez grand ($j \geq j_0$), G se laisse recouvrir par un ensemble Γ_j de $2^{jp\alpha}$ cubes de génération j .

$$a_\lambda = \begin{cases} 2^{-j\alpha} & \text{si } \lambda \in \Gamma_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\sum_{\lambda \in \Gamma_j} |a_\lambda|^p \leq 1$. Il existe $f_j \in X$ telle que

$$e_\lambda(f_j) \gg a_\lambda \quad \text{et} \quad \|f_j\| \ll 1$$

$$f = \sum_{j \geq j_0} j^{-2} f_j$$

Si $x \in G$ et $j \geq j_0$, $e_j(f, x) \geq j^{-2} e_j(f_j, x) \gg j^{-2} 2^{-j\alpha}$

Exemple : fonctions harmoniques positives

Ici $p = 1$. Si $2^{-(j+1)} \leq 1 - r \leq 2^{-j}$,

$$P[f](rx) \asymp 2^{jd} \int_{\xi \in I_j(x)} P[f]((1 - 2^{-j})\xi) d\sigma(\xi) := 2^{jd} e_\lambda(f)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log P[f](rx)}{-\log(1-r)} = d - \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log e_j(f, x)}{-j \log 2}$$

Théorème

Il existe $f \in L^1(\mathcal{S}_d)$, $f \geq 0$ telle que pour tout $\beta \in [0, d]$,

$$\dim_{\mathcal{P}}(E(\beta, f)) = \dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = d - \beta$$

où $E(\beta, f) = \left\{ x \in \mathcal{S}_d ; \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log P[f](rx)}{-\log(1-r)} = \beta \right\}$

Hypothèse 3. : prendre $f = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{jd} |a_\lambda| \mathbf{1}_\lambda$.

La conclusion $\dim (F(\beta, f)) = d - \beta$ est-elle générique ?

Proposition

Pour quasi toute fonction $f \in L^1(\mathcal{S}_d)$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{S}_d, \quad \liminf_{r \rightarrow 1} \frac{\log |P[f](rx)|}{-\log(1-r)} \leq 0$$

Preuve

- Si $\varepsilon > 0$ et $0 < \rho < 1$), l'ensemble

$$\mathcal{U}(\varepsilon, \rho) = \left\{ f \in L^1(\mathcal{S}_d); \forall x \in \mathcal{S}_d, \exists r \in (\rho, 1), |P[f](rx)| < \frac{1}{(1-r)^\varepsilon} \right\}$$

est un ouvert dense de $L^1(\mathcal{S}_d)$

- Toute fonction $f \in \bigcap_{k,l} \mathcal{U}(\varepsilon_k, \rho_l)$ satisfait la conclusion de la proposition

Décomposition le long de la base de Haar

Si $f \in L^2([0, 1))$ et $j \geq 1$,

$$T_j f = \langle f, \varphi \rangle \varphi + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\mu \in \Lambda_i} 2^{i/2} \langle f, \psi_\mu \rangle \psi_\mu$$

Ici, $p = 2$.

Si $\lambda \in \Lambda_j$, $e_\lambda(f) := 2^{-j/2} T_j f(x)$ (indépendant de $x \in \lambda$)

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log |T_j f(x)|}{j \log 2} = \frac{1}{2} - \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log |e_j(f, x)|}{-j \log 2}$$

Théorème

Il existe $f \in L^2([0, 1))$, $f \geq 0$ telle que pour tout $\beta \in [0, 1/2]$,

$$\dim_{\mathcal{P}} (E(\beta, f)) = \dim_{\mathcal{H}} (E(\beta, f)) = 1 - 2\beta$$

où $E(\beta, f) = \left\{ x \in [0, 1) ; \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log |T_j f(x)|}{j \log 2} = \beta \right\}$

Vérification des hypothèses

$$p = 2, \quad Y = L^2([0, 1)) \quad \text{et} \quad X = \{f \in Y ; f \geq 0\}$$

1. $T_j f$ = projection orthogonale de f sur l'espace $\left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \mathbf{1}_\lambda \right\}$

$$e_\lambda(f) = 2^{-j/2} T_j f|_\lambda \quad \text{linéaire sur } Y \text{ et positif sur } X.$$

2. Si $\lambda \in \Lambda_j$, $|e_\lambda(f)|^2 = \int_\lambda |T_j f(x)|^2 dx$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |e_\lambda(f)|^2 = \|T_j f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

3. Soit $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_j}$ une famille de nombre. Posons

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{j/2} |a_\lambda| \mathbf{1}_\lambda \in X$$

$$T_j f = f \text{ et } e_\lambda(f) = |a_\lambda|$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \int_\lambda |f(x)|^2 dx = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |a_\lambda|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |e_\lambda(f)|^2$$

Et pour les séries de Fourier ?

Proposition

Pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}^-(\beta, f)) \leq 1 - \beta p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}^+(\beta, f)) \leq 1 - \beta p$$

Preuve : Utiliser

$$e_{\lambda}(f) = \|S_{2^j} f\|_{L^p(3\lambda)} \quad \text{pour } \lambda \in \Lambda_j$$

Et pour les séries de Fourier ?

Théorème

Il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ telle que pour tout $\beta \in [0, 1/p]$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = \dim_{\mathcal{P}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta p$$

où

$$E(\beta, f) = \left\{ x \in \mathbb{T} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n} = \beta \right\}$$



Le noyau de Dirichlet n'est pas positif :
beaucoup plus complexe que le cadre général

Idée : $S_n f$ est réelle si f est réelle. De plus, $|S_n f|$ est grand dès que $|\Re(S_n f)|$ **ou** $|\Im(S_n f)|$ est grand !

Retour au cadre général :

un résultat générique

Théorème

On reprend les hypothèses 1. 2. 3. du contexte général. On suppose de plus que Y est séparable et qu'il existe une partie $\mathcal{D}$ dense dans Y telle que

$$4. \quad \forall f \in \mathcal{D}, \forall j, \forall \lambda \in \Lambda_j, \quad |e_\lambda(f)| \leq C 2^{-jd/p}$$

Pour quasi toute fonction $f \in Y$, pour tout $\alpha \in (0, d/p)$,

$$\dim_{\mathcal{H}} (F^-(\alpha, f)) = p\alpha$$

où $F^-(\alpha, f) = \{x \in K; h^-(f, x) = \alpha\}$.

Exemple : décomposition le long de la base de Haar

Théorème

Si $f \in L^2[0, 1))$ et $j \geq 1$,

$$T_j f = \langle f, \varphi \rangle \varphi + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\mu \in \Lambda_i} 2^{i/2} \langle f, \psi_\mu \rangle \psi_\mu.$$

Pour quasi toute fonction $f \in L^2([0, 1))$, pour tout $\beta \in (0, 1/2)$,

$$\dim_{\mathcal{H}} (E^-(\beta, f)) = 1 - 2\beta$$

où

$$E^-(\beta, f) = \left\{ x \in [0, 1) ; \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log |T_j f(x)|}{j \log 2} = \beta \right\}.$$

Hypothèse 4. : prendre $\mathcal{D} = \bigcup_j \{f ; T_j f = f\}$

Rendez-vous l'an prochain à Porquerolles