ISOGÉNIES ET PLACE RÉELLE

ÉRIC GAUDRON ET GAËL RÉMOND

Abstract. It has long been known that isogeny theorems between two elliptic curves over a number field are easier to obtain and yield better numerical constants when the number field admits a real embedding. We explain this phenomenon and extend it to arbitrary abelian varieties. Indeed we have associated in a previous work to any abelian variety A another canonically defined abelian variety which governs isogenies from A and here we show that, in the case of a real embedding, this second abelian variety splits as a product of two natural abelian subvarieties, up to 2-torsion. This allows to apply the period theorem to varieties whose dimension is halved compared to the general case and produce constants which are roughly reduced by a square root. We give explicit statements to illustrate this and also include new bounds in the elliptic case.

Table des matières

1. Introduction

Étant donné deux courbes elliptiques E et E' sur un corps de nombres K, nous appelons théorème d'isogénie une majoration du degré minimal d'une isogénie $E \to E'$ (lorsqu'il en existe) en fonction du degré de K et de la hauteur de Faltings $h_F(E)$. Le premier énoncé général est dû à Masser et Wüstholz [MW]. Toutefois, cinq ans plus tôt, les frères Chudnovsky [CC] savaient déjà en démontrer une version dans le cas particulier où K admet une place réelle. Nous souhaitons ici proposer un cadre qui explique pourquoi cette hypothèse induit des simplifications et qui englobe les variétés abéliennes de dimension arbitraire. En effet Masser et Wüstholz ont étendu leur résultat elliptique en un théorème d'isogénie dans cette généralité et nous en avons par la suite donné des versions explicites et raffinées. Pour obtenir nos bornes les plus précises, nous avons introduit dans [GR3] un formalisme qui associe à une variété abélienne A sur un corps K muni d'un plongement complexe $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ une nouvelle variété abélienne $A^\#$ qui permet de contrôler (en un sens précis) les isogénies entre A et une autre variété abélienne sur K. Nous montrons dans le présent texte que lorsque $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$ la variété $A^\#$ possède une structure supplémentaire qui fournit à la fois une justification du phénomène observé dans le cas elliptique et conduit également à de meilleures majorations dans le cas général. Avant de décrire ceci en détails, rappelons quelques définitions tirées de [GR3].

Lorsque A est une variété abélienne sur un corps K, son support $\operatorname{Supp} A$ est l'ensemble (fini) des classes d'isogénie des sous-variétés abéliennes simples de A. Si K est muni d'un plongement (fixé) $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, nous notons simplement Ω_A le réseau des périodes de la variété abélienne complexe

MSC 2020: 11G10 (11G05, 14K02, 11G15)
Mots-clefs: Isogénie, variété abélienne, place réelle.
Date: 18/6/2024, 13:04:31.
Le premier auteur bénéficie du soutien du projet ANR-23-CE40-0006-01 Gaec.

$A_{\mathbb{C}}$ obtenue par extension des scalaires *via* σ. L'anneau $\operatorname{End} A$ des endomorphismes de A (qui peut différer de $\operatorname{End} A_{\mathbb{C}}$) agit naturellement sur Ω_A. Ceci permet de définir l'anneau de Lefschetz de A

$$\Lambda(A) = \operatorname{End}_{\operatorname{End} A} \Omega_A.$$

Les propriétés de cet objet sont présentées au chapitre 9 de [GR3]. En particulier, si A et B sont deux variétés abéliennes de même support, il y a un isomorphisme canonique entre $\Lambda(A) \otimes \mathbb{Q}$ et $\Lambda(B) \otimes \mathbb{Q}$ qui permet d'identifier sans risque $\Lambda(A)$ et $\Lambda(B)$ à des sous-anneaux d'une même $\mathbb{Q}$-algèbre (voir le bas de la page 51 de [GR3]) et donc de donner un sens à une égalité de la forme $\Lambda(A) = \Lambda(B)$.

L'anneau de Lefschetz s'incarne dans une variété abélienne : nous avons en effet montré (théorème 9.5 de [GR3]) qu'il existe une unique variété abélienne $A^{\#}$ sur K, de même support que A, telle que $\Lambda(A^{\#}) = \Lambda(A)$ et munie d'un isomorphisme $\Omega_{A^{\#}} \simeq \Lambda(A)$ de modules sur $\Lambda(A^{\#}) = \Lambda(A)$. Pour abréger nous notons simplement $\mathrm{id} \in \Omega_{A^{\#}}$ la période qui correspond à l'élément unité de $\Lambda(A)$, autrement dit l'identité $\Omega_A \to \Omega_A$.

Lorsque A et B sont deux variétés abéliennes sur K, nous disposons d'un morphisme naturel $\Lambda(A \times B) \to \Lambda(A)$ (lemme 9.2 de [GR3]) qui donne naissance (lemme 9.3 (5) *ibid.*) à un morphisme canonique de variétés abéliennes $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$. Dans le cas le plus important où $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$ alors θ est une isogénie (lemme 9.10).

Notre résultat principal montre que, dans le cas d'un plongement réel, ces objets fondamentaux $A^{\#}$, id et θ se dédoublent.

Théorème 1.1. *Si $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$, nous pouvons associer à toute variété abélienne A sur K deux sous-variétés abéliennes $A^{\#,+}$ et $A^{\#,-}$ de $A^{\#}$ et deux périodes* $\mathrm{id}^{\pm} \in \Omega_{A^{\#,\pm}}$ *de sorte que*

1. $\dim A^{\#,\pm} = (\dim A^{\#})/2$,
2. *la somme $s\colon A^{\#,+} \times A^{\#,-} \to A^{\#}$ est une isogénie telle que* $\operatorname{Ker}(s) \subset \operatorname{Ker}[2]$,
3. $2\mathrm{id} = \mathrm{id}^+ + \mathrm{id}^-$,
4. *la seule sous-variété abélienne de $A^{\#,\pm}$ dont* $\mathrm{id}^{\pm}$ *est une période est $A^{\#,\pm}$,*
5. *si B est une seconde variété abélienne sur K alors le morphisme canonique $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ vérifie $\theta((A \times B)^{\#,\pm}) = A^{\#,\pm}$ et* $\mathrm{d}\theta(\mathrm{id}^{\pm}) = \mathrm{id}^{\pm}$.

Revenons maintenant sur la stratégie de [GR3] pour établir le théorème d'isogénie. Elle s'articule en deux parties autour d'une quantité pivot notée $\Upsilon(T)$ (définition 12.1) où T est le support d'une variété abélienne sur K. Nous ne rappelons pas ici tous les détails techniques de cette définition mais soulignons qu'elle fait simplement intervenir la connaissance de $A^{\#}$ et des isogénies $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ pour des variétés abéliennes telles que $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A \subset T$. Les deux étapes consistent alors à montrer d'une part une borne d'isogénie en fonction de $\Upsilon(T)$ (théorème 12.3) puis à utiliser le théorème des périodes pour majorer $\Upsilon(T)$ en fonction de la hauteur de Faltings lorsque K est un corps de nombres (théorème 16.1).

C'est ce second résultat que le théorème 1.1 permet d'améliorer dans le cas d'une place réelle. En effet, nous appliquions le théorème des périodes à une variété abélienne de la forme $(A \times B)^{\#}$ munie de sa période id et d'une polarisation de la forme $\theta^*\mathcal{N}$. Le scindage du cas réel permet de l'employer (deux fois) sur $(A \times B)^{\#,\pm}$ munie de $\mathrm{id}^{\pm}$ et d'une polarisation provenant de $A^{\#,\pm}$ *via* la restriction de θ (en particulier la propriété (4) de $\mathrm{id}^{\pm}$ intervient de façon cruciale). Le fait de travailler sur des variétés de dimension divisée par deux baisse le coefficient dépendant de la dimension. Nous obtenons l'estimation suivante où h_F désigne la hauteur de Faltings stable.

Théorème 1.2. *Soient K un corps de nombres ayant une place réelle, A une variété abélienne sur K et $n = \dim A^{\#}$. Alors*

$$\Upsilon(\operatorname{Supp} A) \leq 38 \left(\frac{en}{2}\right)^n n^5 [K:\mathbb{Q}] \max\left(h_F(A) + \frac{3}{2}\dim A, \log[K:\mathbb{Q}], 1\right).$$

Nous améliorons donc, dans le cas réel, la borne du théorème 1.8 (ou 16.1) de [GR3] dans laquelle la fonction de n se lisait $241(en)^{2n}n^5$.

Énonçons maintenant une version du théorème d'isogénie qui se déduit de cette majoration sous une forme simplifiée qui ne fait plus intervenir ni $A^{\#}$ ni Υ. Notons pour cela

$$\Xi_{\mathbb{R}}(A) = \left((6g)^{4g^2} [K:\mathbb{Q}] \max\left(1, \log[K:\mathbb{Q}], h_F(A)\right)\right)^{2g^2}$$

lorsque A est une variété abélienne de dimension g sur le corps de nombres K.

Théorème 1.3. *Soient A et B deux variétés abéliennes sur un corps de nombres K et L une extension de K. Nous supposons qu'il existe un plongement $\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$ et $\overline{\sigma(L)} = \sigma(L)$. Si A_L et B_L sont isogènes alors il existe deux isogénies $A_L \to B_L$ et $B_L \to A_L$ de degré au plus $\Xi_{\mathbb{R}}(A)^2$.*

Ceci constitue une amélioration du théorème 1.9 (1) de [GR3] qui affirme que le même énoncé vaut sans l'hypothèse sur σ à condition de remplacer $(6g)^{4g^2}$ dans l'expression de $\Xi_{\mathbb{R}}(A)$ par $(7g)^{8g^2}$. Il ne s'agit que d'un exemple d'application du théorème 1.2 aux isogénies : nous aurions également pu donner des majorations pour d'autres quantités (polarisations, endomorphismes, etc.). Surtout il convient de rappeler que l'exposant $2g^2$ peut être très souvent amélioré dès qu'une information supplémentaire sur $\operatorname{End} A$ est disponible (voir pages 8 et 9 de [GR3]).

Soulignons encore que le théorème 1.3 découle bien d'une application directe du théorème 1.2 et des résultats de [GR3] dans le cas particulier où $L = K$ mais que le cas général demande plus de travail. Nous aurons besoin au cours de la démonstration de descendre certaines isogénies de L à $\sigma^{-1}(\sigma(L) \cap \mathbb{R})$ pour retrouver l'hypothèse de place réelle du théorème 1.2.

Revenons pour nos derniers énoncés au cas elliptique. Tout ce qui précède vaut dans ce cas mais, comme d'habitude, les calculs peuvent être raffinés en tenant compte des spécificités inhérentes à ce cas (simplicité, polarisation principale, etc.). Nous donnerons donc une démonstration directe du résultat ci-dessous notamment en reprenant et raffinant le paragraphe 7.5 de [GR1] (et en corrigeant une erreur qui s'y trouvait).

Théorème 1.4. *Soient E et E' deux courbes elliptiques sur un corps de nombres K ayant une place réelle. Si L est une extension de K telle que E_L et E'_L sont isogènes alors il existe une isogénie $E_L \to E'_L$ de degré au plus $557[K:\mathbb{Q}]^2 \max\left(1, h_F(E), \log[K:\mathbb{Q}]\right)^2$.*

En réalité pour obtenir cet énoncé nous serons amenés à distinguer selon que nos courbes admettent ou non des multiplications complexes. Lorsque c'est le cas, il se trouve qu'il vaut mieux travailler sur une extension de K où ces multiplications sont définies. Une telle extension n'a jamais de places réelles que K en ait ou pas. Cette information n'est donc plus utile et nous aboutissons au résultat suivant qui s'écarte un peu de notre thème général mais, outre qu'il permet d'établir le théorème 1.4 ci-dessus, améliore aussi assez nettement l'assertion correspondante du théorème 1.4 de [GR1] grâce aux idées de [GR3].

Théorème 1.5. *Soient E et E' deux courbes elliptiques sur un corps de nombres K avec $\operatorname{End} E_{\overline{K}} \neq \mathbb{Z}$. Si L est une extension de K telle que E_L et E'_L sont isogènes alors il existe une isogénie $E_L \to E'_L$ de degré au plus*

$$460[K:\mathbb{Q}]^2 \max\left(1, h_F(E), \log[K:\mathbb{Q}]\right) \max\left(1, h_F(E)\right).$$

Dans le cas où $\operatorname{End} E_L \neq \mathbb{Z}$ nous pouvons remplacer 460 par 115.

La suite de notre texte s'organise en cinq parties, chacune dévolue à établir l'un des théorèmes ci-dessus. Nous commençons par le cas elliptique qui nécessite moins de bagage technique avant de passer au cas général pour lequel nous nous appuyerons bien plus sur le formalisme de [GR3].

2. Courbes elliptiques CM

Nous établissons dans cette partie le théorème 1.5. Commençons par quelques rappels. Nous avons défini dans la partie 2 de [GR2] des métriques dites de Rosati sur les réseaux de la forme $\operatorname{Hom}(A, B)$ où A et B sont deux variétés abéliennes chacune munie d'une polarisation en posant $|\varphi|^2 = \operatorname{Tr}(\varphi \circ \varphi^\dagger)$ pour l'involution de Rosati généralisée $\varphi \mapsto \varphi^\dagger$. Nous notons $\operatorname{vol}(\operatorname{Hom}(A, B))$ le covolume du réseau euclidien ainsi obtenu. Tout ceci s'applique lorsque $A = B$ (avec la même polarisation) et définit $\operatorname{vol}(\operatorname{End} A)$ (ici seule l'involution de Rosati usuelle intervient). Lorsque A et B sont des courbes elliptiques, nous supposons implicitement dans cette partie qu'elles sont munies de leurs polarisations principales.

Nous utilisons également une autre structure de réseau euclidien : si $(A, \mathcal{L})$ est une variété abélienne sur un corps K muni d'un plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, le réseau des périodes Ω_A (apparu dans l'introduction) est muni d'une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ ou $\|\cdot\|_{\mathcal{L},\sigma}$ par $\|\omega\|_{\mathcal{L}}^2 = H(\omega, \omega)$ où H est la forme de Riemann de la polarisation $\mathcal{L}_\sigma$ (voir le paragraphe 2.4 de [GR1]). Le covolume de $(\Omega_A, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ vaut $h^0(A, \mathcal{L})$ et nous notons $\rho(A, \mathcal{L}) = \min\{\|\omega\|_{\mathcal{L}} \mid \omega \in \Omega_A \setminus \{0\}\}$ son premier minimum. Là encore, lorsque A est une courbe elliptique et $\mathcal{L}$ sa polarisation principale, nous omettrons généralement la mention de $\mathcal{L}$ pour écrire simplement $\|\cdot\|$ ou $\rho(A)$.

Une variété abélienne A est dite MM si $\operatorname{End} A$ est un ordre maximal. On consultera la page 4 de [GR3] pour un résumé des conséquences de cette propriété. Pour parler de multiplication complexe, nous faisons usage des abréviations de la page 22 de [GR3] : en particulier une courbe elliptique E sur un corps K est dite CM si $\operatorname{End} E_{\overline{K}} \neq \mathbb{Z}$ tandis qu'elle est CM′ si $\operatorname{End} E \neq \mathbb{Z}$.

Notre premier énoncé, de nature préliminaire, relie les notions ci-dessus.

Lemme 2.1. *Soient K un corps plongé dans $\mathbb{C}$ et E, E' deux courbes elliptiques sur K.*

(1) *Si $\varphi \in \operatorname{Hom}(E, E')$ alors $|\varphi|^2 = 2\deg\varphi$.*
(2) *Si E est CM′ alors $E^\#$ est une courbe elliptique et sa période canonique* id *vérifie*

$$\|\mathrm{id}\|^2 = \frac{2}{\operatorname{vol}(\operatorname{End} E^\#)}.$$

Démonstration. (1) En effet $|\varphi|^2$ est la trace de $\varphi \circ \varphi^\dagger = [\deg\varphi]$. (2) La dimension de $E^\#$ se lit sur la formule générale de la page 56 de [GR3] : ici $\dim E^\# = 2(\dim E)^2/\operatorname{rg}\operatorname{End} E = 1$. Parce que l'involution de Rosati donne l'adjonction par rapport à la forme de Riemann H (page 238 de [Mu]), nous avons pour tout $\varphi \in \operatorname{End} E^\#$

$$\|\varphi.\mathrm{id}\|^2 = H(\varphi.\mathrm{id}, \varphi.\mathrm{id}) = H(\varphi^\dagger\varphi.\mathrm{id}, \mathrm{id}) = (\deg\varphi)\|\mathrm{id}\|^2 = \frac{|\varphi|^2}{2}\|\mathrm{id}\|^2.$$

Par suite l'isomorphisme $\operatorname{End} E^\# \to \Omega_{E^\#}$, $\varphi \mapsto \varphi.\mathrm{id}$ fournit $\operatorname{vol}(\Omega_{E^\#}) = (\|\mathrm{id}\|^2/2)\operatorname{vol}(\operatorname{End} E^\#)$ puis la formule voulue car $\operatorname{vol}(\Omega_{E^\#}) = h^0(E^\#, \mathcal{L}) = 1$ pour la polarisation principale $\mathcal{L}$ sur $E^\#$ implicite dans la notation $\|\cdot\|$. □

Voici à présent l'étape principale en direction de notre résultat d'isogénie.

Proposition 2.2. *Soient E et E' deux courbes elliptiques CM sur un corps de nombres K. Soient L une extension de K telle que E_L et E'_L sont isogènes et k le corps quadratique imaginaire $(\operatorname{End} E_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Q}$. Alors, pour tout plongement complexe de kK, les assertions suivantes valent.*

(1) *Il existe une isogénie $E_{kL} \to E'_{kL}$ de degré au plus*

$$\frac{4}{3\rho((E_{kK})^\#)^2\rho((E'_{kK})^\#)^2}.$$

(2) *Il existe une isogénie $E_L \to E'_L$ de degré au plus*

$$\frac{16}{3\rho((E_{kK})^\#)^2\rho((E'_{kK})^\#)^2}.$$

(3) *Nous avons $h_F((E_{kK})^\#) = h_F(E)$ et*

$$h_F((E'_{kK})^\#) = h_F(E') \leq h_F(E) + \frac{1}{4}\log\frac{4}{3} - \log\rho((E'_{kK})^\#).$$

Démonstration. D'après l'assertion (b) du théorème II.2.2 de [Si], la courbe elliptique E_{kK} est CM′ donc, par le lemme, $(E_{kK})^\#$ est également une courbe elliptique, ce qui donne un sens à $\rho((E_{kK})^\#)$ en sous-entendant comme convenu sa polarisation principale. Nous choisissons maintenant une courbe elliptique E_1 sur kK isogène à E_{kK} et MM (lemme 6.6 de [GR3]) puis une isogénie $\psi\colon E_{kK} \to \widetilde{E}$ qui engendre $\operatorname{Hom}(E_{kK}, \mathcal{D}(E_1))$ (voir la proposition 6.1 de [GR3]). La courbe elliptique $\widetilde{E}$ sur kK est donc MM (lemme 6.7 de [GR3]). De plus (théorème 9.12 de [GR3]) le degré de ψ est majoré par celui de l'isogénie canonique $\theta\colon (\widetilde{E} \times E_{kK})^\# \to \widetilde{E}^\#$. L'autre isogénie canonique $\theta_1\colon (\widetilde{E}\times E_{kK})^\# \to (E_{kK})^\#$ est elle un isomorphisme car son noyau s'identifie à $\Lambda(E_{kK})/\Lambda(\widetilde{E}\times E_{kK})$ (lemme 9.10 de [GR3]) et $\Lambda(\widetilde{E} \times E_{kK}) = \Lambda(\widetilde{E}) \cap \Lambda(E_{kK}) = \Lambda(E_{kK})$: en effet, par commutativité (lemme 9.11 de [GR3]), $\Lambda(\widetilde{E})$ est l'unique ordre maximal de $\Lambda(\widetilde{E}) \otimes \mathbb{Q} = \Lambda(E_{kK}) \otimes \mathbb{Q}$ (que l'on pourrait identifier à k) donc contient l'ordre $\Lambda(E_{kK})$. Notons $\chi = \theta \circ \theta_1^{-1}$ l'isogénie $(E_{kK})^\# \to \widetilde{E}^\#$ obtenue. Toujours par le lemme 9.10 de [GR3], χ fait correspondre la période canonique id de $(E_{kK})^\#$ et la période canonique $\widetilde{\mathrm{id}}$ de $\widetilde{E}^\#$. Puisque l'image réciproque par χ de la polarisation principale de $\widetilde{E}^\#$ est la puissance $\deg\chi$ de celle de $(E_{kK})^\#$, il vient

$$\rho((E_{kK})^\#)^2 \leq \|\mathrm{id}\|^2 = \frac{1}{\deg\chi}\|\widetilde{\mathrm{id}}\|^2 = \frac{2}{\deg\theta\cdot\operatorname{vol}(\operatorname{End}\widetilde{E}^\#)} \leq \frac{2}{\deg\psi\cdot\operatorname{vol}(\operatorname{End}\widetilde{E}^\#)}.$$

Considérons à présent la courbe E'. Comme E_L et E'_L sont isogènes, il en va de même de $E_{\overline{K}}$ et $E'_{\overline{K}}$ donc le corps k s'écrit aussi $(\mathrm{End}\, E'_{\overline{K}}) \otimes \mathbb{Q}$ et, par conséquent, tout ce qui précède peut se faire pour E' au lieu de E. En particulier, nous obtenons une isogénie $\psi' \colon E'_{kK} \to \widetilde{E'}$ où $\widetilde{E'}$ est une courbe elliptique CM′ et MM sur kK et

$$\deg \psi' \leq \frac{2}{\rho((E'_{kK})^{\#})^2 \operatorname{vol}(\mathrm{End}(\widetilde{E'})^{\#})}.$$

Puisque E_L et E'_L sont isogènes, il en va de même de E_{kL} et E'_{kL} et donc, grâce aux isogénies ψ_{kL} et ψ'_{kL}, de $\widetilde{E}_{kL}$ et $(\widetilde{E'})_{kL}$. Le module $\mathrm{Hom}(\widetilde{E}_{kL}, (\widetilde{E'})_{kL})$ est ainsi de rang 2. Nous le munissons de sa métrique de Rosati et lui appliquons le second théorème de Minkowski pour trouver, avec le lemme 2.1, deux isogénies $\varphi_1, \varphi_2 \colon \widetilde{E}_{kL} \to (\widetilde{E'})_{kL}$ linéairement indépendantes avec

$$\deg \varphi_1 \cdot \deg \varphi_2 = \frac{1}{4}|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2 \leq \frac{1}{3} \operatorname{vol}(\mathrm{Hom}(\widetilde{E}_{kL}, (\widetilde{E'})_{kL}))^2.$$

Maintenant les quatre courbes elliptiques $\widetilde{E}_{kL}$, $(\widetilde{E^{\#}})_{kL}$, $(\widetilde{E'})_{kL}$ et $\big((\widetilde{E'})^{\#}\big)_{kL}$ sont isogènes, CM′ et MM donc elles sont similaires (lemme 9.11 de [GR3]). Par suite (corollaire 10.4 de [GR3] où l'on remarque $\widetilde{\mathrm{vol}} = \mathrm{vol}$ lorsque les polarisations sont principales)

$$\operatorname{vol}(\mathrm{Hom}(\widetilde{E}_{kL}, (\widetilde{E'})_{kL})) = \operatorname{vol}(\mathrm{End}\, \widetilde{E}^{\#}) = \operatorname{vol}(\mathrm{End}(\widetilde{E'})^{\#}).$$

Ainsi les quatre isogénies que nous avons construites vérifient

$$\deg \psi \cdot \deg \psi' \cdot \deg \varphi_1 \cdot \deg \varphi_2 \leq \frac{4}{3\rho((E_{kK})^{\#})^2 \rho((E'_{kK})^{\#})^2}.$$

Ceci entraîne directement l'assertion (1) de l'énoncé puisque $(\widehat{\psi'})_{kL} \circ \varphi_i \circ \psi_{kL}$ est une isogénie $E_{kL} \to E'_{kL}$ de degré majoré par la quantité ci-dessus pour $i \in \{1, 2\}$. Notons ensuite τ le générateur de $\mathrm{Gal}(kL/L)$ (d'ordre 1 ou 2). Il agit sur le module $\mathrm{Hom}(E_{kL}, E'_{kL})$ de rang 2 en fixant le sous-module non trivial $\mathrm{Hom}(E_L, E'_L)$. En particulier, $(\widehat{\psi'})_{kL} \circ \varphi_i \circ \psi_{kL} + \tau\big((\widehat{\psi'})_{kL} \circ \varphi_i \circ \psi_{kL}\big)$ est un morphisme $E_L \to E'_L$ pour $i \in \{1, 2\}$. L'un des deux est non nul (car τ n'agit pas comme $-\mathrm{id}$ sur $\mathrm{Hom}(E_L, E'_L)$) donc est une isogénie de degré majoré par $4 \deg((\widehat{\psi'})_{kL} \circ \varphi_i \circ \psi_{kL})$ (d'après le lemme 2.1 la fonction $\sqrt{\deg(\cdot)}$ satisfait l'inégalité triangulaire) et nous obtenons bien l'assertion (2).

Venons-en enfin aux hauteurs de Faltings. Les deux égalités de l'assertion (3) découlent du fait que les hauteurs de deux courbes elliptiques similaires sont identiques : E_{kK} et $(E_{kK})^{\#}$ sont similaires (voir page 114 de [GR3]) et de même pour E'. Ce fait entraîne aussi que toutes les courbes MM dans la classe d'isogénie de E_{kL} ont la même hauteur et celle-ci est minimale dans la classe d'après le corollaire 1.3 de [Ré] (bien connu dans ce cas). Nous retenons $h_F(\widetilde{E'}) \leq h_F(E)$ d'où

$$h_F(E') \leq h_F(\widetilde{E'}) + \frac{1}{2} \log \deg \psi' \leq h_F(E) + \frac{1}{2} \log \frac{2}{\rho((E'_{kK})^{\#})^2 \operatorname{vol}(\mathrm{End}(\widetilde{E'})^{\#})}.$$

Pour conclure, il reste à observer que $\operatorname{vol}(\mathrm{End}(\widetilde{E'})^{\#})^2$ est la valeur absolue du discriminant du corps quadratique imaginaire k donc vaut au moins 3. □

Avant de passer à la démonstration du théorème 1.5, voici un résultat élémentaire, qui nous servira à plusieurs reprises.

Lemme 2.3. *Soit $f \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(\delta) = \pi\delta - 6\log\delta$. Elle est minorée par $f(6/\pi) = 6\log(e\pi/6)$, décroissante sur $]0, 6/\pi[$, croissante sur $[6/\pi, +\infty[$ et induit une bijection $[6/\pi, +\infty[\to [6\log(e\pi/6), +\infty[$ dont nous notons g la réciproque. Alors, pour $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons*

1. *Si $a > 0$ et $\pi a \leq 6\log a + b$ alors $b \geq 6\log(e\pi/6)$ et $a \leq g(b)$.*
2. *Si $\min(a + b, a - b) \geq 6\log(e\pi/6)$ alors $g(a + b)g(a - b) \leq g(a)^2$.*
3. *Si $a \geq \pi e - 6$ et $b \geq 1$ alors $g(ab) \leq g(a)b$.*
4. *On a $g(3\log(\frac{8\pi^3e^3}{3\sqrt{3}})) \leq 11,17$ et $g(3\log(\frac{8\pi^3e^3}{3})) \leq 11,8$.*

Démonstration. Les propriétés de f découlent immédiatement de $f'(\delta) = \pi - 6/\delta$. Dans (1), $b \geq f(a) \geq f(\max(a, 6/\pi))$ donne bien $b \geq f(6/\pi)$ et $g(b) \geq \max(a, 6/\pi) \geq a$ par croissance de g. Pour l'assertion (2), notons $x = g(a + b)$ et $y = g(a - b)$ de sorte que $f(\sqrt{xy}) = \pi\sqrt{xy} - 6\log\sqrt{xy} \leq$

$\pi(x+y)/2 - 6\log\sqrt{xy} = (f(x)+f(y))/2 = a$ entraîne bien $\sqrt{xy} \leq g(a)$. Dans (3), écrivons $z = g(a) \geq e$. Nous avons $\log b \leq b-1 \leq (b-1)\log z$ d'où $-6b\log z \leq -6\log bz$ qui donne $ab = bf(z) \leq f(bz)$ d'où $g(ab) \leq bz$. Enfin (4) découle de vérifications numériques. □

Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 1.5. Fixons un plongement complexe $\sigma\colon kK \hookrightarrow \mathbb{C}$. Par la proposition 2.2, l'hypothèse que E_L est isogène à E'_L implique l'existence d'une isogénie $E_L \to E'_L$ de degré au plus $16/3\rho((E_{kK})^{\#})^2\rho((E'_{kK})^{\#})^2$. Nous allons majorer séparément chacun des inverses des minima au moyen du lemme matriciel d'Autissier, en commençant par $(E'_{kK})^{\#}$. Dans la moyenne

$$T' = \frac{1}{[kK:\mathbb{Q}]}\sum_{\tau\colon kK\hookrightarrow\mathbb{C}} \frac{1}{\rho\big(\,(E'_{kK})^{\#}_{\tau}\,\big)^2},$$

le terme $1/\rho((E'_{kK})^{\#})^2$ apparaît deux fois : pour $\tau = \sigma$ et son conjugué $\tau = \overline{\sigma}$, puisque tous les plongements de kK sont complexes. Comme $[kK:\mathbb{Q}] \leq 2[K:\mathbb{Q}]$, on a donc $1/\rho((E'_{kK})^{\#})^2 \leq [K:\mathbb{Q}]T'$. Appliquons alors la proposition 3.2 de [GR1] à la courbe elliptique $(E'_{kK})^{\#}$ avec $\delta = \max(T', 3/\pi)$. Il vient

$$\pi\delta \leq 3\log\delta + 6h_F((E'_{kK})^{\#}) + 3\log\frac{2\pi^3 e}{3}$$

en remplaçant 8,66 par sa valeur exacte et en tenant compte de la différence de normalisation de la hauteur de Faltings : $h((E'_{kK})^{\#}) = h_F((E'_{kK})^{\#}) + (\log\pi)/2$. Grâce à la proposition 2.2 (3) qui majore la hauteur de Faltings, nous obtenons

$$\pi\delta \leq 6\log\delta + 6h_F(E) + 3\log[K:\mathbb{Q}] + 3\log\frac{4\pi^3 e}{3\sqrt{3}}.$$

Afin d'optimiser la constante numérique, commençons par le cas $[K:\mathbb{Q}] \leq 2$. Dans ce cas, on a

$$f(\delta) = \pi\delta - 6\log\delta \leq \left(3\log\frac{8\pi^3 e^3}{3\sqrt{3}}\right)\max(1, h_F(E), \log[K:\mathbb{Q}]).$$

Si $[K:\mathbb{Q}] \geq 3$, on a le même type de majoration avec la constante $3(\log 12\sqrt{3}\pi^3 e)/\log 3$ plus petite que celle du premier cas. Ainsi les points (3) et (4) du lemme 2.3 entraînent

$$\frac{1}{\rho((E'_{kK})^{\#})^2} \leq [K:\mathbb{Q}]\delta \leq [K:\mathbb{Q}] \times 11,17\max(1, h_F(E), \log[K:\mathbb{Q}]).$$

De la même manière, le nombre

$$\Delta = \max\left(\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]\rho((E_{kK})^{\#})^2}, \frac{3}{\pi}\right) \quad \text{vérifie} \quad \pi\Delta \leq 3\log\Delta + 6h_F(E) + 3\log\frac{2\pi^3 e}{3},$$

d'où l'on déduit $1/\rho((E_{kK})^{\#})^2 \leq [K:\mathbb{Q}] \times 7,71\max(1, h_F(E))$. On conclut avec $11,17 \times 7,71 \times 16/3 \leq 460$.

Si $\operatorname{End} E_L \neq \mathbb{Z}$ alors $k = (\operatorname{End} E_L)\otimes\mathbb{Q}$ agit sur l'espace tangent à E_L qui est isomorphe à L donc k est inclus dans L et $kL = L$. On applique alors le point (1) de la proposition 2.2 au lieu du (2) comme nous venons de faire, permettant *in fine* de diviser par 4 la constante numérique dans ce cas.

3. Courbes elliptiques non CM

Nous démontrons ici le théorème 1.4. Puisque le théorème 1.5 est acquis, nous pouvons nous limiter au cas où $\operatorname{End} E_{\overline{K}} = \mathbb{Z}$. Notre premier résultat nous permettra de supposer également $L = K$. Il est connu dans le cas elliptique (voir par exemple le lemme A.4 de [CN]) mais nous l'énonçons plus généralement pour les variétés abéliennes afin de l'employer aussi dans la partie 6.

Lemme 3.1. *Soit L/K une extension galoisienne. Si A et B sont deux variétés abéliennes sur K de sorte que A_L et B_L sont isogènes et $\operatorname{End} A_L = \mathbb{Z}$, il existe une variété abélienne B' sur K isogène à A telle que $B'_L \simeq B_L$. En particulier le degré minimal d'une isogénie $A_L \to B_L$ est égal au degré minimal d'une isogénie $A \to B'$.*

Démonstration. Notons $\varphi\colon A_L \to B_L$ une isogénie. Puisque $\mathrm{Hom}(A_L, B_L) \simeq \mathbb{Z}$, tout élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ agit sur ce module comme id ou $-$id. Par suite la formule $c(\sigma) = \varphi \circ \sigma(\varphi)^{-1}$ définit une application $\mathrm{Gal}(L/K) \to \{\pm \mathrm{id}\} = \mathrm{Aut}\, B_L$ qui est un 1-cocycle : en effet $c(\sigma) \circ \sigma(c(\tau)) = \varphi \circ \sigma(\varphi)^{-1} \circ \sigma(\varphi \circ \tau(\varphi)^{-1}) = \varphi \circ \sigma\tau(\varphi)^{-1} = c(\sigma\tau)$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Un tel cocycle définit une K-forme de B_L (voir page 131 de [Se]), c'est-à-dire une variété abélienne B' sur K munie d'un isomorphisme $\psi\colon B_L \to B'_L$ tel que $\psi^{-1} \circ \sigma(\psi) = c(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Alors l'isogénie $\psi \circ \varphi\colon A_L \to B'_L$ est bien l'extension d'une isogénie $\chi\colon A \to B'$ car elle vérifie $\sigma(\psi \circ \varphi) = \psi \circ c(\sigma) \circ \sigma(\varphi) = \psi \circ \varphi$. Nous avons toujours $\deg \chi = \deg \varphi$ et si φ est de degré minimal alors nous constatons $\mathrm{Hom}(A_L, B_L) = \mathbb{Z}\varphi$ et $\mathrm{Hom}(A, B') = \mathbb{Z}\chi$, d'où la dernière assertion. □

Dans cette partie, la présence d'une place réelle interviendra à travers l'énoncé suivant, qui corrige le début du paragraphe 7.5 de [GR1] (où le cas (c) ci-dessous avait été oublié).

Lemme 3.2. *Soient E une courbe elliptique sur $\mathbb{R}$ munie de sa polarisation principale. Il existe $\omega \in \Omega_E$ et un nombre réel $a \geq 1$ tels que*

(1) *$ia\omega \in \Omega_E$,*
(2) *$\|\omega\|^2 = 2/a$ et*
(3) *E est CM si et seulement si $a^2 \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Le réseau Ω_E admet une base de la forme $(\omega_0, \tau\omega_0)$ où ω_0 est de norme minimale et τ est un élément du domaine fondamental de Siegel. Notons $y = \mathrm{Im}\,\tau > 0$ de sorte que $\|\omega_0\|^2 = y^{-1}$ (voir la remarque 3.3 de [GR1]). D'après la proposition V.2.1 de [Si], nous sommes dans l'un des trois cas suivants :

(a) $\tau = iy$ et $y \geq 1$,
(b) $\tau = \frac{1}{2} + iy$ et $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$,
(c) $\tau = \sqrt{1 - y^2} + iy$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} < y < 1$.

Dans les deux premiers cas, nous posons $\omega = \omega_0$ et $a = 2y$; dans le troisième cas, nous choisissons $\omega = (1 - \tau)\omega_0$ et $a = (1 + \sqrt{1 - y^2})/y \geq y^{-1} \geq 1$. Nous calculons $ia\omega =$ (a) $2\tau\omega_0$, (b) $(2\tau - 1)\omega_0$ ou (c) $(\tau + 1)\omega_0$ d'où (1). Pour (2), nous vérifions $|1 - \tau|^2 = 2(1 - \sqrt{1 - y^2}) = 2y/a$. Enfin, comme a est un nombre réel non nul,

$$a^2 \in \mathbb{Q} \iff [\mathbb{Q}(ia) : \mathbb{Q}] = 2 \iff [\mathbb{Q}(\tau) : \mathbb{Q}] = 2 \iff E \text{ CM}$$

car $\mathbb{Q}(ia) = \mathbb{Q}(\tau)$ (dans le cas (c), $ia = (1 + \tau)/(1 - \tau)$). □

Nous nous plaçons maintenant sous les hypothèses du théorème 1.4 en supposant de plus $\mathrm{End}\, E_{\overline{K}} = \mathbb{Z}$. Notons σ une place réelle de K et Δ le degré minimal d'isogénie entre E_L et E'_L, que nous souhaitons majorer. Puisque $\mathrm{Hom}(E_{\overline{K}}, E'_{\overline{K}}) \simeq \mathrm{Hom}(E_L, E'_L)$, ce nombre est aussi le degré minimal d'isogénie entre $E_{\overline{K}}$ et $E'_{\overline{K}}$. D'après le lemme 3.1 dans l'extension galoisienne $\overline{K}/K$, il existe une nouvelle courbe elliptique E'' sur K telle que Δ est le degré minimal d'isogénie entre E et E''. Nous pouvons donc travailler entièrement sur K avec ces deux courbes. Posons $A = E \times E''$ et pour $\omega \in \Omega_A$ notons $A(\omega)$ la plus petite sous-variété abélienne de A dont le réseau des périodes contienne ω.

Lemme 3.3. *Soient (ω_1, a_1) et (ω_2, a_2) des couples associés par le lemme 3.2 à E_σ et E''_σ respectivement. L'une des deux assertions suivantes est vraie :*

(1) $\dim A(\omega_1, \omega_2) = \dim A(ia_1\omega_1, ia_2\omega_2) = 1$.
(2) $\dim A(\omega_1, ia_2\omega_2) = \dim A(ia_1\omega_1, \omega_2) = 1$.

Démonstration. Pour une isogénie $\varphi\colon E \to E''$, la différentielle $\mathrm{d}\varphi$ induit un isomorphisme $\Omega_E \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\omega_1 \oplus \mathbb{Q}ia_1\omega_1 \to \Omega_{E''} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\omega_2 \oplus \mathbb{Q}ia_2\omega_2$ donc $\mathrm{d}\varphi(\omega_1) = \alpha\omega_2 + \beta ia_2\omega_2$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puis $\mathrm{d}\varphi(ia_1\omega_1) = \alpha ia_1\omega_2 - \beta a_1a_2\omega_2 \in \Omega_{E''} \otimes \mathbb{Q}$ d'où $\alpha a_1/a_2 \in \mathbb{Q}$ et $\beta a_1a_2 \in \mathbb{Q}$. En particulier $\alpha\beta a_1^2 \in \mathbb{Q}$ donc $\alpha\beta = 0$ puisque $a_1^2 \notin \mathbb{Q}$. Le cas $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ donne directement (1) tandis que si $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ nous obtenons (2). □

Nous employons ensuite le lemme matriciel comme dans la partie précédente.

Lemme 3.4. *Soient $u_1 \in \Omega_E \setminus \{0\}$ et $u_2 \in \Omega_{E''} \setminus \{0\}$. Si $A(u_1, u_2)$ est de dimension 1 alors il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que*

$$\pi\delta \leq 3\log\delta + 6h_F(E) + 3\log[K:\mathbb{Q}]\delta\|u_1\|^2 + 3\log\frac{2\pi^3 e}{3}$$

et $\Delta \leq [K:\mathbb{Q}]^2\delta^2\|u_1\|^2\|u_2\|^2$.

Démonstration. Notons C la courbe elliptique $A(u_1, u_2) \subset A$ puis Δ_1, Δ_2 les degrés des isogénies $C \to E$ et $C \to E''$ déduites des projections. Pour la polarisation principale de C, nous avons

$$\rho(C)^2 \leq \|(u_1, u_2)\|^2 = \frac{\|u_1\|^2}{\Delta_1} = \frac{\|u_2\|^2}{\Delta_2} = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]\delta_0}$$

où nous définissons δ_0 par la dernière égalité. Ceci assure $\Delta \leq \Delta_1\Delta_2 = [K:\mathbb{Q}]^2\delta_0^2\|u_1\|^2\|u_2\|^2$. Par l'isogénie $C \to E$, nous écrivons $h_F(C) \leq h_F(E) + \frac{1}{2}\log\Delta_1 = h_F(E) + \frac{1}{2}\log[K:\mathbb{Q}]\delta_0\|u_1\|^2$. La proposition 3.2 de [GR1] pour C montre alors que $\delta = \max(\delta_0, 3/\pi)$ satisfait l'énoncé (puisque $T \geq \delta_0$ avec la notation T de cette proposition). □

Il reste à combiner ces deux lemmes.

Corollaire 3.5. *Il existe des nombres réels strictement positifs δ, δ', a_1 avec $\Delta \leq 4[K:\mathbb{Q}]^2\delta\delta'$ ainsi que, pour $\mathcal{H} = 6h_F(E) + 3\log 2[K:\mathbb{Q}] + 3\log(2\pi^3 e/3)$,*

$$\pi\delta \leq 6\log\delta + \mathcal{H} - 3\log a_1 \quad \textit{et} \quad \pi\delta' \leq 6\log\delta' + \mathcal{H} + 3\log a_1.$$

Démonstration. Notons (u_1, u_2) et (u_1', u_2') les deux couples donnés par le lemme 3.3 et appliquons-leur le lemme 3.4 pour obtenir respectivement δ et δ'. Comme $\|u_1\|^2 = \|\omega_1\|^2 = 2/a_1$ et $\|u_1'\|^2 = \|ia_1\omega_1\|^2 = 2a_1$ nous obtenons les majorations de $\pi\delta$ et $\pi\delta'$. Puisque, de même, $\{\|u_2\|^2, \|u_2'\|^2\} = \{2/a_2, 2a_2\}$, le produit des deux majorations de Δ donne bien

$$\Delta \leq [K:\mathbb{Q}]^2\delta\delta'\|u_1\|\|u_1'\|\|u_2\|\|u_2'\| = 4[K:\mathbb{Q}]^2\delta\delta'.$$

□

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème 1.4. Posons $H = \max(1, h_F(E), \log[K:\mathbb{Q}])$. Le nombre $\mathcal{H}$ du corollaire est majoré par $3\log(8\pi^3 e^3/3)H$: c'est immédiat si $[K:\mathbb{Q}] \leq 2$ et, lorsque $[K:\mathbb{Q}] \geq 3$, on peut multiplier la constante numérique dans $\mathcal{H}$ par $H/\log 3$, ce qui donne $\mathcal{H} \leq (9 + (3\log 4\pi^3 e/3)/\log 3)H$ puis la majoration annoncée. En employant successivement les quatre assertions du lemme 2.3, nous en déduisons

$$\delta\delta' \leq g(\mathcal{H} - \log a_1)g(\mathcal{H} + \log a_1) \leq g(\mathcal{H})^2 \leq g(3\log(8\pi^3 e^3/3)H)^2 \leq (11{,}8H)^2$$

et donc $\Delta \leq (23{,}6[K:\mathbb{Q}]H)^2$. La conclusion découle de $(23{,}6)^2 \leq 557$.

4. Scindage

Dans cette partie, nous établissons le théorème 1.1 ainsi que quelques propriétés supplémentaires des variétés abéliennes $A^{\#,\pm}$ qui y apparaissent. Nous nous plaçons donc sur un sous-corps K de $\mathbb{R}$. Comme toujours, pour une variété abélienne A sur K, nous notons t_A et Ω_A l'espace tangent et le réseau des périodes de $A_{\mathbb{C}}$. Pour la définition suivante, nous désignons aussi par T_A l'espace tangent de la variété abélienne réelle $A_{\mathbb{R}}$. Par extension des scalaires, nous avons un isomorphisme canonique $t_A \simeq T_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Définition 4.1. Pour une variété abélienne A sur K, nous notons $\xi_A\colon t_A \to t_A$ l'automorphisme involutif et antilinéaire correspondant sur $T_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ au produit tensoriel de l'identité $T_A \to T_A$ et de la conjugaison complexe.

Dans la suite, A désigne toujours une variété abélienne sur K. La définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ a été rappelée au début de la partie 2.

Lemme 4.2. *Nous avons $\xi_A(\Omega_A) = \Omega_A$ et ξ_A est une isométrie pour toute norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ associée à une polarisation $\mathcal{L}$ sur A.*

Démonstration. Nous vérifions que ξ_A s'identifie au morphisme df de la proposition 2.2 de [GR1] : en effet ici $A_{\mathbb{C}}$ et $\overline{A_{\mathbb{C}}}$ sont canoniquement isomorphes et df induit l'identité sur T_A ; par anti-linéarité nous avons bien $\mathrm{df} = \xi_A$. □

Pour chaque choix de signe, notons $\Omega_A^{\pm} = (\mathrm{id} \pm \xi_A)(\Omega_A)$.

Lemme 4.3. *Nous avons* $\operatorname{rg} \Omega_A^{\pm} = \dim A$ *et* $2\Omega_A \subset \Omega_A^+ \oplus \Omega_A^- \subset \Omega_A$.

Démonstration. Nous avons $\mathbb{R}\Omega_A^+ = (\mathrm{id} + \xi_A)(t_A) = T_A$ et $\mathbb{R}\Omega_A^- = (\mathrm{id} - \xi_A)(t_A) = iT_A$. Ceci entraîne $\operatorname{rg} \Omega_A^+ \geq \dim_{\mathbb{R}} T_A = \dim A$ et $\operatorname{rg} \Omega_A^- \geq \dim A$ ainsi que $\Omega_A^+ \cap \Omega_A^- = \{0\}$. L'égalité $2x = (\mathrm{id} + \xi_A)(x) + (\mathrm{id} - \xi_A)(x)$ fournit les inclusions de l'énoncé qui forcent $\operatorname{rg} \Omega_A^+ \oplus \Omega_A^- = 2\dim A$ d'où $\operatorname{rg} \Omega_A^{\pm} = \dim A$. □

Nous désignons maintenant par $\varrho(\cdot)$ le rayon de recouvrement d'un réseau euclidien.

Lemme 4.4. *Lorsque t_A est muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ associée à une polarisation de A, les réseaux Ω_A^+ et Ω_A^- sont orthogonaux et* $\varrho(\Omega_A)^2 \leq \varrho(\Omega_A^+)^2 + \varrho(\Omega_A^-)^2 \leq 4\varrho(\Omega_A)^2$.

Démonstration. L'orthogonalité découle du fait que ξ_A est une involution isométrique (lemme 4.2) : si $x, y \in \Omega_A$, nous avons pour le produit scalaire associé

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{id} + \xi_A)(x), (\mathrm{id} - \xi_A)(y)\rangle &= \langle x + \xi_A(x), y - \xi_A(y)\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle \xi_A(x), \xi_A(y)\rangle + \langle \xi_A(x), y\rangle - \langle x, \xi_A(y)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Les inégalités cherchées se déduisent alors des inclusions du lemme 4.3 puisque $\varrho(2\Omega_A) = 2\varrho(\Omega_A)$ et, par orthogonalité, $\varrho(\Omega_A^+ \oplus \Omega_A^-)^2 = \varrho(\Omega_A^+)^2 + \varrho(\Omega_A^-)^2$. □

Venons-en aux propriétés fonctorielles de ξ. Soient donc A et B deux variétés abéliennes sur K et $\varphi\colon A \to B$ un morphisme. Il résulte de la définition 4.1 que nous avons $\xi_B \circ \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi \circ \xi_A$ puisque $\mathrm{d}\varphi\colon t_A \to t_B$ est l'extension $\mathbb{C}$-linéaire d'un morphisme $\mathbb{R}$-linéaire $T_A \to T_B$. De manière analogue, l'automorphisme $\xi_{A\times B}$ de $t_{A\times B} = t_A \oplus t_B$ s'identifie au produit $\xi_A \times \xi_B$. En particulier, ξ_A commute à l'action de $\operatorname{End} A$ sur t_A et, puisqu'il laisse stable Ω_A, il induit un élément de $\Lambda(A) = \operatorname{End}_{\operatorname{End} A} \Omega_A$ que nous continuons à noter ξ_A. Il lui correspond à son tour, à travers l'isomorphisme $\operatorname{End} A^{\#} \simeq \Lambda(A)^{\mathrm{op}}$ du lemme 9.7 de [GR3], un automorphisme involutif $\tau_A\colon A^{\#} \to A^{\#}$, caractérisé par $\mathrm{d}\tau_A(\mathrm{id}) = \xi_A$ ($\mathrm{d}\tau_A$ est un automorphisme de $\Omega_{A^{\#}} = \Lambda(A)$). Ceci nous permet d'introduire les personnages principaux de cette partie : les sous-variétés abéliennes $A^{\#,+}$ et $A^{\#,-}$ de $A^{\#}$ sont définies par la formule

$$A^{\#,\pm} = \operatorname{Im}\bigl(\mathrm{id}_{A^{\#}} \pm \tau_A\bigr)$$

et munies chacune d'une période privilégiée $\mathrm{id}^{\pm} = \mathrm{id} \pm \xi_A = \mathrm{d}(\mathrm{id}_{A^{\#}} \pm \tau_A)\,(\mathrm{id})$. Pour une seconde variété abélienne B sur K, la description ci-dessus de $\xi_{A\times B}$ montre que cet élément a pour image ξ_A à travers le morphisme d'anneaux naturel $\Lambda(A \times B) \to \Lambda(A)$ du lemme 9.2 de [GR3]. Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, à ce morphisme correspond un morphisme canonique de variétés abéliennes $\theta\colon (A \times B)^{\#} \to A^{\#}$ qui vérifie $\mathrm{d}\theta(\xi_{A\times B}) = \xi_A$ d'où $\theta \circ \tau_{A\times B} = \tau_A \circ \theta$. Par suite, θ induit bien deux morphismes $\theta^{\pm}\colon (A \times B)^{\#,\pm} \to A^{\#,\pm}$ avec $\mathrm{d}\theta^{\pm}(\mathrm{id}^{\pm}) = \mathrm{id}^{\pm}$.

Nous savons donc à ce stade que les assertions (3) et (5) du théorème 1.1 sont vérifiées. Son assertion (2) découle quant à elle de l'énoncé suivant.

Lemme 4.5. *L'application de somme $s_A\colon A^{\#,+} \times A^{\#,-} \to A^{\#}$ et la restriction $p_A\colon A^{\#} \to A^{\#,+} \times A^{\#,-}$ de $(\mathrm{id} + \tau_A, \mathrm{id} - \tau_A)$ sont deux isogénies vérifiant $s_A \circ p_A = [2]$ et $p_A \circ s_A = [2]$. Si* $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$ *alors $\theta^{\pm}$ est une isogénie.*

Démonstration. Les formules pour $s_A \circ p_A$ et $p_A \circ s_A$ sont respectivement immédiate et conséquence de $\tau_A^2 = \mathrm{id}$. Elles entraînent que s_A et p_A sont des isogénies. Lorsque $\operatorname{Supp} B \subset \operatorname{Supp} A$, le lemme 9.10 de [GR3] assure que θ est une isogénie. L'égalité $\theta \circ s_{A\times B} = s_A \circ (\theta^+ \times \theta^-)$ montre qu'il en va de même de $\theta^+ \times \theta^-$ donc de θ^+ et θ^-. □

Nous obtenons encore facilement l'assertion (4) du théorème 1.1.

Lemme 4.6. *Si B est une sous-variété abélienne de $A^{\#,\pm}$ telle que* $\mathrm{id}^{\pm} \in \Omega_B$ *alors* $B = A^{\#,\pm}$.

Démonstration. Si $C = B + A^{\#,\mp}$ alors $2\mathrm{id} = \mathrm{id}^+ + \mathrm{id}^- \in \Omega_C$ donc $\mathrm{id} \in \Omega_{A^{\#}} \cap t_C = \Omega_C$. D'après le lemme 9.6 de [GR3] nous avons $C = A^{\#}$ d'où $B = A^{\#,\pm}$. □

Nous terminerons d'établir le théorème 1.1 après deux énoncés intermédiaires.

Lemme 4.7. *Le morphisme* $\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm},A) \to \Omega_A$, $f \mapsto \mathrm{d}f(\mathrm{id}^{\pm})$ *est injectif et son image* $\Lambda^{\pm}$ *vérifie* $\Omega_A^{\pm} \subset \Lambda^{\pm} \subset \frac{1}{2}\Omega_A^{\pm}$. *Si A est MM, alors* $\Lambda^{\pm} = \Omega_A^{\pm}$.

Démonstration. Fixons un signe puis notons pour alléger ι l'inclusion $A^{\#,\pm} \hookrightarrow A^{\#}$ et $\pi\colon A^{\#} \to A^{\#,\pm}$ le morphisme tel que $\iota\circ\pi = \mathrm{id} \pm \tau_A$. D'après le lemme 4.5, nous avons $\pi\circ\iota = [2]$. Désignons ensuite par η l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(A^{\#},A) \to \Omega_A$, $F \mapsto \mathrm{d}F(\mathrm{id})$ (lemme 9.6 de [GR3]). Puisque $\mathrm{id}^{\pm} = \mathrm{d}\pi(\mathrm{id})$, le morphisme de l'énoncé s'écrit $f \mapsto \eta(f\circ\pi)$. En particulier, il est injectif puisque $\cdot\circ\pi\colon \mathrm{Hom}(A^{\#,\pm},A) \to \mathrm{Hom}(A^{\#},A)$ l'est et nous avons $\eta^{-1}(\Lambda^{\pm}) = \mathrm{Im}(\cdot\circ\pi)$. De façon analogue, nous trouvons $\eta^{-1}(\Omega_A^{\pm}) = \mathrm{Im}(\cdot\circ\iota\circ\pi)$ en vertu des égalités $(\mathrm{id}\pm\xi_A)(\mathrm{d}F(\mathrm{id})) = \mathrm{d}F(\mathrm{id}\pm\xi_A) = \mathrm{d}(F\circ(\mathrm{id}\pm\tau_A))(\mathrm{id}) = \mathrm{d}(F\circ\iota\circ\pi)(\mathrm{id})$ pour $F \in \mathrm{Hom}(A^{\#},A)$ (rappelons que $\mathrm{d}F$ est $\Lambda(A)$-linéaire). Ainsi les inclusions cherchées découlent de $\mathrm{Im}(\cdot\circ\iota\circ\pi) \subset \mathrm{Im}(\cdot\circ\pi)$ et $2\,\mathrm{Im}(\cdot\circ\pi) = \mathrm{Im}(\cdot\circ\pi\circ\iota\circ\pi) \subset \mathrm{Im}(\cdot\circ\iota\circ\pi)$. Lorsque A (et donc $A^{\#}$) est MM, $A^{\#,\pm}$ est facteur direct de $A^{\#}$ c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $\varpi\colon A^{\#} \to A^{\#,\pm}$ tel que $\varpi\circ\iota = \mathrm{id}$. Par suite $\mathrm{Im}(\cdot\circ\pi) = \mathrm{Im}(\cdot\circ\varpi\circ\iota\circ\pi) \subset \mathrm{Im}(\cdot\circ\iota\circ\pi)$. □

Dans le cas MM, la formation des $(\cdot)^{\#,\pm}$ respecte les composantes isotypiques (voir le chapitre 3 de [GR3] pour les définitions ; en particulier S désigne l'ensemble des classes d'isogénie de variétés abéliennes simples).

Lemme 4.8. *Si A est MM alors* $A^{\#,\pm}$ *est MM et* $(A^{\#,\pm})_x = (A_x)^{\#,\pm}$ *pour* $x \in S$.

Démonstration. La première assertion découle de $A^{\#,\pm} \subset A^{\#}$. Pour la seconde, nous constatons simplement que, dans $A^{\#} = \prod_{x\in S} A_x^{\#}$, l'automorphisme τ_A est le produit des τ_{A_x}. □

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème 1.1.

Lemme 4.9. *Nous avons* $\dim A^{\#,\pm} = \frac{1}{2}\dim A^{\#}$.

Démonstration. Par isogénies (de la forme $\theta^{\pm}$) nous pouvons supposer A MM et même simple par le lemme précédent. Dans ce cas, $A^{\#,\pm}$ et $A^{\#}$ sont similaires à des puissances de A donc il suffit de vérifier $\mathrm{rg}\,\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm},A) = \frac{1}{2}\mathrm{rg}\,\mathrm{Hom}(A^{\#},A)$. Or $\mathrm{Hom}(A^{\#},A) \simeq \Omega_A$ (lemme 9.6 de [GR3]) est de rang $2\dim A$ tandis que $\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm},A) \simeq \Omega_A^{\pm}$ (lemme 4.7) est de rang $\dim A$ (lemme 4.3) □

Terminons par deux résultats qui trouveront leur utilité dans la partie suivante.

Lemme 4.10. *Soient* $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \mathrm{Hom}(A^{\#,\pm},A)$ *et* $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\colon A^{\#,\pm} \to A^n$. *Si* $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ *engendrent le* $\mathrm{End}\,A$*-module à gauche* $\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm},A)$ *alors* $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. *S'ils engendrent un sous-module d'indice fini alors* $\mathrm{Ker}\,\varphi$ *est fini.*

Démonstration. D'après le théorème 9.5 de [GR3], nous avons une injection $\psi\colon A^{\#,\pm} \hookrightarrow A^{\#} \hookrightarrow A^{2\dim A}$ définie par $\psi_1,\ldots,\psi_{2\dim A} \in \mathrm{Hom}(A^{\#,\pm},A)$. Lorsque $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ engendrent ce module, il existe une matrice de $\mathrm{M}_{2\dim A,n}(\mathrm{End}\,A)$ qui permet d'exprimer les ψ_i en fonction des φ_i, autrement dit un morphisme $\chi\colon A^n \to A^{2\dim A}$ tel que $\chi\circ\varphi = \psi$. Ceci force bien $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. Lorsque $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ engendrent seulement un sous-module fini, il existe un tel χ et un entier $N \geq 1$ tels que $\chi\circ\varphi = N\psi$ donc $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fini. □

Nous donnerons le second fait après un lemme auxiliaire général.

Lemme 4.11. *Soient* X, Y, Z *trois variétés abéliennes isotypiques similaires et* $p\colon X \to Y$ *une isogénie. Si nous voyons* $\mathrm{Hom}(Y,Z)$ *comme un sous-module de* $\mathrm{Hom}(X,Z)$ *à travers* $\cdot\circ p$ *alors*

$$[\mathrm{Hom}(X,Z) : \mathrm{Hom}(Y,Z)]^{2\dim X} = (\deg p)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\,X}.$$

Démonstration. Si, pour un entier $N \geq 1$, nous remplaçons X, Y, Z par X^N, Y^N, Z^N et p par sa puissance $p^{\times N}\colon X^N \to Y^N$, les deux membres sont élevés à la puissance N^3. Par suite, nous pouvons supposer $X = Y = Z$. Dans ce cas, associer à p l'un des deux membres est une norme sur l'algèbre simple $\mathrm{End}\,X \otimes \mathbb{Q}$ (voir pages 178−179 de [Mu]). Il suffit alors de constater que l'égalité est vraie pour $p = [n]$ avec $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. □

Notre dernier énoncé calcule le degré de l'isogénie s_A du lemme 4.5.

Proposition 4.12. *Si A est MM, nous avons* $(\deg s_A)^{1/\dim A^{\#}}[\Omega_A : \Omega_A^{+} \oplus \Omega_A^{-}]^{1/\dim A} = 4$.

Démonstration. Par produit, nous pouvons supposer que A est simple. D'après le lemme 4.7, nous écrivons pour tout entier $k \geq 1$

$$\begin{aligned}[\Omega_A : \Omega_A^+ \oplus \Omega_A^-] &= [\mathrm{Hom}(A^\#, A) : \mathrm{Hom}(A^{\#,+} \times A^{\#,-}, A)] \\ &= [\mathrm{Hom}(A^\#, A^k) : \mathrm{Hom}(A^{\#,+} \times A^{\#,-}, A^k)]^{1/k}\end{aligned}$$

où l'inclusion est $\cdot \circ p_A$. Lorsque $k = \dim A^\# / \dim A$, les variétés isotypiques $A^\#$, $A^{\#,+} \times A^{\#,-}$ et A^k sont similaires donc le lemme 4.11 s'applique et donne

$$[\Omega_A : \Omega_A^+ \oplus \Omega_A^-]^{1/\dim A} = (\deg p_A)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{End}\, A^\# / 2(\dim A^\#)^2} = (\deg p_A)^{1/\dim A^\#}$$

avec l'assertion (2) du lemme 9.7 de [GR3]. La formule à établir devient donc $\deg s_A \circ p_A = 4^{\dim A^\#}$ et résulte de $s_A \circ p_A = [2]$ (lemme 4.5). □

5. Théorème des périodes

Nous établissons dans cette partie le théorème 1.2. Il va s'agir de reprendre les arguments des chapitres 14 et 16 de [GR3], qui concernaient $A^\#$, pour les adapter aux sous-variétés $A^{\#,+}$ et $A^{\#,-}$. Les énoncés et démonstrations resteront très proches de leurs contreparties dans [GR3] sauf pour l'intervention des volumes des réseaux Ω_A, Ω_A^+ et Ω_A^- (toujours pour une norme euclidienne de la forme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$).

Commençons par l'analogue du théorème 14.2 de [GR3]. Le corps de base K y est un sous-corps quelconque de $\mathbb{R}$ comme dans la partie précédente (dont nous conservons les notations).

Théorème 5.1. *Soient A une variété abélienne simple et MM, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample et symétrique sur A et $\varepsilon \in]0,1[$ un réel. Pour tout réel*

$$\mu \geq \frac{4 \dim A}{\varepsilon^2 \dim A^\#} \varrho(\Omega_A^\pm)^2,$$

il existe un faisceau inversible $\mathcal{N}^\pm$ ample et symétrique sur $A^{\#,\pm}$ vérifiant $\|\mathrm{id}^\pm\|^2_{\mathcal{N}^\pm} \leq \dim A^\# \cdot \mu$ et

$$h^0(A^{\#,\pm}, \mathcal{N}^\pm)^2 \geq \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A^\#) \left(\mu(1-\varepsilon)^2\right)^{\dim A^\#} \left(\frac{\mathrm{vol}(\Omega_A)}{\mathrm{vol}(\Omega_A^\pm)^2}\right)^{\frac{\dim A^\#}{\dim A}}.$$

Démonstration. Notons $g = \dim A$ et $k = \dim A^\# / \dim A$. Appliquons la proposition 14.1 de [GR3] au réseau euclidien $(\Omega_A^\pm, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ de rang $n = g$ et au réel ε. Nous obtenons une famille libre $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega_A^\pm$ vérifiant les conditions de cette proposition avec $r = \sqrt{k\mu}$. Désignons à présent par f_i $(1 \leq i \leq g)$ l'image réciproque de ω_i par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm}, A) \to \Omega_A^\pm$ du lemme 4.7. Définissons alors

$$\mathcal{N}^\pm = \bigotimes_{i=1}^{g} f_i^* \mathcal{L}$$

sur $A^{\#,\pm}$. Ce faisceau inversible (symétrique) est ample car le morphisme $(f_1, \ldots, f_g)\colon A^{\#,\pm} \to A^g$ est fini d'après le lemme 4.10. Pour la norme de la période privilégiée, nous avons

$$\|\mathrm{id}^\pm\|^2_{\mathcal{N}^\pm} = \sum_{i=1}^{g} \|\, \mathrm{d}f_i(\mathrm{id}^\pm)\|^2_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{g} \|\omega_i\|^2_{\mathcal{L}} \leq g r^2 = \dim A^\# \cdot \mu.$$

Puisque A est MM, $A^{\#,\pm}$ est similaire à $A^{k/2}$ (lemme 4.9) donc, par le corollaire 10.4 de [GR3], il vient

$$\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A^\#)^{1/2k} = \widetilde{\mathrm{vol}}(\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm}, A)) = \frac{h^0(A^{\#,\pm}, \mathcal{N}^\pm)^{1/k}}{h^0(A, \mathcal{L})^{1/2}} \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm}, A))$$

où le dernier volume est défini par la métrique de Rosati associée à $\mathcal{N}^\pm$ et $\mathcal{L}$. Par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm}, A) \to \Omega_A^\pm$, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm}, A))}{\mathrm{vol}(\Omega_A^\pm)} = \frac{\mathrm{vol}\left(\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z} f_i\right)}{\mathrm{vol}\left(\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}\omega_i\right)} \leq \frac{\prod_{i=1}^g |f_i|}{(r(1-\varepsilon))^g} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^g |f_i|^2\right)^{g/2}}{\left(\sqrt{gk\mu}(1-\varepsilon)\right)^g} = \left(\mu(1-\varepsilon)^2\right)^{-g/2}$$

car $\sum_{i=1}^{g}|f_i|^2$ est la trace de $\sum_{i=1}^{g} f_i^\dagger \circ f_i$ pour l'involution de Rosati généralisée † sur $\mathrm{Hom}(A^{\#,\pm}, A)$ et, par définition,

$$\phi_{\mathcal{N}^\pm} = \sum_{i=1}^{g} \phi_{f_i^*\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{g} \widehat{f_i} \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ f_i = \sum_{i=1}^{g} \phi_{\mathcal{N}^\pm} \circ f_i^\dagger \circ f_i$$

d'où $\sum_{i=1}^{g} f_i^\dagger \circ f_i = \mathrm{id}_{A^{\#,\pm}}$ puis $\sum_{i=1}^{g}|f_i|^2 = 2\dim A^{\#,\pm} = kg$. En revenant à la formule pour $\mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A^{\#})^{1/2k}$ et en rappelant $h^0(A,\mathcal{L}) = \mathrm{vol}(\Omega_A)$, nous obtenons bien l'inégalité cherchée. □

Nous supposons dorénavant que K est un corps de nombres avec une place réelle fixée et nous notons si besoin $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ le plongement correspondant. Nous introduisons des notations compatibles avec celles du chapitre 16 de [GR3]. Soit C une variété abélienne sur K. Nous lui associons les entiers $n = \dim C^{\#}$ et $m = \dim C^{\#,\pm} = n/2$ ainsi que les réels $\Upsilon = \Upsilon(\mathrm{Supp}\, C)$ et

$$H = \max\left(h_F(C) + \frac{3}{2}\dim C, \log[K:\mathbb{Q}], 1\right).$$

Nous cherchons donc à montrer la majoration suivante (réécriture du théorème 1.2).

Théorème 5.2. *Nous avons* $\Upsilon \leq 38(em)^n n^5 [K:\mathbb{Q}] H$.

Nous posons encore $C^\flat = (\mathrm{Supp}\, C)^\flat$ (notation 13.2 de [GR3]). Comme $C^\flat = (C^\flat)^{\#}$, nous nous autorisons à noter simplement $C^{\flat,\pm}$ pour désigner la sous-variété $(C^\flat)^{\#,\pm}$ de $C^\flat$. D'un autre côté, nous fixons pour chaque $x \in S$ une variété abélienne simple A_x de support $\{x\}$, MM et de hauteur de Faltings minimale dans sa classe d'isogénie. Nous formons le produit

$$A = \prod_{x \in \mathrm{Supp}\, C} A_x$$

et considérons l'isogénie canonique $\theta\colon C^\flat \to A^{\#}$ (bas de la page 80 de [GR3]) qui induit deux isogénies $\theta^\pm\colon C^{\flat,\pm} \to A^{\#,\pm}$.

Lemme 5.3. *Nous avons* $h_F(C^{\flat,\pm}) \leq m\,(H - 3/2 + \log\Upsilon)$.

Démonstration. Dans l'inégalité $h_F(C^{\flat,\pm}) \leq h_F(A^{\#,\pm}) + \frac{1}{2}\log\deg\theta^\pm$, nous utilisons $h_F(A^{\#,\pm}) = h_F(A^{\#})/2$ (car $A^{\#}$ et $(A^{\#,\pm})^2$ sont similaires, voir les lemmes 4.8 et 4.9) et $\deg\theta^\pm \leq \deg\theta$. De plus la démonstration du lemme 16.2 de [GR3] fournit les majorations $\deg\theta \leq \Upsilon^n$ et $h_F(A^{\#}) \leq n(H - 3/2)$. □

Pour adapter la proposition 16.3 de [GR3], nous associons à $\varepsilon \in]0,1[$ la quantité

$$\mu = 2^{14m^2}\varepsilon^{-2}\Upsilon^m [K:\mathbb{Q}](H + 0{,}16m^2 + m^2\log\Upsilon).$$

Nous fixons aussi pour tout $x \in S$ un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{L}_x$ sur A_x tel que $h^0(A_x, \mathcal{L}_x)$ est minimal.

Proposition 5.4. *Pour tout* $x \in \mathrm{Supp}\, C$*, il existe un faisceau inversible* $\mathcal{N}_x^\pm$ *ample et symétrique sur* $A_x^{\#,\pm}$ *avec* $\|\mathrm{id}^\pm\|^2_{\mathcal{N}_x^\pm,\sigma} \leq \dim A_x^{\#} \cdot \mu$ *et*

$$h^0(A_x^{\#,\pm}, \mathcal{N}_x^\pm)^2 \geq \mathrm{vol}(\mathrm{End}\, A_x^{\#})\left(\mu(1-\varepsilon)^2\right)^{\dim A_x^{\#}} \left(\frac{\mathrm{vol}(\Omega_{A_x})}{\mathrm{vol}(\Omega_{A_x}^\pm)^2}\right)^{\frac{\dim A_x^{\#}}{\dim A_x}}.$$

Démonstration. Notons $g = \dim A_x$ de sorte que, d'après le théorème 5.1, il suffit de vérifier

$$\frac{4g}{\varepsilon^2 \dim A_x^{\#}}\varrho(\Omega_{A_x}^\pm)^2 \leq \mu.$$

Nous supposons dans un premier temps $g \geq 2$. Nous utilisons $\varrho(\Omega_{A_x}^\pm) \leq 2\varrho(\Omega_{A_x})$ (lemme 4.4), $\varrho(\Omega_{A_x}) \leq \sqrt{g/2}\lambda_{2g}(\Omega_{A_x})$ (lemme 1 de [Ba]) et

$$\lambda_{2g}(\Omega_{A_x})^2 \leq (4^6 g)^{2g} h^0(A_x, \mathcal{L}_x)^{1/g}[K:\mathbb{Q}]\max\left(1, h_F(A_x), \log h^0(A_x, \mathcal{L}_x)\right)$$

(théorème 1.5 de [GR4]). Dans cette expression, $h_F(A_x) \leq H - 3g/2 \leq H$ (lemme 16.2 de [GR3]) et $h^0(A_x, \mathcal{L}_x) \leq (8g)^{g/4}\Upsilon^{gm}$ (voir page 99 de [GR3]). Il vient en particulier $h^0(A_x, \mathcal{L}_x)^{1/g} \leq g\Upsilon^m$ et nos majorations réunies donnent

$$\frac{4g}{\varepsilon^2 \dim A_x^{\#}} \varrho(\Omega_{A_x}^{\pm})^2 \leq \frac{8g^3 \left(4^6 g\right)^{2g}}{\varepsilon^2 \dim A_x^{\#}} \Upsilon^m [K : \mathbb{Q}] \max\Big(H, \frac{g}{4}\log 8g + gm\log\Upsilon\Big).$$

Comme $A_x^{\#,\pm}$ est similaire à une puissance de A_x, nous avons $g \leq \dim A_x^{\#,\pm} \leq m$. Le résultat découle donc de $2g \leq \dim A_x^{\#}$ et $4g^2(4^6 g)^{2g} \leq 2^{14g^2}$ ainsi que $\frac{g}{4}\log 8g \leq 1 + 0,16g^2$. Dans le cas $g = 1$, le même calcul est possible en remplaçant $h^0(A_x, \mathcal{L}_x)$ par 1 et $(4^6 g)^{2g}$ par 19 (lemme 8.9 de [GR4]). □

Nous nous sommes ici écartés de l'argument correspondant dans [GR3] en employant le théorème 1.5 de [GR4], plus efficace que la conjonction du second théorème de Minkowski et du théorème des périodes. Cette nouvelle approche permettrait également de diminuer la valeur de μ utilisée dans [GR3].

Nous utilisons à présent la proposition 13.4 de [GR3] qui fournit un ordre total $\preceq$ sur S et une fonction $p\colon S \to [0, +\infty[$ croissante pour $\preceq$, nulle en dehors de $\operatorname{Supp} C$, vérifiant $p \bullet \nu \neq 0$ et telle que

$$\Upsilon = \left(\mathcal{D}(\theta, \preceq, p) \prod_{x \in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A_x^{\#})^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p\bullet\nu}}.$$

Nous introduisons deux nouveaux réels par

$$\Upsilon^{\pm} = \left(\mathcal{D}(\theta^{\pm}, \preceq, p)^2 \prod_{x \in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A_x^{\#})^{p(x)} \left(\frac{\operatorname{vol}(\Omega_{A_x})}{\operatorname{vol}(\Omega_{A_x}^{\pm})^2}\right)^{\frac{p(x)\nu(x)}{d_A(x)}}\right)^{\frac{1}{p\bullet\nu}}.$$

Lemme 5.5. *Nous avons $\Upsilon \leq 4\sqrt{\Upsilon^+\Upsilon^-}$.*

Démonstration. En notant $s = s_A$ et $s' = s_{C^\flat}$ les applications de somme comme dans le lemme 4.5, nous disposons d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C^{\flat,+} \times C^{\flat,-} \arrow[r, "\theta^+ \times \theta^-"] \arrow[d, "s'"'] & A^{\#,+} \times A^{\#,-} \arrow[d, "s"] \\ C^{\flat} \arrow[r, "\theta"] & A^{\#} \end{tikzcd}$$

sur lequel nous lisons l'égalité de degrés pondérés

$$\mathcal{D}(\theta, \preceq, p)\mathcal{D}(s', \preceq, p) = \mathcal{D}(s, \preceq, p)\mathcal{D}(\theta^+, \preceq, p)\mathcal{D}(\theta^-, \preceq, p).$$

Puisque A est MM, nous évaluons au moyen de la proposition 4.12

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(s, \preceq, p) = \prod_{x \in S} (\deg s_{A_x})^{p(x)} &= 4^{p\bullet\nu} \prod_{x \in S} [\Omega_{A_x} : \Omega_{A_x}^+ \oplus \Omega_{A_x}^-]^{-\frac{p(x)\nu(x)}{d_A(x)}} \\ &= 4^{p\bullet\nu} \prod_{x \in S} \left(\frac{\operatorname{vol}(\Omega_{A_x})}{\operatorname{vol}(\Omega_{A_x}^+ \oplus \Omega_{A_x}^-)}\right)^{\frac{p(x)\nu(x)}{d_A(x)}} \end{aligned}$$

(rappelons que par définition $\nu(x) = \dim A_x^{\#}$ et $d_A(x) = \dim A_x$). L'orthogonalité de la somme directe (lemme 4.4) entraîne $\operatorname{vol}(\Omega_{A_x}^+ \oplus \Omega_{A_x}^-) = \operatorname{vol}(\Omega_{A_x}^+)\operatorname{vol}(\Omega_{A_x}^-)$ puis

$$\mathcal{D}(\theta, \preceq, p)\mathcal{D}(s', \preceq, p) \prod_{x \in S} \operatorname{vol}(\operatorname{End} A_x^{\#})^{p(x)} = \left(4\sqrt{\Upsilon^+\Upsilon^-}\right)^{p\bullet\nu}.$$

La majoration souhaitée équivaut donc à $\mathcal{D}(s', \preceq, p) \geq 1$ et ceci est vrai par positivité de p. □

Formons le faisceau $\mathcal{N}^{\pm}$ sur $A^{\#,\pm}$ produit des $\mathcal{N}_x^{\pm}$ donnés par la proposition 5.4. La définition de δ_σ (pages 91–92 de [GR3]) et le lemme 4.6 entraînent

$$\delta_\sigma\big(C^{\flat,\pm},(\theta^{\pm})^*\mathcal{N}^{\pm}\big)^2 \leq \|\mathrm{id}^{\pm}\|^2_{(\theta^{\pm})^*\mathcal{N}^{\pm},\sigma} = \|\mathrm{id}^{\pm}\|^2_{\mathcal{N}^{\pm},\sigma} = \sum_{x\in\operatorname{Supp} C}\|\mathrm{id}^{\pm}\|^2_{\mathcal{N}_x^{\pm},\sigma}$$
$$\leq \mu\sum_{x\in\operatorname{Supp} C}\dim A_x^{\#} = 2m\mu.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\mathcal{D}\left((\theta^{\pm})^*\mathcal{N}^{\pm},\preceq,p\right) = \mathcal{D}(\theta^{\pm},\preceq,p)\prod_{x\in S}h^0(A_x^{\#,\pm},\mathcal{N}_x^{\pm})^{p(x)}$$
$$\geq \left(\mu\Upsilon^{\pm}(1-\varepsilon)^2\right)^{\frac{p\bullet\nu}{2}} = \left(\mu\Upsilon^{\pm}(1-\varepsilon)^2\right)^{p\bullet d_{C^{\flat,\pm}}}.$$

D'après le lemme 15.8 de [GR3], nous en déduisons $y^{\pm}\leq\left(\mu\Upsilon^{\pm}(1-\varepsilon)^2\right)^{-1}$ où $y^{\pm}$ est le réel associé (page 91 de [GR3]) à la variété abélienne polarisée $\big(C^{\flat,\pm},(\theta^{\pm})^*\mathcal{N}^{\pm}\big)$. Nous appliquons à ce couple le théorème des périodes sous la forme du corollaire 15.7 de [GR3] en nous limitant à la place σ puis en majorant δ_σ et $y^{\pm}$ comme ci-dessus et $h_F(C^{\flat,\pm})$ à l'aide du lemme 5.3. Il vient avec $\dim C^{\flat,\pm}=m$

$$\Upsilon^{\pm}\leq\frac{20m^2[K:\mathbb{Q}]}{(1-\varepsilon)^2}(em)^{2m}\max\left(1,H-\frac{3}{2}+\log\Upsilon+1,9m+0,92\log\left(\mu(1-\varepsilon)^2\Upsilon^{\pm}\right)\right).$$

Posons $\overline{\Upsilon}=\max(\Upsilon^+,\Upsilon^-)$ de sorte que le lemme 5.5 fournit $\Upsilon\leq 4\overline{\Upsilon}$ puis notons $\overline{\mu}$ le majorant de μ obtenu en remplaçant Υ par $4\overline{\Upsilon}$ dans son expression. La formule précédente entraîne

$$\overline{\Upsilon}\leq\frac{20m^2[K:\mathbb{Q}]}{(1-\varepsilon)^2}(em)^{2m}\max\left(1,H-\frac{3}{2}+\log 4\overline{\Upsilon}+1,9m+0,92\log\left(\overline{\mu}(1-\varepsilon)^2\overline{\Upsilon}\right)\right).$$

Nous supposons à ce stade $m\geq 2$ (voir ci-dessous pour le cas $m=1$, plus simple) et fixons $\varepsilon=1/100$. La minoration $\Upsilon\geq 1$ montre alors que le maximum ci-dessus est plus grand que 1. Pour montrer le théorème 5.2 il suffit d'établir $\overline{\Upsilon}\leq 9,5(em)^{2m}(2m)^5[K:\mathbb{Q}]H$. Nous allons voir que si ceci n'est pas réalisé nous obtenons une contradiction avec l'inégalité

$$1\leq\frac{20m^2[K:\mathbb{Q}]}{(1-\varepsilon)^2\overline{\Upsilon}}(em)^{2m}\left(H-\frac{3}{2}+\log 4\overline{\Upsilon}+1,9m+0,92\log\left(\overline{\mu}(1-\varepsilon)^2\overline{\Upsilon}\right)\right).$$

Nous procédons par la méthode des décroissances successives comme pages 101 et 102 de [GR3], c'est-à-dire que nous vérifions que le second membre ci-dessus

(1) est une fonction décroissante de $\overline{\Upsilon}$ donc nous pouvons remplacer $\overline{\Upsilon}$ par $9,5(em)^{2m}(2m)^5[K:\mathbb{Q}]H$;
(2) devient alors décroissant en m donc nous pouvons prendre $m=2$;
(3) devient alors décroissant en H ce qui permet de supposer $H=\max(1,\log[K:\mathbb{Q}])$;
(4) devient finalement une fonction de $[K:\mathbb{Q}]\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ croissante sur $\{1,2\}$ et décroissante sur $\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$ de sorte que nous pouvons supposer $[K:\mathbb{Q}]\in\{2,3\}$.

Cette démarche conduit ainsi à deux vérifications numériques directes pour aboutir à la contradiction cherchée. Nous ne détaillons pas les calculs intermédiaires qui restent très proches de ceux de [GR3] (en particulier l'usage du lemme 16.4). Remarquons simplement qu'ils ne sont nécessaires que pour avoir la valeur $9,5$: l'existence d'une constante moins précise se vérifie beaucoup plus aisément à partir de l'inégalité de la forme $\overline{\Upsilon}\leq a+b\log\overline{\Upsilon}$ que l'on obtient en majorant grossièrement $H+0,16m^2+m^2\log 4\overline{\Upsilon}\leq 4m^2H\overline{\Upsilon}$ dans $\overline{\mu}$.

Il reste enfin à traiter le cas $m=1$. Nous revenons à l'application ci-dessus du théorème des périodes, que nous remplaçons par le lemme matriciel sur la courbe elliptique $C^{\flat,\pm}$. Nous trouvons

$$\overline{\Upsilon}\leq 2,3[K:\mathbb{Q}](1-\varepsilon)^{-2}(2H+1,8+2\log 4\overline{\Upsilon}).$$

Nous faisons tendre ε vers 0 et constatons que l'inégalité obtenue conduit à $\overline{\Upsilon}\leq 35[K:\mathbb{Q}]H$. Puisque 35 est (nettement) plus petit que $9,5e^2 2^5$, ceci donne la majoration escomptée de $\overline{\Upsilon}$ dans ce cas aussi et termine donc la démonstration du théorème 1.2.

6. Extension de corps

Il nous reste finalement à établir le théorème 1.3. Nous nous plaçons sous ses hypothèses en notant σ comme une inclusion : $K \subset L \subset \mathbb{C}$ où $K \subset \mathbb{R}$ et L est stable par conjugaison complexe. Comme nous disposons de deux variétés abéliennes A et B sur K de dimension g telles que A_L et B_L sont isogènes, le lemme 17.2 de [GR3] et sa démonstration montrent qu'il n'y a pas de restriction à supposer que L est une extension finie de K de degré $[L : K] \leq (6g)^{2g}$ (la stabilité par conjugaison complexe est conservée puisque l'on intersecte le L initial avec une extension galoisienne de K).

Dans ce contexte, nous pouvons exprimer le gain permis par le théorème 1.2 en présence d'une place réelle sous la forme suivante.

Lemme 6.1. *Soient K' une extension de K contenue dans L et C une sous-variété abélienne de $A_{K'}$.*

(1) *Si $g \geq 2$,*
$$\Upsilon(\operatorname{Supp} C) \leq (6g)^{8g \dim C}[K : \mathbb{Q}] \max(1, h_F(A), \log[K : \mathbb{Q}]).$$
(2) *Si $K' \subset \mathbb{R}$ et $g \geq 3$,*
$$\Upsilon(\operatorname{Supp} C) \leq (6g)^{4g \dim C}[K : \mathbb{Q}] \max(1, h_F(A), \log[K : \mathbb{Q}]).$$

Démonstration. Notons $h = \dim C$. Pour établir (2), nous appliquons le théorème 1.2 à la variété abélienne C sur K' et majorons dans la borne obtenue $n = \dim C^{\#} \leq 2h^2$, $[K' : \mathbb{Q}] \leq [L : \mathbb{Q}] \leq (6g)^{2g}[K : \mathbb{Q}]$ et (avec le corollaire 1.2 de [Ré])
$$h_F(C) + \frac{3}{2}h \leq h_F(A) + \frac{3}{2}g \leq \left(1 + \frac{3}{2}g\right) \max(1, h_F(A)).$$
En reportant dans la majoration de $\Upsilon(\operatorname{Supp} C)$ et en remarquant $1 + 3g/2 \leq 1 + 2g\log 6g$, nous constatons qu'il suffit de vérifier
$$38(2h^2)^5(eh^2)^{2h^2}(6g)^{2g}(1 + 2g\log 6g) \leq (6g)^{4gh}$$
lorsque les entiers naturels g et h satisfont $1 \leq h \leq g$ et $g \geq 3$. Ceci se montre par des moyens élémentaires : on peut par exemple observer que le quotient du logarithme du membre de gauche par h fournit une fonction de h dont la dérivée seconde est positive sur $[1, g]$; par suite il suffit de traiter les cas $h = 1$ et $h = g$, qui s'obtiennent facilement. De son côté, l'assertion (1) découle de manière quasi-identique du théorème 1.8 de [GR3] en transitant par l'inégalité
$$241(2h^2)^5(2eh^2)^{4h^2}(6g)^{2g}(1 + 2g\log 6g) \leq (6g)^{8gh}$$
pour $1 \leq h \leq g$ et $g \geq 2$ (variante du calcul fait pour établir le lemme 17.3 de [GR3]). □

Dorénavant, pour démontrer le théorème 1.3, nous supposons $g \geq 2$ car le cas $g = 1$ est couvert par le théorème 1.4. L'assertion (1) ci-dessus permet de conclure dans certains cas (donc sans utiliser la place réelle). En effet les théorèmes 1.3 et 1.4 de [GR3] fournissent des isogénies $A_L \to B_L$ et $B_L \to A_L$ de degré au plus $\Upsilon(\operatorname{Supp} A_L)^{2e(A_L)}$ en général et au plus $\Upsilon(\operatorname{Supp} A_L)^{e(A_L)}$ si A_L est MM. L'entier $e(A_L)$, dont la définition sera rappelée ci-dessous, vérifie toujours $e(A_L) \leq 2g^2$. Comme le lemme précédent (avec $K' = L$ et $C = A_L$) entraîne $\Upsilon(\operatorname{Supp} A_L)^{2g^2} \leq \Xi_{\mathbb{R}}(A)^2$, le théorème 1.3 est acquis si A_L est MM ou si $e(A_L) \leq g^2$. Nous supposons désormais que ces conditions ne sont pas remplies.

Notons $C_1, \ldots, C_t$ des variétés abéliennes sur L simples et deux à deux non isogènes puis $m_1, \ldots, m_t$ des entiers naturels tels que A_L est isogène au produit $C_1^{m_1} \times \cdots \times C_t^{m_t}$. Pour $1 \leq i \leq t$, notons r_i le rang du groupe $\operatorname{End} C_i$ et z_i celui du centre de $\operatorname{End} C_i$. Alors (voir page 4 de [GR3]) $\sqrt{r_i z_i}$ est un entier pour tout i et
$$e(A_L) = \sum_{i=1}^{t} \frac{2m_i(\dim C_i)^2}{\sqrt{r_i z_i}} \leq 2g \max_{1 \leq i \leq t} \frac{\dim C_i}{\sqrt{r_i z_i}}.$$
Puisque nous supposons $e(A_L) > g^2$, il existe un indice i tel que $(\dim C_i)/\sqrt{r_i z_i} > g/2$. Comme nous avons $\dim C_i \leq g$, l'entier $\sqrt{r_i z_i}$ vaut nécessairement 1, ce qui signifie $\operatorname{End} C_i = \mathbb{Z}$ et $\dim C_i > g/2$.

Par isogénie, A_L admet une unique sous-variété abélienne simple A_1 de dimension $g_1 > g/2$ et elle vérifie $\operatorname{End} A_1 = \mathbb{Z}$. Elle constitue une composante isotypique de A_L. Notons A_2 la somme des autres composantes isotypiques, autrement dit l'unique quasi-supplémentaire de A_1 ($A_L = A_1 + A_2$

et $A_1 \cap A_2$ fini). Puisque A_1 est MM et que A_L ne l'est pas, A_2 est non nulle et $g/2 < g_1 < g$ force $g \geq 3$.

Définissons à présent deux nouvelles variétés abéliennes sur L par $A_3 = A_1/A_1 \cap A_2$ et $A_4 = A_2/A_1 \cap A_2$ puis notons $\varphi\colon A_1 \to A_3$ le morphisme naturel. Son noyau $A_1 \cap A_2$, en tant que sous-groupe de $A_2(\overline{K})$, est de rang au plus $r = 2\dim A_2 = 2(g - g_1)$ (rappelons que le rang d'un groupe abélien fini est le nombre minimal de générateurs de celui-ci). Comme première conséquence de ce fait, l'isogénie φ est de degré minimal parmi les éléments de $\mathrm{Hom}(A_1, A_3) \simeq \mathbb{Z}$: en effet, dans le cas contraire, elle s'écrirait $\varphi = N\varphi'$ pour un entier $N \geq 2$ et une autre isogénie $\varphi'\colon A_1 \to A_3$ donc $\mathrm{Ker}\,\varphi$ contiendrait $\mathrm{Ker}[N]$ de rang $2g_1 > r$.

Puisque B_L est isogène à A_L, nous voyons de même apparaître quatre variétés abéliennes B_1, B_2, B_3 et B_4 où B_i est en particulier isogène à A_i pour $1 \leq i \leq 4$ ainsi qu'une isogénie naturelle $\psi\colon B_1 \to B_3$ qui est de degré minimal et dont le noyau est au plus de rang r. Introduisons encore quatre isogénies

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_3 \\ B_1 & A_3 \arrow[l, "\chi"'] \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

chacune de degré minimal parmi les isogénies de mêmes source et but. L'information sur le rang de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\psi$ entraîne la majoration suivante où $d = 2g_1$.

Lemme 6.2. *Dans le cadre ci-dessus, nous avons*

$$(\deg \psi \circ \chi \circ \varphi)^{d-r} \leq (\deg \chi)^{d-r} (\deg \gamma)^{d-2r} \,\mathrm{ppcm}\,(\deg \alpha \cdot \deg \beta, \deg \gamma \cdot \deg \chi)^r.$$

Démonstration. Nous pouvons librement changer le signe de certaines des isogénies α, β, γ et donc trouver par minimalité des entiers naturels non nuls N, M et P tels que $\chi \circ \varphi = N\alpha$, $\psi \circ \chi = M\beta$ et $\psi \circ \alpha = P\gamma$. Nous avons ainsi $\psi \circ \chi \circ \varphi = N\psi \circ \alpha = M\beta \circ \varphi = NP\gamma$. Comme $\beta \circ \varphi$ est aussi un multiple de γ, nous constatons que M divise NP. D'autre part, $\mathrm{Ker}[NP] \subset \mathrm{Ker}\,\psi \circ \chi \circ \varphi$ fournit $\varphi(\mathrm{Ker}[NP]) \subset \mathrm{Ker}\,\psi \circ \chi$ tandis que la définition de M entraîne $\mathrm{Ker}[M] \subset \mathrm{Ker}\,\psi \circ \chi$. Nous pouvons donc définir Ω comme le sous-groupe $\mathrm{Ker}[M] + \varphi(\mathrm{Ker}[NP])$ de $\mathrm{Ker}\,\psi \circ \chi$. Il satisfait

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\,\Omega &= \mathrm{Card}\,\mathrm{Ker}[M] \cdot \mathrm{Card}\,M\varphi(\mathrm{Ker}[NP]) \\ &= M^d\,\mathrm{Card}\,\varphi(\mathrm{Ker}\,[NP/M]) \\ &= M^d \frac{\mathrm{Card}\,\mathrm{Ker}\,[NP/M]}{\mathrm{Card}\,\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Ker}\,[NP/M]} \\ &\geq (NP)^{d-r} M^r \end{aligned}$$

grâce à $\mathrm{rg}\,\mathrm{Ker}\,\varphi \leq r$. Considérons ensuite le groupe $\chi(\Omega)$. Il s'écrit comme la somme de $\chi(\mathrm{Ker}[M])$ (formé de points de M-torsion) et de $\chi \circ \varphi(\mathrm{Ker}[NP]) = N\alpha(\mathrm{Ker}[NP]) = \alpha(\mathrm{Ker}[P])$ (formé de points de P-torsion). En particulier $\chi(\Omega)$ est constitué de points de $\mathrm{ppcm}(M, P)$-torsion. Comme nous disposons d'un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \chi & \longrightarrow & \ker \psi \circ \chi & \longrightarrow & \ker \psi & \longrightarrow & 0 \\ & & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega \cap \ker \chi & \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & \chi(\Omega) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

nous avons $\mathrm{rg}\,\chi(\Omega) \leq \mathrm{rg}\,\mathrm{Ker}\,\psi \leq r$ d'où $\mathrm{Card}\,\chi(\Omega) \leq \mathrm{ppcm}(M, P)^r$ puis $\deg \chi \geq \mathrm{Card}\,\Omega \cap \mathrm{Ker}\,\chi \geq (NP)^{d-r} M^r\,\mathrm{ppcm}(M, P)^{-r}$. Enfin, par définition, les entiers N, M et P vérifient $N^d \deg \alpha = \deg \chi \circ \varphi$, $M^d \deg \beta = \deg \psi \circ \chi$ et $P^d \deg \gamma = \deg \psi \circ \alpha$. Ceci montre

$$\mathrm{ppcm}(M, P)^d = \frac{\deg \psi}{\deg \beta \cdot \deg \gamma}\,\mathrm{ppcm}(\deg \alpha \cdot \deg \beta, \deg \gamma \cdot \deg \chi)$$

et, en reportant dans la minoration ci-dessus de $\deg \chi$, nous voyons apparaître exactement la formule de l'énoncé. □

La définition des variétés abéliennes $A_1, \ldots, A_4$ fournit deux isogénies naturelles

$$A_1 \times A_2 \longrightarrow A_L \longrightarrow A_3 \times A_4,$$

chacune de noyau isomorphe à $A_1 \cap A_2 = \mathrm{Ker}\,\varphi$. La même chose vaut pour B_L et, si nous choisissons une isogénie $\delta\colon A_4 \to B_2$ de degré minimal, nous pouvons définir une isogénie composée

$$A_L \longrightarrow A_3 \times A_4 \xrightarrow{\chi\times\delta} B_1 \times B_2 \longrightarrow B_L$$

de degré $\deg(\psi \circ \chi \circ \varphi)\deg\delta$. Il nous reste à majorer ceci par $\Xi_{\mathbb{R}}(A)^2$. Pour utiliser le cas réel, nous allons montrer que certains des degrés d'isogénie impliqués (sur L) descendent en fait à $K' = L \cap \mathbb{R}$. Notre hypothèse que L est stable par conjugaison complexe τ montre que l'extension L/K' est de degré 1 ou 2 et que son groupe de Galois est engendré par τ. Considérons alors les sous-variétés abéliennes $\tau(A_1)$ et $\tau(A_2)$ de A_L. La première est simple et de dimension g_1 donc par unicité $\tau(A_1) = A_1$. La seconde est un quasi-supplémentaire de la première donc nous avons aussi $\tau(A_2) = A_2$. Ces égalités entraînent l'existence de deux sous-variétés abéliennes A_1' et A_2' de $A_{K'}$ telles que $(A_i')_L = A_i$ pour $i \in \{1,2\}$. Par suite A_3 est également l'extension à L d'une variété abélienne sur K', à savoir $A_1'/A_1' \cap A_2'$. Exactement de la même manière, B_1 et B_3 proviennent de variétés sur K'. Nous sommes donc dans le cadre du lemme 3.1 qui implique que le degré de chacune des six isogénies $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \chi$ et ψ est le degré minimal d'isogénie entre deux variétés abéliennes sur K', isogènes à A_1'. Puisque $\mathrm{End}\,A_1' = \mathbb{Z}$, toute isogénie de degré minimal dans la classe de A_1' est nucléaire (à gauche et à droite). Le théorème 1.6 de [GR3] entraîne donc que les six degrés ci-dessus divisent $\deg\varphi_1$ pour une certaine isogénie φ_1 de degré minimal entre deux variétés abéliennes sur K' isogènes à A_1'. En vertu du théorème 1.4 de [GR3] nous avons $\deg\varphi_1 \le \Upsilon(\mathrm{Supp}\,A_1')^{2g_1^2}$. D'un autre côté, en restant sur L, le théorème 1.3 de [GR3] montre $\deg\delta \le \Upsilon(\mathrm{Supp}\,A_2)^{4(g-g_1)^2}$.

En rappelant que nous avons $g \ge 3$, nous pouvons appliquer les deux assertions du lemme 6.1 d'une part à A_2 (de dimension au plus $g/2$) et d'autre part à A_1' (de dimension au plus g) pour constater que $\Upsilon(\mathrm{Supp}\,A_1')$ et $\Upsilon(\mathrm{Supp}\,A_2)$ sont tous deux majorés par la même quantité, égale à $\Xi_{\mathbb{R}}(A)^{1/2g^2}$. Ainsi les degrés de $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \chi, \psi$ divisent $\deg\varphi_1 \le \Xi_{\mathbb{R}}(A)^{(g_1/g)^2}$ tandis que $\deg\delta \le \Xi_{\mathbb{R}}(A)^{2(1-g_1/g)^2}$.

La quantité $\deg(\psi \circ \chi \circ \varphi)\deg\delta$ que nous cherchons à majorer est toujours au plus $\Xi_{\mathbb{R}}(A)$ à la puissance $3(g_1/g)^2 + 2(1-g_1/g)^2$. Si $g_1 \le 4g/5$, nous avons bien $3(g_1/g)^2 + 2(1-g_1/g)^2 \le 2$ d'où le résultat recherché. Si $g_1 > 4g/5$, nous recourons au lemme 6.2. Puisque $d = 2g_1$ et $r = 2g - 2g_1$ tous les exposants qui apparaissent dans son énoncé sont positifs donc il fournit une majoration où le 3 ci-dessus est remplacé par $(2d-r)/(d-r) = (3g_1 - g)/(2g_1 - g)$. Pour conclure nous vérifions élémentairement

$$\frac{3g_1 - g}{2g_1 - g}\left(\frac{g_1}{g}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{g_1}{g}\right)^2 \le 2$$

à partir de $g_1 > 4g/5$. De cette façon, nous avons bien abouti dans tous les cas à une isogénie $A_L \to B_L$ de degré au plus $\Xi_{\mathbb{R}}(A)^2$. L'isogénie dans l'autre sens s'obtient comme toujours en remplaçant A et B par leurs duales.

Références

[Ba] R. Bantegnie. Sur une propriété de transfert concernant les boules de R^n. *Monatsh. Math.* 74. 1970. p. 1–5.

[CC] D. Chudnovsky et G. Chudnovsky. Padé approximations and Diophantine geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 82. 1985. p. 2212–2216.

[CN] J. Cremona et F. Najman. $\mathbb{Q}$-curves over odd degree number fields. *Res. number theory*, 7. 2021. 30 p.

[GR1] É. Gaudron et G. Rémond. Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. *Comment. Math. Helv.* 89. 2014. p. 343–403.

[GR2] É. Gaudron et G. Rémond. Polarisations et isogénies. *Duke Math. J.* 163. 2014. p. 2057–2108.

[GR3] É. Gaudron et G. Rémond. Nouveaux théorèmes d'isogénie. *Mém. Soc. Math. France* 176. 2023. vi+123 p.

[GR4] É. Gaudron et G. Rémond. Nombre de petits points sur une variété abélienne. Prépublication 2022. 49 p.

[MW] D. Masser et G. Wüstholz. Estimating isogenies on elliptic curves. *Invent. Math.*, 100. 1990. p. 1–24.

[Mu] D. Mumford. *Abelian varieties.* Oxford University Press. London. 1974.

[Ré] G. Rémond. Propriétés de la hauteur de Faltings. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* 23. 2022. p. 1589–1596.

[Se] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne.* Lecture Notes in Mathematics 5, Springer-Verlag, 1962.

[Si] J. Silverman. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves.* Grad. Texts in Math. 151, Springer, New York. 1994.

Éric Gaudron
Université Clermont Auvergne
CNRS, LMBP
F-63000
Clermont-Ferrand
France
Eric.Gaudron@uca.fr

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582
CS 40700
38058 Grenoble Cedex 9
France
Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr