POLARISATIONS ET ISOGÉNIES

ÉRIC GAUDRON et GAËL RÉMOND

Résumé

Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres k. Nous démontrons qu'il existe un faisceau inversible ample et symétrique sur A dont le degré est borné par une constante explicite qui dépend seulement de la dimension de A, de sa hauteur de Faltings et du degré du corps de nombres k. Nous établissons également des versions explicites du théorème de Bertrand relatif au théorème de réductibilité de Poincaré et des théorèmes d'isogénies de Masser et Wüstholz entre variétés abéliennes. Les preuves reposent sur des arguments de géométrie des nombres dans les réseaux euclidiens constitués des morphismes entre variétés abéliennes munis des métriques de Rosati. Nous majorons les minima successifs de ces réseaux grâce au théorème des périodes que nous avons démontré dans un article précédent.

Abstract

Let A be an abelian variety over a number field k. We prove that A admits a polarization of degree explicitly bounded in terms of the Faltings height of A, its dimension and the degree of k. The fact that this could be done effectively was known only in special cases, thanks to the work of Masser and Wüstholz. We also provide sharpened, explicit versions of their isogeny and factorization estimates, as well as of a result of Bertrand about almost complements of abelian subvarieties. One crucial tool is our recent period theorem and the proofs proceed through the detailed study of lattices of morphisms of abelian varieties, endowed with euclidean metrics deduced from suitable Rosati involutions.

Table des matières

DUKE MATHEMATICAL JOURNAL
Vol. 163, No. 11, © 2014 DOI 10.1215/00127094-2782528
Received 4 October 2012. Revision received 4 November 2013.
2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 11G10; Secondary 14K02, 11H99, 14K15.

1. Introduction

Nous établissons ici plusieurs estimations explicites pour la géométrie des variétés abéliennes sur les corps de nombres, en fonction de la hauteur de Faltings et du degré d'un corps de définition.

Soient donc k un corps de nombres et A une variété abélienne sur k de dimension $g \geq 1$. Nous notons $\alpha(g) = 2^{10}g^3$ puis

$$\kappa(A) = \left((14g)^{64g^2}[k:\mathbb{Q}]\max\left(h_F(A), \log[k:\mathbb{Q}], 1\right)^2\right)^{\alpha(g)}$$

où $h_F(A)$ est la hauteur de Faltings stable de A (avec la normalisation originale de Faltings, voir [GR1, paragraphe 2.3]).

Notre premier résultat montre l'existence d'une petite polarisation.

THÉORÈME 1.1
Il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ symétrique et ample sur A tel que $\deg_{\mathcal{L}} A \leq \kappa(A)$.

Nous soulignons qu'il s'agit bien d'un faisceau sur A et non seulement sur $A_{\overline{k}}$, par exemple ; en particulier la polarisation est définie sur k.

Cet énoncé améliore des résultats partiels (non explicites) de Masser et Wüstholz : ils établissaient l'existence d'une petite polarisation dans certains cas seulement. Le seul publié [MW3] est celui où $\mathrm{End}_k A = \mathbb{Z}$. Lorsque nous avons communiqué le présent article à D. Masser, il nous a envoyé un texte ancien [MW4] qui n'avait pas été diffusé jusque là (son contenu était seulement évoqué — sans preuves — dans [Bo, p. 126] et [Mas]). Les auteurs y montrent l'existence d'une polarisation de $A_{\overline{k}}$ de degré majoré par $c_1(g)\max([k:\mathbb{Q}], h_F(A))^{c_2(g)}$ pour des constantes $c_i(g)$ non calculées dans les trois cas (non disjoints) suivants : $g \leq 7$; $A_{\overline{k}}$ est simple et $\mathrm{End}_{\overline{k}} A$ est commutatif ; $A_{\overline{k}}$ est simple et le centre de l'algèbre $\mathrm{End}_{\overline{k}} A \otimes \mathbb{Q}$ est un corps de nombres totalement réel.

Comme conséquence directe du théorème 1.1, nous contrôlons le degré d'une isogénie de A vers une variété abélienne A' principalement polarisée, après une extension du corps de base. Nous pouvons en fait faire ceci en exigeant beaucoup plus de propriétés de A'.

Dans toute la suite, nous utilisons la notation suivante pour les isogénies :

$$\varphi\colon A \rightleftharpoons A'$$

désigne un couple d'isogénies $\varphi_1\colon A \to A'$ et $\varphi_2\colon A' \to A$ et l'on note $\deg\varphi = \max(\deg\varphi_1, \deg\varphi_2)$.

Notre résultat de décomposition de A modulo isogénies s'énonce alors ainsi.

THÉORÈME 1.2

Il existe un corps de nombres k' contenant k, des entiers naturels non nuls t et $n_1, \dots, n_t$, des variétés abéliennes $A_1, \dots, A_t$ sur k' et un couple d'isogénies définies sur k'

$$\varphi\colon A_{k'} \rightleftharpoons \prod_{i=1}^{t} A_i^{n_i}$$

de sorte que, pour tous $1 \le i, j \le t$,

(1) *si $i \neq j$, A_i et A_j ne sont pas isogènes sur $\overline{k'}$,*

(2) *A_i est simple et $\mathrm{End}_{k'}(A_i) = \mathrm{End}_{\overline{k'}}(A_i)$,*

(3) *l'ordre $\mathrm{End}_{k'}(A_i)$ est maximal dans $\mathrm{End}_{k'}(A_i) \otimes \mathbb{Q}$,*

(4) *$\deg\varphi \le \kappa(A)$ et $[k' : k] \le \kappa(A)^g$,*

(5) *il existe un sous-groupe G de $A(\overline{k})$ avec $\mathrm{Card}\, G \le \kappa(A)^{1/2}$ tel que k' est la plus petite extension de k sur laquelle tous les points de G sont rationnels.*

De plus l'énoncé est également valable si l'on remplace la condition (3) ci-dessus par

(3′) *A_i est principalement polarisée.*

Il n'est pas possible en général d'assurer simultanément les propriétés (3) et (3′) : nous donnerons un exemple (sur $\mathbb{C}$) de classe d'isogénie de variétés abéliennes simples dans laquelle aucun élément ne satisfait ces deux conditions (voir partie 11).

L'hypothèse de maximalité des anneaux d'endomorphismes (3) entraîne en particulier que, dans la variété abélienne $A' = \prod_{i=1}^{t} A_i^{n_i}$, toute sous-variété abélienne B' admet un supplémentaire B'_1 c'est-à-dire une sous-variété abélienne B'_1 de A' avec $A' = B' + B'_1$ et $B' \cap B'_1 = \{0\}$ (voir proposition 5.2). En considérant l'image réciproque dans A, nous en déduisons immédiatement une version explicite d'un théorème de Bertrand (le texte [Be] n'est pas publié, voir un compte rendu de la preuve dans [RU]) : toute sous-variété abélienne B de A admet un quasi-supplémentaire B_1 avec $A = B + B_1$ et $\mathrm{Card}(B \cap B_1) \le \kappa(A)$. Le seul défaut de cette approche est que B_1 n'est ici définie que sur k' même si B est définie sur un corps plus petit. Il est possible de pallier cet inconvénient en modifiant légèrement la démonstration et nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 1.3
Soient K une extension de k et B une sous-variété abélienne de A définie sur K. Il existe une sous-variété abélienne B_1 de A définie sur K telle que $A = B + B_1$ et $\mathrm{Card}(B \cap B_1) \leq \kappa(A)$.

Les démonstrations des trois théorèmes précédents sont étroitement imbriquées et intimement liées au théorème d'isogénie de Masser et Wüstholz (voir la série [MW1], [MW2], [MW3]) dont nous donnons aussi chemin faisant une version explicite.

THÉORÈME 1.4
Soient K une extension de k et A' une variété abélienne définie sur k et isogène à A sur K. Il existe un couple de K-isogénies $A \rightleftharpoons A'$ de degré au plus $\kappa(A)$.

À titre de comparaison, dans la borne fournie par la démonstration de Masser et Wüstholz, l'exposant de la hauteur de Faltings était au moins $g^{\alpha(g)}$ au lieu de $2\alpha(g)$ ici (et la constante n'était pas explicite).

Une bonne part de nos démonstrations repose sur des arguments de géométrie des nombres dans des $\mathbb{Z}$-modules de la forme $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ pour deux variétés abéliennes A et B sur un corps K. Pour définir une structure de réseau euclidien sur un tel module, notre outil-clef est l'utilisation d'une application de Rosati † généralisant la classique involution de Rosati sur les anneaux d'endomorphismes (cas $A = B$). Ici il s'agit précisément d'une application $\mathrm{Hom}_K(A, B) \to \mathrm{Hom}_K(B, A) \otimes \mathbb{Q}$ définie en fixant des polarisations sur A et B (voir partie 2). On vérifie alors sans peine à partir du cas classique que $\varphi \mapsto \mathrm{Tr}(\varphi\varphi^\dagger)$ induit une forme quadratique définie positive sur $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$ et nous permet donc de parler de réseau euclidien. Nous lui associons alors son covolume et ses minima successifs, dont le dernier (noté simplement $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B))$, voir partie 3) jouera en particulier un rôle pivot dans tout le texte.

Par exemple, pour démontrer le théorème 1.1, nous plongeons le groupe de Néron–Severi $\mathrm{NS}(A)$ dans $\mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{Q}$ ce qui en fait à son tour un réseau euclidien et notre tâche consiste à trouver un petit élément de ce réseau qui se trouve à l'intérieur du cône ample : en transitant par des anneaux de matrices (voir partie 4) nous pouvons faire ceci *via* des arguments de géométrie des nombres assez directs qui font apparaître $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A}))$, tout au moins si A est simple.

Ensuite, nous passons aux variétés isotypiques (au sens restreint : puissance d'une variété abélienne simple) dans la partie 5 où se trouve aussi l'argument-clef pour le théorème 1.3 puis aux variétés abéliennes quelconques dans la partie 6, toujours en exprimant les résultats en termes des quantités $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B))$. Pour les estimer, nous appliquons un théorème des périodes (partie 8) qui permet de borner le degré d'une sous-variété idoine H de $A \times B^n$ et l'on montre (partie 7) $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B)) \leq (\deg H / \deg A)^2$.

Le schéma de preuve décrit jusqu'ici doit cependant être modifié pour éliminer la dépendance en les polarisations (qui apparaissent dans la définition des métriques et dans le degré de H). Ceci s'effectue essentiellement en remplaçant à partir de la partie 6 la variété abélienne A par $Z(A) = A^4 \times \widehat{A}^4$ qui porte une polarisation principale (astuce de Zarhin).

Bien entendu, toute cette démarche (application du théorème des périodes, astuce de Zarhin, réduction au cas simple) s'inspire des travaux de Masser et Wüstholz. Plusieurs énoncés de notre travail correspondent donc à des résultats de [MW2], [MW3]. Toutefois nous devons souvent les compléter par de nouveaux arguments (les théorèmes 1.1 et 1.3 sont par exemple sans équivalents) ou les raffiner afin d'obtenir un meilleur exposant final de la hauteur de Faltings et un résultat totalement explicite. Concrètement les arguments sont donc en général repris en entier ; la seule exception significative réside dans l'application du lemme de l'indice de classe [MW3, p. 8] dans notre lemme 5.3 ; même dans ce cas, nous ne l'employons qu'une fois contre deux dans [MW3] car leur lemme 4.2 découle en fait directement du théorème de Minkowski dans $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ (voir proposition 4.1 ci-dessous).

Revenons maintenant sur le rôle du théorème des périodes. Son application est une étape cruciale de la démonstration. Ici nous employons la version raffinée que nous avons donnée dans [GR1]. Sa forme précise, qui sera rappelée en détail dans la partie 8 (avec en particulier l'utilisation du minimum essentiel $\delta(\cdot,\cdot)$ au lieu d'une simple norme de période), est pratique pour simplifier un peu l'argument mais n'est pas déterminante, au sens où, même en utilisant le théorème des périodes initial de Masser et Wüstholz, les techniques du présent texte permettent de démontrer tous les théorèmes ci-dessus, en dehors de la forme explicite des constantes.

En ce qui concerne la taille de l'exposant $\alpha(g)$, les deux améliorations les plus déterminantes sont l'usage de notre théorème des périodes explicite [GR1] et le lemme 7.2 qui remplace efficacement une récurrence coûteuse dans [MW2]. Plusieurs raffinements secondaires contribuent aussi à maîtriser l'inflation des exposants. Qu'il reste tout de même un facteur 2^{10} dans $\alpha(g)$ vient principalement de l'utilisation de $Z(A)$ au lieu de A : la multiplication de la dimension par 8 coûte cher. De son côté, le facteur g^3 représente une simplification d'une expression dépendant de la décomposition de A en facteurs simples après isogénie (voir l'exposant de P dans la démonstration du lemme 9.3) et pourrait donc être réduit dans des cas particuliers (par exemple si A est de la forme A_0^n alors $g^3 = n^3 g_0^3$ peut être remplacé par $n^2 g_0^3$ où $g_0 = \dim A_0$). Enfin, le fait que la même constante $\kappa(A)$ apparaisse dans nos quatre théorèmes est partiellement arbitraire : on pourrait la diminuer légèrement dans certains cas (voir partie 6 où les différents résultats sont séparés).

Il est un cas (déjà traité dans [GR1]) où les bornes sont nettement meilleures, au premier chef parce que l'emploi de $Z(A)$ est inutile : celui des courbes elliptiques. Nous décrivons la situation en partie 10.

Concluons cette introduction par un corollaire du théorème 1.3 de nature un peu différente. Si B est une sous-variété abélienne de A, on sait (voir [GR1, paragraphe 2.3]) contrôler la hauteur de Faltings de B en fonction de celle de A et du degré de B relativement à une polarisation de A. Ceci se fait en considérant l'isogénie $B \times B^{\perp} \to A$. Ici nous pouvons nous affranchir de la présence du degré de B (quitte à faire apparaître $[k:\mathbb{Q}]$) en considérant l'isogénie $B \times B_1 \to A$ déduite du théorème 1.3 de degré $\leq \kappa(A)$. Il est même possible d'exprimer le résultat à l'aide de la hauteur de Faltings $h_{F,K}(\cdot)$ relative à un corps de nombres K c'est-à-dire obtenue sans faire d'extension pour avoir un modèle semi-stable.

COROLLAIRE 1.5
Soient K une extension finie de k et B une sous-variété abélienne de A définie sur K. Alors

$$h_{F,K}(B) \leq h_{F,K}(A) + \frac{1}{2}\log \kappa(A).$$

En particulier en choisissant K assez grand nous avons toujours $h_F(B) \leq h_F(A) + (1/2)\log \kappa(A)$.

De façon analogue, les variétés abéliennes A_i du théorème 1.2 peuvent être choisies de sorte que $h_F(A_i) \leq h_F(A) + (1/2)\log \kappa(A)$.

2. Métriques de Rosati

Dans cette partie, nous introduisons la structure euclidienne sur les réseaux de morphismes qui sera d'usage constant dans la suite du texte. Nous travaillons sur un corps K de caractéristique nulle. On désigne par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K.

Commençons par quelques rappels sur les morphismes de variétés abéliennes. Soient A et B deux variétés abéliennes sur K. Pour une extension K' de K, notons $\mathrm{Hom}_{K'}(A,B)$ l'ensemble des morphismes de variétés abéliennes de A vers B définis sur K' (c'est-à-dire formellement les morphismes de $A_{K'}$ vers $B_{K'}$). Lorsque $A = B$ on écrit $\mathrm{End}_{K'}(A)$ pour $\mathrm{Hom}_{K'}(A,A)$. La loi de B munit $\mathrm{Hom}_{K'}(A,B)$ d'une structure de groupe abélien qui se trouve être un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini [Mu, Théorème 3, p. 176]. Même si nous le rappelons de temps à autre pour le confort du lecteur, la lettre g désigne toujours la dimension de A.

Un morphisme $\varphi\colon A \to B$ est appelé *isogénie* lorsqu'il est surjectif de noyau fini. Lorsqu'un tel φ existe, A et B sont dites isogènes et cela entraîne en particulier $\dim B = g$. Le *degré* de φ, noté $\deg \varphi$, est le cardinal de son noyau. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A,B)$ n'est pas une isogénie, on pose $\deg \varphi = 0$. Lorsque $\varphi\colon A \to B$ et $\tau\colon B \to C$ sont des isogénies alors $\tau \circ \varphi\colon A \to C$ est une isogénie de degré $(\deg \varphi)(\deg \tau)$. L'application degré s'étend à $\mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \mathbb{R}$ en un polynôme homogène de degré $2g$ (une somme de produits de $2g$ formes linéaires) : si $A = B$ cela découle du théorème 2 de [Mu, p. 174] ; si A et B ne sont pas isogènes c'est le polynôme nul ; si elles sont isogènes, on se ramène au cas $A = B$ en composant avec une isogénie fixée.

Nous rappelons la notion de trace dans le cas $A = B$.

Définition 2.1
Pour $\varphi \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{R}$, la *trace* de φ, notée $\mathrm{Tr}(\varphi)$, est l'opposé du coefficient de X^{2g-1} du polynôme $\deg(X\,\mathrm{id}_A - \varphi)$.

Pour mémoire nous citons les propriétés de base de cette trace (voir [Mu] pour plus de détails et en particulier le théorème 4 p. 180 pour l'intégralité).

Propriétés 2.2
Soient $\varphi, \tau \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(1) Si $\varphi \in \mathrm{End}_K A$ alors $\mathrm{Tr}(\varphi) \in \mathbb{Z}$.

(2) $\mathrm{Tr}(\varphi + x\tau) = \mathrm{Tr}(\varphi) + x\,\mathrm{Tr}(\tau)$.

(3) $\mathrm{Tr}(\varphi \circ \tau) = \mathrm{Tr}(\tau \circ \varphi)$.

(4) La trace de la multiplication $[m]\colon A \to A$ par un entier m est $\mathrm{Tr}([m]) = 2gm$.

Lorsque A est K-simple, un élément $\varphi \in \mathrm{End}_K(A)$ est une isogénie dès que $\varphi \neq 0$ et $\mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un corps (gauche). Sa dimension sur $\mathbb{Q}$ égale à $d = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}_K(A)$ vérifie, en raison de l'hypothèse de caractéristique nulle, l'importante relation de divisibilité : $d \mid 2g$ (voir [Mu, Remarque p. 182] : l'argument n'est donné que pour K algébriquement clos mais vaut en général car si $K \subset \mathbb{C}$ alors $\mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}$ agit fidèlement sur $\Omega_{A_{\mathbb{C}}} \otimes \mathbb{Q}$ même si $A_{\mathbb{C}}$ n'est pas simple).

Notons θ la représentation régulière (à gauche) de $\mathrm{End}_K(A)$: si $\varphi \in \mathrm{End}_K(A)$ alors θ_φ associe à $\tau \in \mathrm{End}_K(A)$ le morphisme $\theta_\varphi(\tau) = \varphi \circ \tau$. Dans le cas où A est K-simple comme ci-dessus, nous avons $(\deg \varphi)^d = (\det \theta_\varphi)^{2g}$ et cela entraîne $\mathrm{Tr}(\varphi) = (2g/d)\,\mathrm{Trace}(\theta_\varphi)$ où, pour la distinguer de Tr, nous notons $\mathrm{Trace}(\cdot)$ la trace usuelle des matrices ou des endomorphismes (ici d'un $\mathbb{Z}$-module libre). Pour la suite, nous retiendrons de cette discussion l'énoncé suivant.

LEMME 2.3
Si A est simple alors la trace Tr *sur* $\mathrm{End}_K(A)$ *est un multiple entier de la trace intrinsèque définie par la représentation régulière.*

Considérons deux variétés abéliennes A et B. Soient $\iota_1\colon A \hookrightarrow A \times B$, $\iota_2\colon B \hookrightarrow A \times B$ et $p_1\colon A \times B \to A$, $p_2\colon A \times B \to B$ respectivement les injections et projections canoniques. À un élément $\psi \in \mathrm{End}_K(A \times B)$ sont associés $\psi_1 = p_1 \circ \psi \circ \iota_1 \in$

$\mathrm{End}_K(A)$, $\psi_2 = p_1 \circ \psi \circ \iota_2 \in \mathrm{Hom}_K(B, A)$, $\psi_3 = p_2 \circ \psi \circ \iota_1 \in \mathrm{Hom}_K(A, B)$ et $\psi_4 = p_2 \circ \psi \circ \iota_2 \in \mathrm{End}_K(B)$. Ce procédé induit un isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}$-modules

$$\mathrm{End}_K(A \times B) = \mathrm{End}_K(A) \oplus \mathrm{Hom}_K(B, A) \oplus \mathrm{Hom}_K(A, B) \oplus \mathrm{End}_K(B).$$

Il est plus judicieux de considérer l'écriture de l'élément ψ sous forme matricielle $\left(\begin{smallmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{smallmatrix}\right)$ car alors le membre de droite de la décomposition ci-dessus, muni de la structure d'algèbre donnée par le produit des matrices, est isomorphe en tant que $\mathbb{Z}$-algèbre à $\mathrm{End}_K(A \times B)$. On vérifie alors $\mathrm{Tr}(\psi) = \mathrm{Tr}(\psi_1) + \mathrm{Tr}(\psi_4)$.

Notons $\widehat{A} = \mathrm{Pic}^0(A)$ la variété abélienne duale de A. À tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur A est associé le morphisme $\phi_{\mathcal{L}} \colon A \to \widehat{A}$ défini par $\phi_{\mathcal{L}}(x) = \tau_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ où $\tau_x \colon A \to A$ est la translation par $x \in A$ (voir [Mu, p. 60]). Ce morphisme est une isogénie si et seulement si $\mathcal{L}$ est ample et s'appelle alors une *polarisation*. On a $\deg \phi_{\mathcal{L}} = h^0(A, \mathcal{L})^2$. La polarisation est dite principale lorsque ce degré vaut 1 ($\phi_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme). Dans la suite, par abus de langage, nous confondrons souvent la polarisation (l'isogénie) et le faisceau inversible ample qui la définit. Ce dernier n'est certes pas unique mais l'ambiguïté est sans conséquence car toutes les notions que nous utiliserons (involution de Rosati, degré…) ne dépendent bien que de la polarisation. La seule difficulté provient du corps de définition car une polarisation peut être définie sur un corps donné (comme isogénie) mais ne s'écrire $\phi_{\mathcal{L}}$ que sur une extension : nous serons alors bien entendu plus précis (voir lemme 4.2).

La définition de nos métriques repose sur la notion suivante d'application de Rosati : elle confère plus de souplesse que l'involution de Rosati usuelle (par rapport à l'usage qu'en font Masser et Wüstholz par exemple).

Définition 2.4
Étant donné deux variétés abéliennes polarisées $(A, \mathcal{L})$ et $(B, \mathcal{M})$, *l'involution de Rosati généralisée* est l'application linéaire de $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q}$ dans $\mathrm{Hom}_K(B, A) \otimes \mathbb{Q}$ qui à φ associe

$$\varphi^\dagger := \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{\varphi} \circ \phi_{\mathcal{M}}$$

où $\widehat{\varphi} \colon \widehat{B} \to \widehat{A}$ est le morphisme dual.

Dans le cas où $\mathcal{L}$ est une polarisation principale, on a $\varphi^\dagger \in \mathrm{Hom}_K(B, A)$ lorsque $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B)$ mais ce n'est pas le cas en général.

Lorsque $(A, \mathcal{L}) = (B, \mathcal{M})$, cette définition est bien sûr celle de l'involution de Rosati classique (voir [Mu, p. 189]). Au demeurant, lorsque $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q}$, on vérifie que $\varphi^\dagger$ est l'image de φ, vu comme élément de $\mathrm{End}_K(A \times B) \otimes \mathbb{Q}$, par l'involution de Rosati classique associée à $(A \times B, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$ (en utilisant $\widehat{\iota_2} \circ \phi_{\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}} =$

$\phi_{\mathcal{M}} \circ p_2$ et $\iota_1 \circ \phi_{\mathcal{L}}^{-1} = \phi_{\mathcal{L}\boxtimes\mathcal{M}}^{-1} \circ \widehat{p_1}$; on rappelle la notation $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M} = p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{M}$). Ceci se traduit dans la décomposition ci-dessus par l'égalité

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger & \psi_3^\dagger \\ \psi_2^\dagger & \psi_4^\dagger \end{pmatrix}$$

pour $\psi \in \mathrm{End}_K(A \times B) \otimes \mathbb{Q}$. De la sorte les propriétés de l'involution de Rosati usuelle se transmettent à cette application généralisée. Par exemple, on a $(\varphi^\dagger)^\dagger = \varphi$ et $(\tau \circ \varphi)^\dagger = \varphi^\dagger \circ \tau^\dagger$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q}$ et $\tau \in \mathrm{Hom}_K(B, C) \otimes \mathbb{Q}$ (où C est une variété abélienne polarisée). En particulier $\varphi \mapsto \varphi^\dagger$ est une authentique involution sur $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q} \oplus \mathrm{Hom}_K(B, A) \otimes \mathbb{Q}$. Comme le degré est invariant par dualité, on a également

$$\deg \varphi^\dagger = \deg \varphi \Big(\frac{h^0(B, \mathcal{M})}{h^0(A, \mathcal{L})}\Big)^2.$$

Ainsi, sur $\mathrm{End}_K A$, l'involution de Rosati préserve le degré et la trace.

Définissons à présent la structure euclidienne sur $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$ qui joue un rôle crucial dans toute la suite. L'involution de Rosati s'étend en une application linéaire de $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$ dans $\mathrm{Hom}_K(B, A) \otimes \mathbb{R}$. La forme bilinéaire $(\varphi, \tau) \mapsto \langle \varphi, \tau \rangle = \mathrm{Tr}(\varphi\tau^\dagger)$ est symétrique et elle induit la forme quadratique $q_{(A,B)}(\varphi) = \mathrm{Tr}(\varphi\varphi^\dagger)$ sur $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.5
Dans la décomposition ci-dessus, on a $q_{A\times B} = q_A \oplus q_{(B,A)} \oplus q_{(A,B)} \oplus q_B$.

Démonstration
Soit $\psi = \left(\begin{smallmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{smallmatrix}\right)$. On a

$$\psi\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1\psi_1^\dagger + \psi_2\psi_2^\dagger & \psi_1\psi_3^\dagger + \psi_2\psi_4^\dagger \\ \psi_3\psi_1^\dagger + \psi_4\psi_2^\dagger & \psi_3\psi_3^\dagger + \psi_4\psi_4^\dagger \end{pmatrix}$$

et donc $\mathrm{Tr}(\psi) = \mathrm{Tr}(\psi_1\psi_1^\dagger + \psi_2\psi_2^\dagger) + \mathrm{Tr}(\psi_3\psi_3^\dagger + \psi_4\psi_4^\dagger) = q_A(\psi_1) + q_{(B,A)}(\psi_2) + q_{(A,B)}(\psi_3) + q_B(\psi_4)$. □

On sait que $q_{A\times B}$ est une forme quadratique définie positive (voir [Mu, p. 192]). Par la proposition, il en est donc de même pour $q_{(A,B)}$, qui définit ainsi une structure euclidienne sur $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$.

Définition 2.6
La métrique de Rosati sur $\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$ est celle donnée par la norme euclidienne $|\varphi| := \sqrt{\mathrm{Tr}(\varphi\varphi^\dagger)}$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$.

Cette métrique dépend de A, B et des polarisations choisies. La proposition 2.5 montre que la somme directe $\mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{R} \oplus \mathrm{Hom}_K(B, A) \otimes \mathbb{R} \oplus \mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R} \oplus \mathrm{End}_K(B) \otimes \mathbb{R}$ est orthogonale, isométriquement isomorphe à $(\mathrm{End}_K(A \times B) \otimes \mathbb{R}, |\cdot|)$. De plus, l'involution de Rosati induit une isométrie de $(\mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}, q_{(A,B)})$ dans $(\mathrm{Hom}_K(B, A) \otimes \mathbb{R}, q_{(B,A)})$. Lorsque les deux polarisations sont principales, cette isométrie met en bijection $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ et $\mathrm{Hom}_K(B, A)$.

PROPOSITION 2.7
Soient A, B, C des variétés abéliennes polarisées. Soient $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathrm{Hom}_K(B, C) \otimes \mathbb{R}$. On a $|\tau \circ \varphi| \leq |\tau| \cdot |\varphi|$.

Démonstration
On a

$$|\tau \circ \varphi|^2 = \mathrm{Tr}(\tau \circ \varphi \circ \varphi^\dagger \circ \tau^\dagger) = \mathrm{Tr}\big((\tau^\dagger \circ \tau) \circ (\varphi \circ \varphi^\dagger)\big) = \langle \varphi \circ \varphi^\dagger, \tau \circ \tau^\dagger \rangle$$

donc $|\tau \circ \varphi|^2 \leq |\varphi \circ \varphi^\dagger| \cdot |\tau \circ \tau^\dagger|$ par Cauchy–Schwarz. En voyant φ et $\varphi^\dagger$ comme des éléments de $\mathrm{End}_K(A \times B) \otimes \mathbb{R}$, on a $|\varphi \circ \varphi^\dagger| \leq |\varphi||\varphi^\dagger| = |\varphi|^2$ par [MW2, Lemme 2.2]. $\square$

On peut donner une expression de $q_{(A,B)}$ en termes de nombres d'intersection.

PROPOSITION 2.8
Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B)$. On a

$$q_{(A,B)}(\varphi) = \frac{2g}{(\mathcal{L}^{\cdot g})} (\mathcal{L}^{\cdot g-1} \cdot \varphi^* \mathcal{M}).$$

Démonstration
Notons $b = \dim B$ et $\mathcal{H} = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$. Soient $\psi \in \mathrm{End}_K(A \times B)$ et $\left(\begin{smallmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{smallmatrix}\right)$ son expression matricielle. On a $\psi^* \mathcal{H} = (\psi_1^* \mathcal{L} \otimes \psi_3^* \mathcal{M}) \boxtimes (\psi_2^* \mathcal{L} \otimes \psi_4^* \mathcal{M})$ et le produit d'intersection $\mathcal{H}^{\cdot g+b-1} \cdot \psi^* \mathcal{H}$ sur $A \times B$ vaut

$$\begin{aligned}
&\binom{g+b-1}{g} (\mathcal{L}^{\cdot g} \boxtimes \mathcal{M}^{\cdot b-1}) \cdot \psi^* \mathcal{H} + \binom{g+b-1}{b} (\mathcal{L}^{\cdot g-1} \boxtimes \mathcal{M}^{\cdot b}) \cdot \psi^* \mathcal{H} \\
&\quad = \binom{g+b-1}{g} (\mathcal{L}^{\cdot g}) (\mathcal{M}^{\cdot b-1} \cdot \psi_2^* \mathcal{L} + \mathcal{M}^{\cdot b-1} \cdot \psi_4^* \mathcal{M}) \\
&\qquad + \binom{g+b-1}{b} (\mathcal{M}^{\cdot b}) (\mathcal{L}^{\cdot g-1} \cdot \psi_1^* \mathcal{L} + \mathcal{L}^{\cdot g-1} \cdot \psi_3^* \mathcal{M}).
\end{aligned}$$

Le théorème 1 p. 192 de [Mu] (qui n'est autre que la présente proposition pour $A = B$) fournit la formule

$$q_{A\times B}(\psi) = \frac{2(g+b)}{(\mathcal{H}^{\cdot g+b})}(\mathcal{H}^{\cdot g+b-1}\cdot \psi^*\mathcal{H})$$

ainsi que des expressions analogues pour $q_A(\psi_1)$ et $q_B(\psi_4)$. En utilisant encore l'égalité

$$(\mathcal{H}^{\cdot g+b}) = \binom{g+b}{g}(\mathcal{L}^{\cdot g})(\mathcal{M}^{\cdot b})$$

nous aboutissons à

$$q_{A\times B}(\psi) = \frac{2b}{(\mathcal{M}^{\cdot b})}(\mathcal{M}^{\cdot b-1}\cdot \psi_2^*\mathcal{L}) + q_B(\psi_4) + q_A(\psi_1) + \frac{2g}{(\mathcal{L}^{\cdot g})}(\mathcal{L}^{\cdot g-1}\cdot \psi_3^*\mathcal{M}).$$

Il ne reste plus qu'à identifier les termes dans la décomposition de $q_{A\times B}$ donnée par la proposition 2.5 pour conclure. □

Le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ est maintenant un réseau dans l'espace euclidien $(\mathrm{Hom}_K(A, B)\otimes\mathbb{R}, |\cdot|)$ et nous notons $\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}_K(A, B))$ son covolume (voir les rappels faits dans la partie suivante).

PROPOSITION 2.9
Le produit $v(A, B) := \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}_K(A, B))\,\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}_K(B, A))$ *est un entier* ≥ 1 *qui ne dépend pas du choix des polarisations sur* A *et* B. *En particulier* $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K(A)) \geq 1$ *ne dépend pas du choix de la polarisation sur* A.

Démonstration
Soit $e = (e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de $\mathrm{Hom}_K(A, B)\otimes\mathbb{R}$. Alors $e^\dagger = (e_1^\dagger, \dots, e_d^\dagger)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Hom}_K(B, A)\otimes\mathbb{R}$ par isométrie. Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ une $\mathbb{Z}$-base de $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ et $\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base e. Soient de même $(\tau_1, \dots, \tau_d)$ une base de $\mathrm{Hom}_K(B, A)$ et $\mathcal{B} = (b_{i,j})_{i,j}$ sa matrice dans la base $e^\dagger$. Par définition on a $v(A, B) = |\det \mathcal{A}||\det \mathcal{B}|$. Comme $\tau_j^\dagger = \sum_{m=1}^d b_{m,j}e_m$, le terme général de $\mathcal{A}\mathcal{B}$ est égal au produit scalaire $\langle\varphi_i, \tau_j^\dagger\rangle$. On a donc $v(A, B) = |\det(\mathrm{Tr}(\varphi_i\tau_j))_{(i,j)}|$. Cette expression, qui ne dépend pas des polarisations, est entière car $\mathrm{Tr}(\varphi_i\tau_j) \in \mathbb{Z}$ pour tous i, j. □

La formule donnée pour $v(A, B)$ au cours de cette démonstration nous donne également les calculs de volumes suivants.

COROLLAIRE 2.10

Pour toute variété abélienne A on a $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K \widehat{A}) = \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A)$ *et, si l'on définit* $Z(A) = (A \times \widehat{A})^4$, *alors*

$$\mathrm{vol}\big(\mathrm{End}_K\big(Z(A)\big)\big) = \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A)^{32} v(A, \widehat{A})^{16}.$$

Démonstration

Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ est une base du réseau $\mathrm{End}_K(A)$, alors $(\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_d)$ est une base du réseau $\mathrm{End}_K \widehat{A}$. La formule donne donc $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K \widehat{A})^2 = v(\widehat{A}, \widehat{A}) = |\det(\mathrm{Tr}(\widehat{\varphi}_i \widehat{\varphi}_j))_{i,j}|$. Comme $\widehat{\varphi}_i \widehat{\varphi}_j = \widehat{\varphi_j \varphi_i}$ et qu'un endomorphisme et son dual ont même trace, on a $\mathrm{Tr}(\widehat{\varphi}_i \widehat{\varphi}_j) = \mathrm{Tr}(\varphi_i \varphi_j)$ et donc $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K \widehat{A}) = \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A)$. On déduit par ailleurs de la proposition 2.5 l'égalité

$$\mathrm{vol}\big(\mathrm{End}_K(A \times B)\big) = \mathrm{vol}\big(\mathrm{End}_K(A)\big)\,\mathrm{vol}\big(\mathrm{End}_K(B)\big) v(A, B)$$

pour toutes variétés abéliennes A, B. En particulier on a $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K((A \times B)^2)) = \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K(A \times B))^4$ puis

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\big(\mathrm{End}_K\big(Z(A)\big)\big) &= \mathrm{vol}\big(\mathrm{End}_K(A \times \widehat{A})\big)^{16} \\ &= \big(\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A)\,\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K \widehat{A}) v(A, \widehat{A})\big)^{16}.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K \widehat{A}) = \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A)$. □

Dans ce corollaire, toutes les quantités qui apparaissent sont indépendantes de choix de polarisations. Par exemple, l'inégalité $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A) \le \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K(Z(A)))^{1/32}$ permet d'estimer le premier terme sans introduire de polarisation sur A mais avec une polarisation principale sur $Z(A)$.

L'énoncé suivant ramène entre autres un problème de petit degré d'isogénie à celui d'une petite norme d'isogénie.

PROPOSITION 2.11

Pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{R}$, *on a*

$$\deg \varphi \le \frac{|\varphi|^{2g}}{(2g)^g} \frac{h^0(A, \mathcal{L})}{h^0(B, \mathcal{M})}.$$

Démonstration

Lorsque $(A, \mathcal{L}) = (B, \mathcal{M})$, cette inégalité est une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique comme l'ont montré Masser et Wüstholz [MW2, Lemme 2.3]. Dans le cas général, par homogénéité du degré, on peut supposer que $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B)$

et même $\varphi^\dagger \in \mathrm{Hom}_K(B, A)$. Nous supposons aussi que φ est une isogénie car sinon $\deg \varphi = 0$. En particulier on a $\dim A = \dim B$. Considérons l'isogénie

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & \varphi^\dagger \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_K(A \times B)$$

de degré

$$\deg \psi = (\deg \varphi)(\deg \varphi^\dagger) = (\deg \varphi)^2 \Big(\frac{h^0(B, \mathcal{M})}{h^0(A, \mathcal{L})} \Big)^2$$

par la formule pour $\deg \varphi^\dagger$ vue plus haut. Par ailleurs, on a $|\psi|^2 = |\varphi^\dagger|^2 + |\varphi|^2 = 2|\varphi|^2$. On déduit alors la proposition du cas connu $\deg \psi \le |\psi|^{4g}/(4g)^{2g}$. $\square$

On notera que lorsque A et B sont des courbes elliptiques munies de leurs polarisations principales il y a égalité $|\varphi|^2 = 2 \deg \varphi$.

3. Préliminaires de géométrie des nombres

Nous présentons dans cette partie les outils de géométrie des nombres utilisés de manière cruciale pour les réseaux euclidiens $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ avec leurs métriques de Rosati et, plus ponctuellement (partie 8), pour les réseaux de périodes de variétés abéliennes complexes.

Soit Ω un réseau (cocompact) d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension n. Dans ce texte, nous utiliserons seulement les premier et dernier des minima successifs d'un réseau. Nous faisons usage des notations suivantes :

$$\lambda(\Omega) = \min \big\{ |x|;\ x \in \Omega \setminus \{0\} \big\}$$

et $\Lambda(\Omega)$ est le minimum des nombres réels $\lambda > 0$ pour lesquels il existe une famille libre $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de Ω telle que $|\omega_i| \le \lambda$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ ($| \cdot |$ est la norme associée au produit scalaire sur E). Nous notons $\mathrm{vol}(\Omega)$ le covolume de Ω relatif à la mesure de Haar donnée sur E par une base orthonormée de E, qui s'exprime en termes de déterminant d'une $\mathbb{Z}$-base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de Ω par la formule $\mathrm{vol}(\Omega) = \det(\langle \omega_i, \omega_j \rangle)^{1/2}_{1 \le i, j \le n}$. Si $\mho$ est un sous-réseau de Ω, l'indice $[\Omega : \mho]$ est égal au quotient $\mathrm{vol}(\mho)/\mathrm{vol}(\Omega)$ et, en particulier, on a $\mathrm{vol}(\Omega) \le \mathrm{vol}(\mho)$. L'inégalité d'Hadamard donne la majoration $\mathrm{vol}(\Omega) \le \Lambda(\Omega)^n$. On dispose aussi des premier et second théorèmes de Minkowski, que l'on donne ici sous une forme affaiblie.

LEMME 3.1
Avec les données ci-dessus, on a

$$\lambda(\Omega) \le \sqrt{n}\, \mathrm{vol}(\Omega)^{1/n} \qquad \textit{et} \qquad \lambda(\Omega)^{n-1} \Lambda(\Omega) \le \sqrt{n}^{\,n}\, \mathrm{vol}(\Omega).$$

Démonstration
La première inégalité découle de la seconde, qui est un cas particulier du théorème 2.6.8 de [Mar] (on utilise la majoration $\gamma_n \leq n$ de la constante d'Hermite qui se déduit de la remarque 2.7.5 *ibid.* pour $n \geq 2$). □

Nous donnons à présent plusieurs formules où intervient le dernier minimum Λ d'un réseau de la forme $\mathrm{Hom}_K(A, B)$. Certaines sont tout à fait élémentaires : par exemple, dans une situation produit, une décomposition en somme orthogonale du même type que celle de la proposition 2.5 donne $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A \times B, C)) = \max(\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, C)), \Lambda(\mathrm{Hom}_K(B, C)))$. Notons aussi que si la polarisation sur A est principale alors $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B)) \geq \lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B)) \geq 1$ car ici la forme $q_{(A,B)}$ prend des valeurs entières sur $\mathrm{Hom}_K(A, B)$.

Pour assurer qu'un morphisme entre variétés abéliennes est une isogénie, nous utiliserons l'énoncé suivant.

LEMME 3.2
Soient A, B des variétés abéliennes définies sur K et K-isogènes de dimension g. Il existe une K-isogénie $\varphi\colon A \to B$ telle que

$$\deg \varphi \leq (2g)^g \left(\frac{h^0(A, \mathcal{L})}{h^0(B, \mathcal{M})}\right) \Lambda\left(\mathrm{Hom}_K(A, B)\right)^{2g}.$$

Démonstration
On applique le lemme de Siegel d'évitement [GR2, Théorème 1.1] au polynôme $P = \deg$ sur l'espace $E = \Omega \otimes \mathbb{R}$ avec $\Omega = \mathrm{Hom}_K(A, B)$ et $M = 2g$. On obtient l'existence de φ avec $\deg \varphi \neq 0$ et $|\varphi| \leq 2g\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B))$. On conclut avec la proposition 2.11. □

Si K'/K est une extension de corps, l'inclusion $\mathrm{Hom}_K(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{K'}(A, B)$ est en général stricte. Néanmoins, après extension de corps finie, il y a égalité : il existe une extension galoisienne finie K_1/K telle que $\mathrm{Hom}_{K_1}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(A, B)$. Pour descendre les isogénies définies sur $\overline{K}$ à K nous passerons par un argument de trace, formalisé dans l'énoncé suivant.

LEMME 3.3
Soient A et B deux variétés abéliennes polarisées définies sur K. Pour toute extension galoisienne finie K_1 de K, nous avons $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B)) \leq [K_1 : K]\Lambda(\mathrm{Hom}_{K_1}(A, B))$.

Démonstration
Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ une famille libre maximale de $\mathrm{Hom}_{K_1}(A, B)$ telle que $|\phi_i| \leq$

$\Lambda(\mathrm{Hom}_{K_1}(A,B))$ pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$. Pour chaque élément σ du groupe de Galois G de K_1/K, considérons $\sigma(\phi_i) \in \mathrm{Hom}_{K_1}(A,B)$ et posons $\varphi_i := \sum_{\sigma\in G}\sigma(\phi_i)$. Naturellement invariant par G, le morphisme φ_i est défini sur K. De plus, comme les variétés abéliennes polarisées A et B sont définies sur K, l'action de G commute à l'involution de Rosati et respecte la trace donc $|\sigma(\phi)| = |\phi|$ pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{K_1}(A,B)$. On en déduit la borne $|\varphi_i| \le [K_1 : K]\Lambda(\mathrm{Hom}_{K_1}(A,B))$ pour tout i. Pour conclure, il suffit d'observer que $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ engendrent $\mathrm{Hom}_K(A,B)\otimes\mathbb{Q}$. Pour cela, considérons $f \in \mathrm{Hom}_K(A,B) \subset \mathrm{Hom}_{K_1}(A,B)$. Il existe $a_1,\dots,a_d \in \mathbb{Q}$ tels que $f = \sum_{i=1}^d a_i\phi_i$. Par suite $[K_1 : K]f = \sum_{\sigma\in G}\sigma(f) = \sum_{i=1}^d a_i\varphi_i$ d'où le résultat. □

La proposition 2.7 se traduit par la formule suivante.

LEMME 3.4
Soient A, B, C trois variétés abéliennes définies sur K. Supposons que A ou B est isogène à une sous-variété abélienne de C. Alors on a $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A,B)) \le \Lambda(\mathrm{Hom}_K(A,C))\Lambda(\mathrm{Hom}_K(C,B))$.

Démonstration
Soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_d)$ (*resp.* $(\tau_1,\dots,\tau_e)$) une famille libre maximale du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}_K(A,C)$ (*resp.* de $\mathrm{Hom}_K(C,B)$) telle que $|\varphi_i| \le \Lambda(\mathrm{Hom}_K(A,C))$ pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$ (*resp.* $|\tau_j| \le \Lambda(\mathrm{Hom}_K(C,B))$ pour tout $j \in \{1,\dots,e\}$). Comme la proposition 2.7 donne $|\tau_j \circ \varphi_i| \le |\tau_j||\varphi_i|$, il suffit de vérifier que la famille $F = \{\tau_j \circ \varphi_i ; 1 \le i \le d, 1 \le j \le e\}$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_K(A,B)$ contient une famille libre maximale. Pour le voir, montrons que l'orthogonal dans $\mathrm{Hom}_K(A,B)\otimes\mathbb{R}$ de l'espace vectoriel engendré par F est réduit à $\{0\}$. Soit f dans cet orthogonal. Pour tous i, j, on a $0 = \langle f, \tau_j \circ \varphi_i\rangle = \langle f \circ \varphi_i^\dagger, \tau_j\rangle = \langle \tau_j^\dagger \circ f, \varphi_i\rangle$ donc $f \circ \varphi_i^\dagger = 0$ et $\tau_j^\dagger \circ f = 0$. Ainsi $f \circ u = 0$ pour tout $u \in \mathrm{Hom}_K(C,A)\otimes\mathbb{R}$ et $v \circ f = 0$ pour tout $v \in \mathrm{Hom}_K(B,C)\otimes\mathbb{R}$. Si A est isogène à une sous-variété abélienne de C, il existe une surjection $u\colon C \to A$. Dans l'autre cas, l'hypothèse fournit un morphisme $v\colon B \to C$ de noyau fini. Dans les deux cas, on peut conclure $f = 0$. □

Présentons maintenant l'estimation des minima du réseau des périodes d'une variété abélienne complexe. Soient A une variété abélienne définie sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur A. On note g la dimension de A et Ω_A le réseau des périodes de A. Soit t_A l'espace tangent (complexe) à l'origine de A. Au faisceau $\mathcal{L}$ est attachée sa forme de Riemann $H : t_A \times t_A \to \mathbb{C}$ (produit hermitien). Notons $E(x,y) = \mathrm{Im}\, H(x,y)$ la forme alternée induite par H. L'application $(x,y) \mapsto \mathrm{Re}\, H(x,y) = E(ix,y)$ définit un produit scalaire sur t_A vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension $2g$). On note $e(\mathcal{L})$ l'exposant de $\mathcal{L}$ (c'est-à-dire l'exposant de groupe fini $\operatorname{Ker}\phi_{\mathcal{L}}$).

PROPOSITION 3.5
On a $1 \leq \lambda(\Omega_A)\Lambda(\Omega_A) \leq 2ge(\mathcal{L})$.

Démonstration
Considérons le réseau polaire $\Omega_A^* = \{x \in t_A; \forall \omega \in \Omega_A, E(ix, \omega) \in \mathbb{Z}\}$ de Ω_A. On a $\Omega_A \subset i\Omega_A^*$ et d'après [BL, p. 37], le quotient $i\Omega_A^*/\Omega_A$ s'identifie au noyau de l'isogénie $\phi_{\mathcal{L}}$. Ainsi $e(\mathcal{L})i\Omega_A^* \subset \Omega_A \subset i\Omega_A^*$. De plus la multiplication par i sur t_A est une isométrie (propriété qui découle des formules $E(ix, iy) = E(x, y)$ et $E(x, y) = -E(y, x)$). On trouve ainsi l'encadrement $\lambda(\Omega_A^*) \leq \lambda(\Omega_A) \leq e(\mathcal{L})\lambda(\Omega_A^*)$. On conclut au moyen du théorème de transfert de Banaszczyk [Ba, Théorème 2.1] qui s'énonce ici sous la forme $1 \leq \lambda(\Omega_A^*)\Lambda(\Omega_A) \leq 2g$. □

Le théorème de Banaszczyk étant en fait plus général, les autres minima $\lambda(\Omega_A) = \lambda_1(\Omega_A) \leq \cdots \leq \lambda_{2g}(\Omega_A) = \Lambda(\Omega_A)$ du réseau des périodes satisfont un encadrement analogue, $1 \leq \lambda_\ell(\Omega_A)\lambda_{2g+1-\ell}(\Omega_A) \leq 2ge(\mathcal{L})$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, 2g\}$.

Comme l'exposant de $\mathcal{L}$ divise $h^0(A, \mathcal{L})$, on en déduit l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 3.6
On a $1 \leq \lambda(\Omega_A)\Lambda(\Omega_A) \leq 2gh^0(A, \mathcal{L})$.

4. Variétés abéliennes simples

Dans cette partie, nous supposons que la variété abélienne A est définie sur un corps K de caractéristique nulle et qu'elle est K-simple. Nous établissons alors des bornes dans la direction des théorèmes principaux pour A en fonction de volumes de réseaux de la forme $\operatorname{Hom}_K(A, A')$.

Le point de départ est la remarque élémentaire que si A' est définie sur K et K-isogène à A alors tout élément non nul de $\operatorname{Hom}_K(A, A')$ est une isogénie. Ce fait de base permet déjà de donner l'énoncé suivant, dont l'assertion (1) est le théorème d'isogénie dans le présent cadre.

PROPOSITION 4.1
Soit A' une variété abélienne définie sur K et isogène à A sur K. Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ des polarisations sur A et A' définies sur K et notons d le rang de $\operatorname{End}_K(A)$.

(1) *Il existe une isogénie $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(A, A')$ telle que*

$$\deg \varphi \leq \left(\frac{d}{2g}\right)^g \frac{h^0(A, \mathcal{L})}{h^0(A', \mathcal{L}')} \operatorname{vol}\bigl(\operatorname{Hom}_K(A, A')\bigr)^{2g/d}.$$

(2) *Le dernier minimum vérifie*

$$\Lambda\big(\mathrm{Hom}_K(A,A')\big) \leq \sqrt{2g}\Big(\frac{d}{2g}\Big)^{d/2}\Big(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(A',\mathcal{L}')}\Big)^{(d-1)/2g}\mathrm{vol}\big(\mathrm{Hom}_K(A,A')\big).$$

Démonstration
Nous choisissons $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A,A')$ avec $|\varphi| = \lambda(\mathrm{Hom}_K(A,A'))$. Alors par la proposition 2.11

$$1 \leq \deg\varphi \leq \frac{|\varphi|^{2g}}{(2g)^g}\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(A',\mathcal{L}')} = \frac{\lambda(\mathrm{Hom}_K(A,A'))^{2g}}{(2g)^g}\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(A',\mathcal{L}')}.$$

Cette relation donne (1) *via* le premier théorème de Minkowski $\lambda(\mathrm{Hom}_K(A,A')) \leq \sqrt{d}\,\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}_K(A,A'))^{1/d}$ (lemme 3.1). Elle entraîne aussi l'inégalité

$$\lambda\big(\mathrm{Hom}_K(A,A')\big) \geq \sqrt{2g}\Big(\frac{h^0(A',\mathcal{L}')}{h^0(A,\mathcal{L})}\Big)^{1/2g}$$

qui, combinée au second théorème de Minkowski

$$\lambda\big(\mathrm{Hom}_K(A,A')\big)^{d-1}\Lambda\big(\mathrm{Hom}_K(A,A')\big) \leq d^{d/2}\,\mathrm{vol}\big(\mathrm{Hom}_K(A,A')\big),$$

fournit directement (2). □

Si nous appliquons la première assertion au couple (A',A) nous obtenons un couple d'isogénies $\varphi\colon A \to A'$ et $\varphi'\colon A' \to A$ avec

$$\deg\varphi\deg\varphi' \leq \Big(\frac{d}{2g}\Big)^{2g}\Big(\mathrm{vol}\big(\mathrm{Hom}_K(A,A')\big)\,\mathrm{vol}\big(\mathrm{Hom}_K(A',A)\big)\Big)^{2g/d}.$$

Ceci s'écrit $\deg\varphi\deg\varphi' \leq c^{g/d}$ si c est le discriminant croisé associé à A et A' introduit par Masser et Wüstholz [MW3, p. 15], comme on le voit avec la formule pour $v(A,A')$ donnée dans la démonstration de la proposition 2.9. Notre proposition donne donc une démonstration plus directe (qui n'utilise pas l'indice de classe) de leur lemme 4.2 (il est énoncé sous la forme faible $\deg\varphi \leq c^g$ mais sa preuve fournit bien en fait $\deg\varphi\deg\varphi' \leq c^{g/d}$).

Notre deuxième étape, qui constitue la principale innovation du présent texte, consiste à contrôler une polarisation de A. En spécialisant $A' = \widehat{A}$ dans ce qui précède, nous savons trouver une petite isogénie $A \to \widehat{A}$; notre tâche est d'en trouver une qui soit effectivement une polarisation c'est-à-dire de la forme $\phi_{\mathcal{N}}$ pour un faisceau inversible ample $\mathcal{N}$ sur A. Si nous omettons momentanément l'amplitude, le résultat suivant répond à la question. Rappelons que pour tout faisceau inversible $\mathcal{N}$ sur A on a $\widehat{\phi_{\mathcal{N}}} = \phi_{\mathcal{N}}$ (voir [MvdG, (7.8)]).

LEMME 4.2
Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A})$ *vérifie* $\varphi = \widehat{\varphi}$ *alors il existe un faisceau inversible symétrique* $\mathcal{N}$ *sur* A *défini sur* K *tel que* $\phi_{\mathcal{N}} = 2\varphi$.

Démonstration
Sur $\overline{K}$ nous pouvons utiliser les arguments de Mumford [Mu] : l'assertion (3) p. 190 montre $\varphi = \phi_{\mathcal{M}}$ pour un $\mathbb{Q}$-faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur $\overline{K}$ (car $(\phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \varphi)^{\dagger} = \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{(\phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \varphi)} \circ \phi_{\mathcal{L}} = \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{\varphi} \circ \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{L}} = \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \varphi$) puis, comme dans la remarque p. 189, le théorème 3 p. 231 entraîne que l'on peut choisir $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(A_{\overline{K}})$ (en effet si $\mathcal{M}^{\otimes N} \in \mathrm{Pic}(A_{\overline{K}})$ alors $\phi_{\mathcal{M}^{\otimes N}} = N\varphi$ donc $\mathrm{Ker}[N] \subset \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathcal{M}^{\otimes N}} = K(\mathcal{M}^{\otimes N})$ d'où, par le théorème, $\mathcal{M}^{\otimes N} = (\mathcal{M}')^{\otimes N}$ pour un certain $\mathcal{M}' \in \mathrm{Pic}(A_{\overline{K}})$).

Montrons à présent que $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes [-1]^*\mathcal{M}$ convient. Nous avons bien $\phi_{\mathcal{N}} = \phi_{\mathcal{M}} + \phi_{[-1]^*\mathcal{M}} = 2\phi_{\mathcal{M}} = 2\varphi$ ainsi que $[-1]^*\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}$ et il reste à voir que $\mathcal{N}$ est défini sur K. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ alors $\phi_{\sigma(\mathcal{M})} = \sigma(\phi_{\mathcal{M}}) = \phi_{\mathcal{M}}$ car $\phi_{\mathcal{M}} = \varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A})$. Par suite $\sigma(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} \in \mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Pic}^0(A_{\overline{K}})$. En particulier cet élément est antisymétrique ce qui s'écrit $[-1]^*(\sigma(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}) \simeq \sigma(\mathcal{M})^{\otimes -1} \otimes \mathcal{M}$ ou encore $[-1]^*\sigma(\mathcal{M}) \otimes \sigma(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M} \otimes [-1]^*\mathcal{M}$. Nous en déduisons $\sigma(\mathcal{N}) \simeq \mathcal{N}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ ce qui montre bien que $\mathcal{N}$ est défini sur K. □

Alternativement (voir [MvdG, (11.1)]), on peut montrer ce résultat en prenant $\mathcal{N} = (\mathrm{id}, \varphi)^*\mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le faisceau de Poincaré sur $A \times \widehat{A}$.

Voyons maintenant comment caractériser l'amplitude. Nous utilisons pour cela un critère matriciel basé sur la classification d'Albert des algèbres à anti-involution positive. Nous verrons apparaître des algèbres de matrices $\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})$ où δ est un entier naturel et $\mathbb{K}$ l'un des trois corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (le corps des quaternions de Hamilton). Une telle algèbre porte une anti-involution de transconjugaison $M \mapsto M^*$ obtenue en transposant la matrice et en appliquant aux coefficients la conjugaison de $\mathbb{K}$ (qui est l'identité si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Les matrices M telles que $M = M^*$ seront dites hermitiennes et leur ensemble sera noté $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})$. Elles admettent des valeurs propres réelles (pour $\mathbb{H}$ voir [Mu, p. 210]) et sont dites (définies) positives lorsque ces valeurs propres sont (strictement) positives. Si $M \in \mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})$ alors $MM^* \in \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})$ est positive et l'on définit la norme de Hilbert–Schmidt de M comme la racine carrée de la somme des coefficients diagonaux (réels positifs) de MM^* c'est-à-dire $\|M\|_{\mathrm{HS}}^2 = \mathrm{Trace}(MM^*)$. Lorsque M est hermitienne, $\|M\|_{\mathrm{HS}}^2$ s'écrit aussi comme la somme des carrés des valeurs propres de M. Tout ceci est très classique pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; pour $\mathbb{H}$ nous n'utiliserons ci-dessous que le cas évident $\delta = 1$ mais les propriétés valent aussi en général (on pourra consulter [FP]). Enfin nous étendons ces notions au cas d'un r-uplet $M = (M_1, \ldots, M_r) \in \mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r$ par $M^* = (M_1^*, \ldots, M_r^*)$, $\|M\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i=1}^r \|M_i\|_{\mathrm{HS}}^2$ et M est dit défini positif si les M_i le sont.

Pour énoncer la forme précise de notre critère d'amplitude, nous avons encore besoin de fixer des polarisations $\mathcal{L}$ et $\widehat{\mathcal{L}}$ sur A et $\widehat{A}$ définies sur K telles que $\phi_{\widehat{\mathcal{L}}} \circ \phi_{\mathcal{L}} = [m]$ pour un entier $m \geq 1$. Le paragraphe 14.4 de [BL] assure l'existence d'un tel couple (en fait on peut définir $\widehat{\mathcal{L}}$ à partir de $\mathcal{L}$ comme dans le lemme précédent et montrer son amplitude comme dans le lemme ci-dessous).

LEMME 4.3
Il existe un corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, deux entiers $\delta, r \geq 1$ et un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\iota\colon \operatorname{Hom}_K(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{R} \to \operatorname{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r$ tel que

(1) *si $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{R}$ alors $\iota(\widehat{\varphi}) = \iota(\varphi)^*$,*

(2) *si $\mathcal{N} \in \operatorname{Pic}(A)$ alors $\mathcal{N}$ est ample si et seulement si $\iota(\phi_{\mathcal{N}})$ est défini positif,*

(3) *la norme $|\cdot|$ sur $\operatorname{Hom}_K(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{L}$ et $\widehat{\mathcal{L}}$ correspond* via *ι à un multiple de $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$,*

(4) *on a $r\delta \leq g$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r \leq 3g/2$.*

Démonstration
Nous commençons notre construction par l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \theta\colon \operatorname{Hom}_K(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{R} &\longrightarrow \operatorname{End}_K A \otimes \mathbb{R}, \\ \varphi &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{m}} \phi_{\widehat{\mathcal{L}}} \circ \varphi \end{aligned}$$

(d'inverse $\psi \mapsto m^{-1/2} \phi_{\mathcal{L}} \circ \psi$). Lorsque $\operatorname{End}_K A \otimes \mathbb{R}$ est muni de l'involution et de la métrique de Rosati associées à $\mathcal{L}$, nous avons pour $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{R}$

$$\theta(\varphi)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{m}} \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{\varphi} \circ \phi_{\widehat{\mathcal{L}}} \circ \phi_{\mathcal{L}} = \sqrt{m} \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{m}} \phi_{\widehat{\mathcal{L}}} \circ \widehat{\varphi} = \theta(\widehat{\varphi})$$

(en utilisant $\widehat{\phi_{\widehat{\mathcal{L}}}} = \phi_{\widehat{\mathcal{L}}}$) et

$$\begin{aligned} \big|\theta(\varphi)\big|^2 &= \operatorname{Tr}\big(\theta(\varphi)\theta(\varphi)^\dagger\big) = \operatorname{Tr}(\phi_{\widehat{\mathcal{L}}} \circ \varphi \circ \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{\varphi}) \\ &= \operatorname{Tr}(\varphi \circ \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \widehat{\varphi} \circ \phi_{\widehat{\mathcal{L}}}) = \operatorname{Tr}(\varphi\varphi^\dagger) = |\varphi|^2. \end{aligned}$$

Maintenant $\operatorname{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$ est un corps muni d'une anti-involution positive $\dagger$ et rentre donc dans la classification d'Albert (voir [Mu, p. 201]). En particulier, il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\kappa\colon \operatorname{End}_K A \otimes \mathbb{R} \to \operatorname{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r$ avec $\kappa(\psi^\dagger) = \kappa(\psi)^*$. Selon les cas nous avons :

I. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \delta = 1,$ II. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \delta = 2,$ III. $\mathbb{K} = \mathbb{H}, \delta = 1,$ IV. $\mathbb{K} = \mathbb{C}.$

Les conditions de divisibilité données page 202 de [Mu] en caractéristique 0 s'écrivent respectivement $r \mid g$, $2r \mid g$, $2r \mid g$ et $r\delta^2 \mid g$. Ceci entraîne bien sûr $r\delta \leq g$ puis la seconde partie de l'assertion (4) car un calcul direct montre que la dimension de $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})$ vaut selon les cas : 1, 3, 1 et δ^2.

Définissons à présent $\iota = \kappa \circ \theta$. L'assertion (1) découle immédiatement de $\theta(\varphi)^\dagger = \theta(\widehat{\varphi})$ et $\kappa(\psi^\dagger) = \kappa(\psi)^*$. Le critère d'amplitude (2) est donné pages 209–210 de [Mu] en termes de valeurs propres. Enfin, comme θ est isométrique, voyons pour (3) que κ transporte la métrique de Rosati $|\cdot|$ sur un multiple de $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$. En utilisant encore $\kappa(\psi^\dagger) = \kappa(\psi)^*$ et les définitions des normes en termes de traces, il suffit de vérifier que $\mathrm{Tr} \circ \kappa^{-1}$ est un multiple de la trace matricielle sur $\mathrm{Mat}_\delta(\mathbb{K})^r$. Or, elles sont toutes les deux proportionnelles à la trace intrinsèque de la $\mathbb{R}$-algèbre obtenue par représentation régulière (c'est immédiat pour les matrices et pour Tr cela résulte du lemme 2.3). $\square$

L'énoncé que nous venons d'établir permet de voir l'ensemble des $\phi_{\mathcal{N}}$ comme un réseau dans un espace $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$. Il nous reste à trouver de petits points de ce réseau dans le cône des éléments définis positifs : c'est l'objet du résultat suivant de géométrie des nombres.

LEMME 4.4

Considérons un corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, deux entiers $r, \delta \geq 1$, un réseau Ω du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$ et une norme $\|\cdot\|$ proportionnelle à la norme de Hilbert–Schmidt sur cet espace. Alors il existe une famille libre maximale de Ω formée d'éléments définis positifs de norme au plus

$$\frac{1}{2}(\sqrt{r\delta} + 1)\big(\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r + 1\big)\Lambda(\Omega).$$

Démonstration

Par homogénéité, il suffit de démontrer l'énoncé pour la norme de Hilbert–Schmidt elle-même. Notons ici $h = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$ et $e_1, \ldots, e_h$ une famille libre de Ω telle que $\|e_i\| \leq \Lambda(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq h$. Si $h = 1$ alors e_1 ou $-e_1$ est défini positif et répond à la question (ceci correspond au cas $\mathrm{End}_K A = \mathbb{Z}$ traité dans [MW3, p. 23]). Nous pouvons donc supposer $h \geq 2$. Considérons l'identité I de $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$ (le r-uplet des matrices identité), posons $\alpha = (h+1)\Lambda(\Omega)/2$ et décomposons $x = \alpha I$ dans la base $e_1, \ldots, e_h$, disons $x = \sum_{i=1}^h x_i e_i$ où $x_i \in \mathbb{R}$. Soient $n_i \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que $0 \leq \varepsilon_i(x_i - n_i) \leq 1/2$ puis $\omega = \sum_{i=1}^h n_i e_i$. La famille $\omega, \omega + \varepsilon_1 e_1, \ldots, \omega + \varepsilon_h e_h$ engendre Ω donc contient une famille libre maximale $f_1, \ldots, f_h$. Montrons qu'elle convient. Pour une norme euclidienne, une combinaison linéaire d'au moins deux vecteurs linéairement indépendants est toujours de norme strictement inférieure à la somme des normes de ces vecteurs. Ainsi, en utilisant $h \geq 2$, nous avons $\|x - \omega\| =$

$\| \sum_{i=1}^{h} (x_i - n_i) e_i \| < h\Lambda(\Omega)/2 \le \alpha$ tandis que pour $1 \le j \le h$ il vient de même

$$\|x - \omega - \varepsilon_j e_j\| = \Big\| \sum_{i \neq j} (x_i - n_i) e_i + (x_j - n_j - \varepsilon_j) e_j \Big\| < \frac{h-1}{2} \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega) = \alpha.$$

Par conséquent on a $\| f_i - x \| < \alpha$ pour tout $1 \le i \le h$. Comme $\|I\| = \sqrt{r\delta}$ nous avons la borne voulue $\| f_i \| \le \|x\| + \alpha = (1/2)(h+1)(\sqrt{r\delta} + 1)\Lambda(\Omega)$. Par ailleurs, si β est une valeur propre de l'un des f_i alors $\beta - \alpha$ est valeur propre de $f_i - \alpha I = f_i - x$. Grâce à l'écriture de la norme de Hilbert–Schmidt en termes de valeurs propres, nous avons $|\beta - \alpha| \le \| f_i - x \| < \alpha$. Comme $\beta \in \mathbb{R}$, ceci entraîne $\beta > 0$ et donc que f_i est défini positif. $\square$

Il ne nous reste plus qu'à combiner les trois lemmes précédents. Notons $\mathrm{Pic}_{\mathrm{sym}}(A)$ le groupe des faisceaux inversibles symétriques sur A (définis sur K) et, comme plus haut, d le rang de $\mathrm{End}_K A$.

THÉORÈME 4.5

Il existe une famille libre maximale de $\mathrm{Pic}_{\mathrm{sym}}(A)$ *formée de faisceaux amples de degré au plus*

$$g!(7g^{3/2})^g \left(\frac{h^0(A, \mathcal{L})}{h^0(\widehat{A}, \widehat{\mathcal{L}})} \right)^{d/2} \mathrm{vol}\big(\mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A})\big)^g.$$

Démonstration

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ une famille libre maximale de $\mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A})$ avec $|\varphi_i| \le \Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A}))$. D'après le lemme 4.2 nous pouvons écrire $2(\varphi_i + \widehat{\varphi_i}) = \phi_{\mathcal{N}_i}$ pour $\mathcal{N}_i \in \mathrm{Pic}_{\mathrm{sym}}(A)$. Les assertions (1) et (3) du lemme 4.3 entraînent $|\widehat{\varphi_i}| = |\varphi_i|$ donc nous avons $|\phi_{\mathcal{N}_i}| \le 4|\varphi_i|$. Considérons, dans les notations dudit lemme, le sous-groupe Ω de $\mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$ engendré par les $\iota(\phi_{\mathcal{N}_i})$. Il s'agit d'un réseau car si $M \in \mathcal{H}_\delta(\mathbb{K})^r$ alors $\iota^{-1}(M) = \sum_{i=1}^{d} x_i \varphi_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$ puis $4M = 2(M + M^*) = \sum_{i=1}^{d} 2x_i \iota(\varphi_i + \widehat{\varphi_i}) = \sum_{i=1}^{d} x_i \iota(\phi_{\mathcal{N}_i})$. Nous lui appliquons le lemme 4.4 qui fournit une famille libre maximale $\iota(\phi_{\mathcal{M}_1}), \dots, \iota(\phi_{\mathcal{M}_h})$ avec $\mathcal{M}_i \in \mathrm{Pic}_{\mathrm{sym}}(A)$ ample et $|\phi_{\mathcal{M}_i}| \le (1/2)(3g/2 + 1)(\sqrt{g} + 1)\Lambda(\Omega)$ (en utilisant l'assertion (4) du lemme 4.3). La famille $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_h$ reste libre et maximale car $\mathcal{N} \mapsto \iota(\phi_{\mathcal{N}})$ est un morphisme de groupes $\mathrm{Pic}_{\mathrm{sym}}(A) \to \Omega$ de noyau fini (formé d'éléments de 2-torsion). Estimons maintenant le degré. Par construction, $\Lambda(\Omega) \le 4\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A}))$ et, avec la majoration (2) de la proposition 4.1, nous trouvons

$$|\phi_{\mathcal{M}_i}| \le \sqrt{2g}(3g+2)(\sqrt{g}+1) \left(\frac{h^0(A, \mathcal{L})}{h^0(\widehat{A}, \widehat{\mathcal{L}})} \right)^{(d-1)/2g} \mathrm{vol}\big(\mathrm{Hom}_K(A, \widehat{A})\big).$$

Enfin la proposition 2.11 donne

$$\deg \mathcal{M}_i = g!h^0(A,\mathcal{M}_i) = g!(\deg\phi_{\mathcal{M}_i})^{1/2} \leq g!(2g)^{-g/2}|\phi_{\mathcal{M}_i}|^g \left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(\widehat{A},\widehat{\mathcal{L}})}\right)^{1/2}.$$

La borne de l'énoncé découle de ces deux formules et de l'inégalité $(3g+2)(\sqrt{g}+1) \leq 7g^{3/2}$ valable pour $g \geq 2$. Si $g=1$ on peut utiliser que l'on a en fait $|\phi_{\mathcal{M}_i}| \leq \Lambda(\Omega)$ ou directement que l'on peut choisir $\deg\mathcal{M}_1 = 1$ (et la formule (1) de la proposition 4.1 montre que le majorant donné dans le présent énoncé est bien plus grand que 1). □

Ce résultat constitue une étape cruciale dans la démonstration du théorème 1.1. En ce qui concerne l'isogénie avec une variété principalement polarisée du théorème 1.2, nous aurons besoin du fait suivant (valable sans hypothèse de simplicité).

LEMME 4.6
Soit A une variété abélienne définie sur K et munie d'un faisceau inversible ample $\mathcal{N}$ défini sur K. Il existe un sous-groupe H de $A(\overline{K})$ de cardinal $h^0(A,\mathcal{N})$ tel que si K' est une extension de K sur laquelle H est défini alors il existe une variété abélienne principalement polarisée A' sur K' et deux isogénies $\varphi\colon A \to A'$ et $\psi\colon A' \to \widehat{A}$ définies sur K' de sorte que $\deg\varphi = \deg\psi = h^0(A,\mathcal{N})$.

Démonstration
Si K est algébriquement clos, l'on procède comme dans la preuve du corollaire 1 de [Mu, p. 234] : on choisit un sous-groupe lagrangien maximal H de $\operatorname{Ker}\phi_{\mathcal{N}}$ et l'on pose $A' = A/H$ avec la projection φ de noyau H. Comme $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\phi_{\mathcal{N}}$, il y a bien une factorisation $\phi_{\mathcal{N}} = \psi\circ\varphi$ avec $\psi\colon A' \to \widehat{A}$. De plus $\deg\varphi\cdot\deg\psi = \deg\phi_{\mathcal{N}} = h^0(A,\mathcal{N})^2$ et $\deg\varphi = \operatorname{Card} H = h^0(A,\mathcal{N})$ par [Mu, p. 233]. Dans le cas général, si H est défini sur K' il en va de même de A', φ et ψ puisque $\phi_{\mathcal{N}}$ est défini sur K. □

Pour estimer le degré d'un corps K' comme dans ce lemme, nous utiliserons le résultat (classique) suivant.

LEMME 4.7
Soit G un sous-groupe fini d'une variété abélienne A sur K. Il existe une extension de K de degré au plus $(\operatorname{Card} G)^{2g}$ *sur laquelle tous les points de G sont définis.*

Démonstration
Par produit, on peut supposer que G est cyclique. Il suffit de rendre rationnel l'un de ses générateurs dont les conjugués font alors partie des points d'ordre $\operatorname{Card} G$ de A, en nombre au plus $(\operatorname{Card} G)^{2g}$. □

Par exemple cet énoncé donne $[K(A[3]):K] \leq 3^{4g^2}$. Dans ce cas précis, le majorant peut être remplacé par $\operatorname{Card}\operatorname{Aut} A[3]$ mais ceci est toujours plus grand $3^{4g^2}/2$. En revanche, le majorant $[K(A[3]):K] \leq 3^{2g}$ donné par Masser et Wüstholz [MW3, (7.8)] est erroné : par exemple sur la courbe elliptique $y^2 = x^3 - 1$ sur $\mathbb{Q}$ le point de 3-torsion $(2^{2/3}, 3^{1/2})$ et ses conjugués engendrent une extension de degré 12.

Nous terminons cette partie par les propriétés de maximalité des anneaux d'endomorphismes qui apparaissent dans le théorème 1.2 et interviendront également pour établir le théorème 1.3. Rappelons qu'un ordre d'une $\mathbb{Q}$-algèbre de dimension finie est à la fois un sous-anneau et un réseau de cette algèbre. Nous considérons toujours une variété abélienne A définie sur K et K-simple.

LEMME 4.8
Soit $\mathcal{O}$ un ordre quelconque de $\operatorname{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$ *contenant* $\operatorname{End}_K A$*. Alors* $[\mathcal{O} : \operatorname{End}_K A] \leq \operatorname{vol}(\operatorname{End}_K A)$.

Démonstration
Comme $\mathcal{O}$ est un ordre, la représentation régulière s'écrit à l'aide de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et donc la trace associée est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. D'après le lemme 2.3, nous avons aussi $\operatorname{Tr}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}$. Maintenant, si $e_1, \ldots, e_d$ est une base de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{Z}$, alors $\operatorname{vol}(\mathcal{O})^2$ coïncide avec la valeur absolue du déterminant de la matrice de terme général $\operatorname{Tr}(e_i e_j)$ (par l'argument déjà employé dans la proposition 2.9). Ainsi $\operatorname{vol}(\mathcal{O})^2 \in \mathbb{N}$ et en particulier $\operatorname{vol}(\mathcal{O}) \geq 1$. Le lemme est une reformulation de cette inégalité *via* la formule $\operatorname{vol}(\operatorname{End}_K A) = [\mathcal{O} : \operatorname{End}_K A] \operatorname{vol}(\mathcal{O})$. □

Dans la suite, nous appliquerons toujours ce résultat à un ordre maximal $\mathcal{O}$ contenant l'anneau des endomorphismes. Nous rappelons qu'un tel ordre maximal existe toujours (voir [Re, p. 127]). Voici maintenant le résultat d'isogénie où nous utilisons la notation $\operatorname{pdeg}\varphi = (\deg\varphi_1)(\deg\varphi_2)$ pour un couple d'isogénies $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

PROPOSITION 4.9
Supposons $\operatorname{End}_K A = \operatorname{End}_{\overline{K}} A$ *et soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* $\operatorname{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$ *contenant* $\operatorname{End}_K A$*. Si K' est une extension de K sur laquelle tous les points de* $[\mathcal{O} : \operatorname{End}_K A]$*-torsion sont rationnels, il existe une variété abélienne A' sur K' telle que* $\operatorname{End}_{K'} A' \simeq \mathcal{O}$ *et un couple d'isogénies $\varphi\colon A \rightleftharpoons A'$ définies sur K' de sorte que* $\operatorname{pdeg}\varphi \leq [\mathcal{O} : \operatorname{End}_K A]^{2g}$.

Démonstration
Abrégeons $N = [\mathcal{O} : \operatorname{End}_K A]$. Nous avons donc $\operatorname{End}_K A \subset \mathcal{O} \subset N^{-1} \operatorname{End}_K A$. Traitons d'abord le cas $K = \mathbb{C}$. Ici le réseau des périodes $\Omega_A \subset t_A$ est un $\operatorname{End}_K A$-module

donc la suite d'inclusions précédente permet d'écrire $\Omega_A \subset \mathcal{O} \cdot \Omega_A \subset N^{-1}\Omega_A$. En particulier, $\mathcal{O} \cdot \Omega_A$ est un réseau de t_A commensurable à Ω_A donc $t_A/\mathcal{O} \cdot \Omega_A$ est une variété abélienne A'. Nous disposons d'une suite d'isogénies

$$A = t_A/\Omega_A \xrightarrow{\varphi_1} A' = t_A/\mathcal{O} \cdot \Omega_A \xrightarrow{\varphi_2} A \simeq t_A/N^{-1}\Omega_A$$

où le dernier isomorphisme provient de la multiplication par N c'est-à-dire que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = [N]$. Ainsi $\mathrm{pdeg}(\varphi_1, \varphi_2) = (\deg \varphi_1)(\deg \varphi_2) = \deg[N] = N^{2g}$. Par ailleurs, $\mathcal{O} \subset \mathrm{End}_K A'$ car $\mathcal{O} \cdot \Omega_A$ est un $\mathcal{O}$-module (et l'action de $\mathcal{O}$ sur $t_{A'} = t_A$ est bien $\mathbb{C}$-linéaire comme celle de $\mathrm{End}_K A$). D'autre part, A et A' étant isogènes, les $\mathbb{Z}$-modules $\mathrm{End}_K A$ et $\mathrm{End}_K A'$ ont même rang. Alors dans $\mathrm{End}_K A \subset \mathcal{O} \subset \mathrm{End}_K A'$, la maximalité de $\mathcal{O}$ entraîne $\mathrm{End}_K A' = \mathcal{O}$. Pour traiter le cas d'un corps quelconque K de caractéristique nulle, nous pouvons supposer $K \subset \mathbb{C}$, étendre les scalaires et faire la construction précédente. On constate que A' et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sont définis sur tout corps où $\mathrm{Ker}\,\varphi_1$ l'est donc sur K' puisque $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \subset \mathrm{Ker}[N]$. Le fait que tous les endomorphismes de A soient définis sur K assure que ceux de A' le sont sur K' et donc que l'on a encore $\mathrm{End}_{K'} A' \simeq \mathcal{O}$. □

5. Variétés abéliennes isotypiques

Comme dans la partie précédente, nous considérons un corps K de caractéristique nulle et une variété abélienne A définie sur K et K-simple. Ici nous fixons aussi un entier $N \geq 1$ et nous nous intéressons aux sous-variétés abéliennes B de A^N (définies sur K). Nous contrôlons d'une part un quasi-supplémentaire de B (en vue du théorème 1.3) et d'autre part des isogénies entre B et une puissance de A.

Le résultat préliminaire suivant permet de travailler en termes de modules. Nous abrégeons $\mathcal{O}_1 = \mathrm{End}_K A$ et g désigne toujours la dimension de A.

LEMME 5.1
L'application $B \mapsto \mathrm{Hom}_K(A, B)$ *fournit une bijection entre les sous-variétés abéliennes B de A^N définies sur K et les sous-$\mathcal{O}_1$-modules à droite saturés de* $\mathrm{Hom}_K(A, A^N) \simeq \mathcal{O}_1^N$. *De plus* $\dim B = g \cdot \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_1} \mathrm{Hom}_K(A, B)$.

Démonstration
Vérifions tout d'abord que $\mathrm{Hom}_K(A, B)$, qui est un $\mathcal{O}_1$-module à droite *via* la composition, est saturé. Ceci signifie que, si $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, A^N)$ vérifie $\varphi \circ \chi \in \mathrm{Hom}_K(A, B)$ pour $\chi \in \mathcal{O}_1 \setminus \{0\}$, nous devons montrer $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A, B)$. Or il existe $\chi' \in \mathcal{O}_1$ tel que $\chi \circ \chi' = m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; par suite $(m\varphi)(A) \subset B$ donc $\varphi(A) \subset [m]^{-1}B = B + \mathrm{Ker}[m]$. Le sous-groupe $\varphi(A)$ étant géométriquement connexe, il est inclus dans la composante neutre de $B + \mathrm{Ker}[m]$, égale à B. Ainsi φ se factorise bien en $A \to B$.

La formule donnant la dimension de B peut se montrer après isogénie, ce qui permet de remplacer B par une puissance de A : elle est alors claire. Montrons à présent la bijectivité de l'application de l'énoncé. Si B et B' sont deux sous-variétés abéliennes de A^N alors $\mathrm{Hom}_K(A, B \cap B') = \mathrm{Hom}_K(A, B) \cap \mathrm{Hom}_K(A, B')$. En particulier, si $\mathrm{Hom}_K(A, B) = \mathrm{Hom}_K(A, B')$ alors, grâce à la formule sur le rang, $\dim B \cap B' = \dim B = \dim B'$ puis $B = B'$. Ceci fournit l'injectivité, établissons la surjectivité. Soit $M \subset \mathcal{O}_1^N$ un sous-module saturé. Notons B la plus petite sous-variété abélienne de A^N telle que $M \subset \mathrm{Hom}_K(A, B)$. Pour avoir l'égalité, il suffit, grâce à la saturation de M, de montrer que ces deux modules ont le même rang. Soit donc $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une famille libre maximale de M (sur $\mathcal{O}_1$). La variété abélienne $B' = \varphi_1(A) + \cdots + \varphi_n(A)$ est de dimension $\leq ng$ et $\mathrm{Hom}_K(A, B')$ contient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ donc, par saturation, M. Par minimalité $B \subset B'$ donc $g \cdot \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_1} \mathrm{Hom}_K(A, B) = \dim B \leq ng = g \cdot \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_1} M$. Nous en déduisons bien $M = \mathrm{Hom}_K(A, B)$. $\square$

Voici maintenant une version explicite du résultat de Bertrand dans le présent cadre.

PROPOSITION 5.2

Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$ *contenant* $\mathrm{End}_K A$. *Soit B une sous-variété abélienne de A^N définie sur K. Il existe une sous-variété abélienne B' de A^N définie sur K telle que $B + B' = A^N$ et* $\mathrm{Card}(B \cap B') \leq [\mathcal{O} : \mathrm{End}_K A]^{Ng}$.

Démonstration

Notons $\mathcal{O}_1 = \mathrm{End}_K A$ et $M_1 = \mathrm{Hom}_K(A, B) \subset \mathcal{O}_1^N$. Considérons le sous-$\mathcal{O}$-module à droite $M_1\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}^N$ et son saturé M. Par saturation de M_1 il vient $M_1 = M \cap \mathcal{O}_1^N$. Par ailleurs, l'ordre $\mathcal{O}$ étant maximal donc héréditaire (voir [Re, (21.4) p. 188 et (10.7) p. 130]), M admet un supplémentaire M' dans $\mathcal{O}^N$ (la saturation de M montre que $\mathcal{O}^N/M$ est sans torsion donc projectif). Notons $M_1' = M' \cap \mathcal{O}_1^N$ qui est un $\mathcal{O}_1$-module saturé. Écrivons encore ι l'inclusion $M_1 \oplus M_1' \hookrightarrow \mathcal{O}_1^N$. D'après le diagramme (de morphismes de groupes)

$$\mathcal{O}_1^N/(M_1 \oplus M_1') \hookrightarrow \mathcal{O}^N/(M_1 \oplus M_1') \simeq M/M_1 \oplus M'/M_1' \hookrightarrow \mathcal{O}^N/\mathcal{O}_1^N \oplus \mathcal{O}^N/\mathcal{O}_1^N$$

l'exposant du conoyau de ι divise $[\mathcal{O} : \mathcal{O}_1]$. Grâce au lemme précédent, M_1' s'écrit $\mathrm{Hom}_K(A, B')$ où B' est une sous-variété abélienne de A^N avec $\dim B + \dim B' = \dim A^N$. De la sorte ι devient l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_K(A, B) \oplus \mathrm{Hom}_K(A, B') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, A^N)$$

que nous pouvons aussi voir comme $\mathrm{Hom}_K(A, B \times B') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, A^N)$ donnée par la composition avec le morphisme d'addition $\mathrm{add}\colon B \times B' \to A^N$. En faisant la somme de N copies de cette flèche, nous obtenons $\mathrm{Hom}_K(A^N, B\times B') \hookrightarrow \mathrm{End}_K(A^N)$ dont le conoyau est toujours d'exposant divisant $[\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]$. En particulier $[\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]\mathrm{id}_{A^N}$ appartient à l'image de cette application et donc se décompose en $A^N \xrightarrow{\varphi} B\times B' \xrightarrow{\mathrm{add}} A^N$. Par identité des dimensions, ces deux morphismes sont des isogénies et donc $A^N = B + B'$ tandis que $B\cap B' \simeq \mathrm{Ker}\,\mathrm{add}$ est formé de points de $[\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]$-torsion. Ainsi $\mathrm{Card}\,B\cap B' \le [\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]^{2\min(\dim B,\dim B')} \le [\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]^{Ng}$. □

En particulier, si $\mathrm{End}_K A$ est lui-même maximal alors B admet un vrai supplémentaire.

Tournons-nous à présent vers le théorème d'isogénie pour les sous-variétés de A^N. Nous nous inspirons de l'approche de Masser et Wüstholz ([MW3, Parties 2 à 4]). Nous commençons par donner une variante de leur lemme sur l'indice de classe ([MW3, p. 8]).

LEMME 5.3
Soit M un $\mathrm{End}_K A$-module à gauche de type fini et sans torsion, de rang n. Alors il existe un sous-module libre M_0 de M de rang n tel que l'exposant du groupe fini M/M_0 soit au plus $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A)^{\min(n,2)}$.

Démonstration
Notons $\mathcal{O}_1 = \mathrm{End}_K A$. Masser et Wüstholz démontrent que l'on peut choisir M_0 tel que $\mathrm{Card}(M/M_0) \le |d(\mathcal{O}_1)|^{n/2}$ où $|d(\mathcal{O}_1)| = (m/2g)^m \mathrm{vol}(\mathcal{O}_1)^2$ d'après leur lemme 5.2 (ici m est le rang de $\mathcal{O}_1$ sur $\mathbb{Z}$). Ainsi $\mathrm{Card}(M/M_0) \le \mathrm{vol}(\mathcal{O}_1)^n$ donc il nous suffit d'établir l'énoncé avec la borne $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_1)^2$. Choisissons un ordre maximal $\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}_1\otimes\mathbb{Q}$ contenant $\mathcal{O}_1$. Notons α l'exposant de $\mathcal{O}/\mathcal{O}_1$, inférieur à $[\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]$. Considérons ensuite le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}M$. Par maximalité de $\mathcal{O}$, il est isomorphe à $\mathcal{O}^{n-1}\oplus\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{O}$ (voir [Re, (27.4) pp. 233–234]). D'après le résultat de Masser et Wüstholz (cas $n=1$) $\mathcal{J}$ contient un idéal principal $\mathcal{O}a$ tel que $\mathrm{Card}(\mathcal{J}/\mathcal{O}a) \le \mathrm{vol}(\mathcal{O})$. Par suite $\mathcal{O}M$ contient un $\mathcal{O}$-module libre $M_0' = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}a_i$ avec $\mathrm{Card}\,\mathcal{O}M/M_0' \le \mathrm{vol}(\mathcal{O})$ (cet argument démontre en fait la remarque de Stafford évoquée page 10 de [MW3]). Notons $\beta = \mathrm{Card}(\mathcal{O}M/M_0')$ puis $M_0 = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_1\alpha a_i$. Comme $a_i\in\mathcal{O}M$, $\alpha a_i \in \mathcal{O}_1 M = M$ donc $M_0\subset M$. D'autre part si $x\in M$ alors $x\in\mathcal{O}M$ donc $\beta x\in M_0'$ puis $\alpha^2\beta x \in \alpha^2 M_0' = \bigoplus_{i=1}^n (\alpha\mathcal{O})(\alpha a_i) \subset M_0$. Ceci montre que l'exposant de M/M_0 est au plus $\alpha^2\beta \le [\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]^2\mathrm{vol}(\mathcal{O}) = [\mathcal{O}:\mathcal{O}_1]\mathrm{vol}(\mathcal{O}_1) \le \mathrm{vol}(\mathcal{O}_1)^2$ par le lemme 4.8. □

Nous pouvons alors donner une version améliorée du lemme d'isogénie 4.1 de [MW3] où nous réemployons la notation $\mathrm{pdeg}\,\varphi$ introduite avant la proposition 4.9.

PROPOSITION 5.4
Soit B une sous-variété abélienne de A^N définie sur K. Si $n = (\dim B)/g$, il existe un couple d'isogénies $\varphi\colon B \rightleftharpoons A^n$ défini sur K tel que $\operatorname{pdeg}\varphi \leq \operatorname{vol}(\operatorname{End}_K A)^{2gn\min(n,2)}$.

Démonstration
Par un argument analogue à celui du lemme 5.1, le $\operatorname{End}_K A$-module à gauche $\operatorname{Hom}_K(B, A)$ est de rang n. Par le lemme 5.3, il contient un sous-module libre M_0 de rang n tel que l'exposant α de $\operatorname{Hom}_K(B, A)/M_0$ vérifie l'inégalité $\alpha \leq \operatorname{vol}(\operatorname{End}_K A)^{\min(n,2)}$. Si nous choisissons une base de M_0, nous obtenons n morphismes $B \to A$ donc un morphisme $\varphi_1\colon B \to A^n$. De plus l'application $\circ\varphi_1$: $\operatorname{Hom}_K(A^n, A) \to \operatorname{Hom}_K(B, A)$ est injective d'image M_0. Si nous faisons N copies de cette application puis que nous limitons les variétés d'arrivée de A^N à B, nous obtenons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_K(A^n, B) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\circ\varphi_1"] & \operatorname{Hom}_K(A^n, A^N) \arrow[d, "\circ\varphi_1"] \\
\operatorname{End}_K(B) \arrow[r, hook] & \operatorname{Hom}_K(B, A^N)
\end{tikzcd}$$

où les deux applications verticales sont injectives de conoyau d'exposant divisant α. En particulier, $[\alpha] \in \operatorname{End}_K(B)$ est dans l'image de la flèche verticale de gauche c'est-à-dire qu'il existe $\varphi_2\colon A^n \to B$ tel que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = [\alpha]$. Par identité des dimensions, φ_1 et φ_2 sont des isogénies et $\operatorname{pdeg}(\varphi_1, \varphi_2) = \deg[\alpha] = \alpha^{2\dim B} = \alpha^{2ng}$. $\square$

Le lemme 4.1 de [MW3] donnait seulement $\varphi_1\colon B \to A^n$ et une majoration de $\deg\varphi_1$ dans laquelle l'exposant de $\operatorname{vol}(\operatorname{End}_K A)$ était $2gn^2$.

6. Variétés abéliennes quelconques

Nous terminons maintenant le programme entamé dans les deux parties précédentes pour donner des versions des théorèmes de l'introduction sans restriction sur la nature des variétés abéliennes, mais toujours avec des bornes exprimées en termes de géométrie des nombres sur les réseaux d'endomorphismes. De plus, pour nous soustraire au choix de polarisations, nous mettons en œuvre l'astuce de Zarhin, comme dans [MW3], de sorte qu'*in fine* nos résultats se formulent à l'aide de quantités de la forme $\Lambda(\operatorname{Hom}_K(Z(A), Z(A'))))$.

De façon précise, nous considérons un corps K de caractéristique nulle, des variétés abéliennes A, A' et A_i pour $1 \leq i \leq t$ définies sur K et des entiers n_i pour $1 \leq i \leq t$. Nous supposons que A_i est K-simple pour tout i, que A_i et A_j ne sont pas K-isogènes pour $i \neq j$ puis que les trois variétés abéliennes A, A' et $A'' = \prod_{i=1}^t A_i^{n_i}$ sont K-isogènes. Nous notons encore $g_i = \dim A_i$, $d_i = \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}} \operatorname{End}_K A_i$ et $g = \dim A = \sum_{i=1}^t n_i g_i$.

Nous munissons $Z(A)$, $Z(A')$ et $Z(A_i)$ de polarisations principales. Nous en déduisons des polarisations principales sur $Z(A'') \simeq \prod_{i=1}^t Z(A_i)^{n_i}$, sur $Z(\widehat{A}) \simeq Z(A)$ et de même sur $Z(\widehat{A'})$, $Z(\widehat{A_i})$, $Z(\widehat{A''})$. Indépendamment, nous fixons aussi des polarisations auxiliaires (qui disparaîtront des estimations) $\mathcal{L}_i$ et $\widehat{\mathcal{L}_i}$ sur A_i et $\widehat{A_i}$ telles que $\phi_{\mathcal{L}_i} \circ \phi_{\widehat{\mathcal{L}_i}}$ soit la multiplication par un entier (comme pour le lemme 4.3). Pour alléger les calculs avec ces données, nous écrivons pour tout $1 \le i \le t$

$$V_i = \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K A_i), \qquad W_i = \Big(\frac{h^0(A_i, \mathcal{L}_i)}{h^0(\widehat{A_i}, \widehat{\mathcal{L}_i})}\Big)^{d_i/2g_i} \mathrm{vol}\big(\mathrm{Hom}_K(A_i, \widehat{A_i})\big)$$

et $\widehat{W_i}$ la quantité obtenue en échangeant A_i et $\widehat{A_i}$ dans W_i (on notera que l'on a aussi $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K \widehat{A_i}) = V_i$ par le corollaire 2.10). Par exemple le théorème 4.5 pour A_i s'exprime à l'aide de $W_i^{g_i}$ tandis que la partie 5 fait plutôt apparaître V_i.

Pour nous débarrasser de ces quantités, nous utiliserons le fait suivant.

LEMME 6.1

Pour tout $1 \le i \le t$ *et tous réels* $a, b, c \ge 0$ *nous avons*

$$V_i^a W_i^b \widehat{W_i}^c \le \Lambda\big(\mathrm{End}_K Z(A_i)\big)^{4d_i \max(a/2,b,c)}.$$

Démonstration

Nous avons $V_i \ge 1$ d'après la proposition 2.9 et $W_i, \widehat{W_i} \ge 1$ en vertu de l'assertion (1) de la proposition 4.1. Ainsi le membre de gauche est majoré par l'expression $(V_i^2 W_i \widehat{W_i})^{\max(a/2,b,c)}$. D'autre part, le corollaire 2.10 nous montre $V_i^2 W_i \widehat{W_i} = \mathrm{vol}(\mathrm{End}_K Z(A_i))^{1/16}$. On conclut alors par l'inégalité d'Hadamard $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_K Z(A_i)) \le \Lambda(\mathrm{End}_K Z(A_i))^{64d_i}$ puisque $\mathrm{End}_K Z(A_i)$ est de rang $64d_i$. □

Venons-en à présent au résultat crucial de cette partie (nous suivons le principe de la démonstration de [MW3, Lemme 7.1] en améliorant notamment le choix du plongement $A \hookrightarrow Z(A)$).

PROPOSITION 6.2

Il existe une isogénie $A \to A''$ *définie sur* K *et de degré au plus*

$$(16g)^{2g} \Lambda\big(\mathrm{Hom}_K\big(Z(A''), Z(A)\big)\big)^{4g} \prod_{i=1}^t V_i^{g_i n_i \min(2n_i,4)} \widehat{W_i}^{2g_i n_i/d_i}.$$

Démonstration

Par le lemme d'évitement 3.2 (polarisations principales), il existe une isogénie $Z(A'') \to Z(A)$ de degré au plus $(16g)^{8g} \Lambda(\mathrm{Hom}_K(Z(A''), Z(A)))^{16g}$. Par dualité, nous obtenons une isogénie $\varphi\colon Z(A) \to Z(A'')$ de même degré. D'autre part l'assertion (1) de la proposition 4.1 donne une isogénie $\widehat{A_i} \to A_i$ de degré au plus $\widehat{W_i}^{2g_i/d_i}$ donc par produit une isogénie $\psi\colon Z(A'') \to (A'')^8$ de degré au plus $\prod_{i=1}^{t} \widehat{W_i}^{8g_i n_i/d_i}$. Considérons ensuite les quatre injections $\iota_j\colon A \hookrightarrow Z(A)$ $(1 \le j \le 4)$ sur les quatre premiers facteurs. Le noyau $\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$ contient la somme directe des groupes $\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) \cap \mathrm{Im}\,\iota_j$ donc l'un d'entre eux est de cardinal au plus $(\deg \psi \circ \varphi)^{1/4}$. Pour l'indice correspondant, notons $B = \psi \circ \varphi(\iota_j(A))$ et $\chi\colon A \to B$ l'isogénie induite par $\psi \circ \varphi \circ \iota_j$, donc de degré au plus

$$(16g)^{2g}\,\Lambda\big(\mathrm{Hom}_K\big(Z(A''), Z(A)\big)\big)^{4g} \prod_{i=1}^{t} \widehat{W_i}^{2g_i n_i/d_i}.$$

La variété abélienne $B \subset (A'')^8$ est un produit $\prod_{i=1}^{t} B_i$ avec $B_i \subset (A_i)^{8n_i}$ de dimension $n_i g_i$. Par la proposition 5.4, nous disposons d'une isogénie $B_i \to A_i^{n_i}$ de degré au plus $V_i^{g_i n_i \min(2n_i,4)}$. Il reste simplement à composer le produit de ces isogénies avec χ. □

Bien entendu, la seule hypothèse utilisée ci-dessus sur A est qu'elle est isogène (sur K) à A'' donc l'énoncé vaut aussi en remplaçant A par A' ou encore par $\widehat{A}$ ou $\widehat{A'}$. De façon analogue, on peut remplacer A'' par $\widehat{A''}$ ce qui a pour effet de changer $\widehat{W_i}$ en W_i.

Nous pouvons maintenant déduire assez rapidement les propriétés requises dans l'introduction. Voici le résultat qui nous permettra d'établir les théorèmes 1.1, 1.3, et 1.4.

PROPOSITION 6.3
Pour abréger les formules, notons $\Lambda = \Lambda(\mathrm{Hom}_K(Z(A''), Z(A)))$, $\Lambda' = \Lambda(\mathrm{Hom}_K(Z(A''), Z(A')))$ *et* $\Lambda_i = \Lambda(\mathrm{End}_K(Z(A_i)))$ *pour* $1 \le i \le t$.

(1) *Il existe un faisceau inversible symétrique et ample $\mathcal{L}$ sur A défini sur K tel que*

$$\deg_{\mathcal{L}} A \le (5g)^{5g}\,\Lambda^{4g} \prod_{i=1}^{t} \Lambda_i^{8n_i g_i d_i}.$$

(2) *Si B est une sous-variété abélienne de A définie sur K, il existe une sous-variété abélienne B_1 de A définie sur K telle que $A = B + B_1$ et*

$$\mathrm{Card}(B \cap B_1) \le (16g)^{2g}\,\Lambda^{4g} \prod_{i=1}^{t} \Lambda_i^{8n_i^2 g_i d_i}.$$

(3) *Il existe un couple $\varphi\colon A \rightleftharpoons A'$ de K-isogénies avec*

$$\deg \varphi \le (16g)^{4g}(\Lambda\Lambda')^{4g}\prod_{i=1}^{t}\Lambda_i^{8n_i^2 g_i d_i}.$$

Démonstration

(1) D'après le théorème 4.5, nous disposons sur A_i d'un faisceau inversible ample de degré au plus $g_i!(7g_i^{3/2})^{g_i}W_i^{g_i}$. Par produit, cela nous donne sur A'' un faisceau $\mathcal{L}''$ de degré au plus $g!(7g^{3/2})^g\prod_{i=1}^t W_i^{n_i g_i}$. Par la proposition 6.2, nous avons une isogénie $\psi\colon A \to A''$ de degré au plus

$$(16g)^{2g}\Lambda^{4g}\prod_{i=1}^{t}V_i^{g_i n_i \min(2n_i,4)}\widehat{W_i}^{2n_i g_i}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\deg_{\psi^*\mathcal{L}''} A &= (\deg\psi)\deg_{\mathcal{L}''} A''\\ &\le g!(7g^{3/2})^g(16g)^{2g}\Lambda^{4g}\prod_{i=1}^{t}V_i^{4g_i n_i}W_i^{n_i g_i}\widehat{W_i}^{2n_i g_i}\\ &\le (2^{11}g^{9/2})^g\Lambda^{4g}\prod_{i=1}^{t}\Lambda_i^{8n_i g_i d_i}\end{aligned}$$

par le lemme 6.1. Ceci donne le résultat souhaité avec $\mathcal{L} = \psi^*\mathcal{L}''$ et $2^{11}g^{9/2} \le (5g)^5$.

(2) En conservant l'isogénie ψ ci-dessus, la sous-variété abélienne $B'' = \psi(B) \subset A''$ est un produit $\prod_{i=1}^t B_i''$ avec $B_i'' \subset A_i^{n_i}$. Par la proposition 5.2 et le lemme 4.8, il existe une sous-variété abélienne B_i' de $A_i^{n_i}$ définie sur K avec $A^{n_i} = B_i'' + B_i'$ et $\mathrm{Card}(B_i'' \cap B_i') \le V_i^{n_i g_i}$. Définissons B_1 comme la composante neutre de $\psi^{-1}(\prod_{i=1}^t B_i')$. Nous avons bien $A = B + B_1$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(B\cap B_1) &\le (\deg\psi)\,\mathrm{Card}\Big(B''\cap\prod_{i=1}^{t}B_i'\Big)\\ &\le (\deg\psi)\prod_{i=1}^{t}V_i^{n_i g_i}\\ &\le (16g)^{2g}\Lambda^{4g}\prod_{i=1}^{t}V_i^{3g_i n_i^2}\widehat{W_i}^{2n_i g_i}.\end{aligned}$$

Nous terminons comme précédemment par une application du lemme 6.1.

(3) Nous pouvons appliquer la proposition 6.2 pour obtenir une isogénie $\chi\colon \widehat{A'} \to \widehat{A''}$ de degré au plus

$$(16g)^{2g}\,\Lambda\big(\mathrm{Hom}_K\big(Z(\widehat{A''}), Z(\widehat{A'})\big)\big)^{4g}\prod_{i=1}^{t} V_i^{2g_in_i^2}\,W_i^{2n_ig_i}.$$

En vertu des isomorphismes $Z(\widehat{A''}) \simeq Z(A'')$ et $Z(\widehat{A'}) \simeq Z(A')$ compatibles aux polarisations principales utilisées pour définir les métriques, nous avons l'égalité $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(Z(\widehat{A''}), Z(\widehat{A'}))) = \Lambda'$. Par suite $\varphi_1 = \widehat{\chi}\circ\psi$ est une isogénie $A \to A'$ de degré au plus

$$(16g)^{4g}(\Lambda\Lambda')^{4g}\prod_{i=1}^{t} V_i^{4g_in_i^2}\,W_i^{2n_ig_i}\,\widehat{W_i}^{2n_ig_i}.$$

Par symétrie nous avons une isogénie $\varphi_2\colon A' \to A$ de degré majoré par la même quantité. Nous concluons une nouvelle fois par le lemme 6.1. $\square$

Enfin, nous donnons des bornes de même nature en direction du théorème 1.2 en conservant les notations Λ et Λ_i.

PROPOSITION 6.4
Il existe un sous-groupe G de $\prod_{i=1}^t A_i(\overline{K})$, une extension de corps K' de K, des variétés abéliennes $B_1,\dots,B_t$ sur K' et un couple d'isogénies $\varphi\colon A \rightleftharpoons \prod_{i=1}^t B_i^{n_i}$ sur K' de sorte que K' est le corps de définition des points de G, B_i est isogène à A_i pour $1 \le i \le t$ et

(1) *B_i admet une polarisation principale,*

(2) $\deg\varphi \le (6g)^{4g}\Lambda^{4g}\prod_{i=1}^t \Lambda_i^{8n_ig_id_i}$ *et*

(3) $\mathrm{Card}\,G \le (4g)^{3g/2}\prod_{i=1}^t \Lambda_i^{4g_id_i}$.

En outre, si l'on suppose $\mathrm{End}_K(A_i) = \mathrm{End}_{\overline{K}}(A_i)$ *pour* $1 \le i \le t$*, alors la même chose vaut en remplaçant* (1), (2) *et* (3) *par*

(1′) $\mathrm{End}_{K'}(B_i)$ *est un ordre maximal de* $\mathrm{End}_{K'}(B_i)\otimes\mathbb{Q}$,

(2′) $\deg\varphi \le (16g)^{2g}\Lambda^{4g}\prod_{i=1}^t \Lambda_i^{8n_i^2g_id_i}$ *et*

(3′) $\mathrm{Card}\,G \le \prod_{i=1}^t \Lambda_i^{4g_id_i}$.

Démonstration
D'après le théorème 4.5, la variété simple A_i admet une polarisation $\mathcal{N}_i$ avec $h^0(A_i, \mathcal{N}_i) \le (7g_i^{3/2})^{g_i}W_i^{g_i}$. Nous appliquons alors le lemme 4.6 pour trouver une variété

abélienne principalement polarisée B_i et des isogénies $\chi_i\colon A_i \to B_i$ et $\chi_i'\colon B_i \to \widehat{A_i}$ sur une extension K_i avec $\deg \chi_i = \deg \chi_i' = h^0(A_i, \mathcal{N}_i)$ et K_i le corps de rationalité des points de $H_i \subset A_i(\overline{K})$ où $\operatorname{Card} H_i = h^0(A_i, \mathcal{N}_i)$. Si G est le produit des H_i pour $1 \le i \le t$ alors

$$\operatorname{Card} G \le (7g^{3/2})^g \prod_{i=1}^{t} W_i^{g_i} \le (4g)^{3g/2} \prod_{i=1}^{t} \Lambda_i^{4g_i d_i}$$

avec le lemme 6.1. Si nous faisons le produit des χ_i et χ_i' nous obtenons deux isogénies $\chi\colon A'' \to \prod_{i=1}^t B_i^{n_i}$ et $\chi'\colon \prod_{i=1}^t B_i^{n_i} \to \widehat{A''}$ chacune de degré au plus

$$\prod_{i=1}^{t} (7g_i^{3/2})^{n_i g_i} W_i^{n_i g_i} \le (7g^{3/2})^g \prod_{i=1}^{t} W_i^{n_i g_i}.$$

Parallèlement, la proposition 6.2 donne deux isogénies $\psi\colon A \to A''$ et $\psi'\colon \widehat{A} \to A''$ chacune de degré au plus

$$(16g)^{2g} \Lambda^{4g} \prod_{i=1}^{t} V_i^{2g_i n_i \min(n_i,2)} \widehat{W_i}^{2g_i n_i/d_i}.$$

Il nous suffit alors de poser $\varphi_1 = \chi \circ \psi$ et $\varphi_2 = \widehat{\psi'} \circ \chi'$ pour avoir le couple d'isogénie souhaité. Pour le degré, on majore $(16g)^{2g}(7g^{3/2})^g \le (6g)^{4g}$ valable si $g \ge 2$ (sinon A admet elle-même une polarisation principale) et l'on applique le lemme 6.1.

Pour la version avec ordre maximal, nous appliquons à A_i la proposition 4.9 (et le lemme 4.8) qui fournit un couple d'isogénies $\chi_i\colon A_i \rightleftharpoons B_i$ avec $\deg \chi_i \le V_i^{2g_i}$ sur la plus petite extension de K où la N_i-torsion de A_i est définie, pour un entier $N_i \le V_i$. Nous en déduisons un couple $A'' \rightleftharpoons \prod_{i=1}^t B_i^{n_i}$ qu'il reste à composer avec un couple $A \rightleftharpoons A''$ obtenu à l'aide de $\psi\colon A \to A''$ ci-dessus et (toujours par la proposition 6.2) du dual d'une isogénie $\widehat{A} \to \widehat{A''}$ de degré au plus

$$(16g)^{2g} \Lambda^{4g} \prod_{i=1}^{t} V_i^{2g_i n_i^2} W_i^{2g_i n_i/d_i}.$$

Le couple d'isogénies φ obtenu entre A et $\prod_{i=1}^t B_i^{n_i}$ est alors de degré au plus

$$(16g)^{2g} \Lambda^{4g} \prod_{i=1}^{t} V_i^{2g_i n_i^2 + 2g_i n_i} \max(W_i, \widehat{W_i})^{2g_i n_i/d_i},$$

quantité que le lemme 6.1 permet de majorer par la borne de $(2')$. Celle de $(3')$ s'obtient avec $G = \prod_{i=1}^t A_i[N_i]$ et $\operatorname{Card} A_i[N_i] \le V_i^{2g_i} \le \Lambda_i^{4g_i d_i}$. $\square$

Toutes les bornes de ces deux propositions sont majorées par

$$(10g)^{5g}(\Lambda\Lambda')^{4g}\prod_{i=1}^{t}\Lambda_i^{8n_i^2 g_i d_i}$$

et celles pour le cardinal des groupes G sont même plus petites que

$$(4g)^{3g/2}\prod_{i=1}^{t}\Lambda_i^{4g_i d_i}$$

(nous avons utilisé $\Lambda' \geq 1$ et $\Lambda_i \geq 1$, voir la remarque qui précède le lemme 3.2).

7. Majoration du dernier minimum

L'objet de cette partie consiste à établir le résultat suivant, prélude à l'application du théorème des périodes.

PROPOSITION 7.1

Soient A et B deux variétés abéliennes polarisées sur un corps K et $n \geq 1$ un entier. Notons $p\colon A \times B^n \to A$ et $q_j\colon A \times B^n \to B$ $(1 \leq j \leq n)$ les différentes projections. Soit H une sous-variété abélienne de $A \times B^n$ définie sur K telle que (1) *$p(H) = A$ et* (2) *pour tout $f \in \mathrm{Hom}_K(A, B)$ il existe des entiers $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ de sorte que H soit contenu dans le noyau de $\ell f \circ p + \sum_{j=1}^{n} m_j q_j\colon A \times B^n \to B$. Alors $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A, B)) \leq (\deg H/\deg A)^2$.*

Ici nous utilisons les polarisations pour définir aussi bien la métrique sur le réseau $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ que les degrés (*via* la polarisation produit sur $A \times B^n$). Cet énoncé remplace l'argument principal de [MW2] et donne un résultat bien plus fin. Le gain se situe dans le lemme suivant qui remplace la lourde récurrence mise en place dans [MW2, paragraphe 4] à partir du lemme 3.2.

LEMME 7.2

Soient A et C deux variétés abéliennes polarisées, $p\colon A \times C \to A$ la première projection et H une sous-variété abélienne de $A \times C$. Si $p(H) = A$, il existe une sous-variété abélienne H' de $A \times C$ telle que $H' \subset H$, $p(H') = A$, $\dim H' = \dim A$ *et* $\deg H' \leq (\deg H)^2/(\deg A)$.

Démonstration

Soit $\varphi\colon H \to A$ la restriction de p à H. Nous définissons simplement H' comme l'orthogonal dans H du noyau de φ. Comme $H = H' + \mathrm{Ker}\,\varphi$, nous avons $\varphi(H') = A$. De plus $\dim H' = \dim H - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \varphi(H) = \dim A$. Pour évaluer le degré notons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les polarisations et $q\colon A \times C \to C$ la seconde projection. Le cycle d'intersection $(p^*\mathcal{L})^{\cdot g} \cdot H$ est numériquement équivalent à $(\deg A)\operatorname{Ker}\varphi$ donc $(\deg A)(\deg \operatorname{Ker}\varphi) = (p^*\mathcal{L})^{\cdot g} \cdot (q^*\mathcal{M})^{\cdot h-g} \cdot H$ si $h = \dim H$. Par ailleurs, pour l'orthogonal, $\deg H' \leq g!h!^{-1}(h-g)!^{-1} \deg H \deg \operatorname{Ker}\varphi$ (voir [GR1, paragraphe 2.2]). Nous majorons brutalement $g!h!^{-1}(h-g)!^{-1} \leq \binom{h}{g}$ et avons donc $(\deg A)(\deg H') \leq \binom{h}{g}(\deg H)(p^*\mathcal{L})^{\cdot g} \cdot (q^*\mathcal{M})^{\cdot h-g} \cdot H$. Il reste à remarquer que $\binom{h}{g}(p^*\mathcal{L})^{\cdot g} \cdot (q^*\mathcal{M})^{\cdot h-g} \cdot H$ est l'un des termes du développement de $(p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{M})^{\cdot h} \cdot H = \deg H$ par la formule du binôme. □

L'étape suivante précise le lemme 3.1 de [MW2].

LEMME 7.3
Avec les notations de la proposition 7.1, supposons que H' est une sous-variété abélienne de $A \times B^n$ telle que $p(H') = A$ et $\dim H' = \dim A$. *Notons $\varphi\colon H' \to A$ la restriction de p puis $s = \deg\varphi$ et $\psi\colon A \to H'$ l'isogénie telle que $\varphi \circ \psi = [s]$. Alors*

$$s + \frac{1}{2s} \sum_{j=1}^{n} |q_j \circ \psi|^2 \leq \frac{\deg H'}{\deg A}.$$

Démonstration
Notons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les polarisations sur A et B. En premier lieu, $(p^*\mathcal{L})^{\cdot g} \cdot H' = \mathcal{L}^{\cdot g} \cdot p_*H' = (\deg\varphi)\mathcal{L}^{\cdot g} \cdot A = s \deg A$. D'un autre côté, d'après la proposition 2.8,

$$|q_j \circ \psi|^2 = \frac{2g}{\deg A} \mathcal{L}^{\cdot g-1} \cdot \psi^* q_j^* \mathcal{M} \cdot A = \frac{2g}{s \deg A} \mathcal{L}^{\cdot g-1} \cdot \psi^* q_j^* \mathcal{M} \cdot \varphi_* H'.$$

Par la formule de projection $\mathcal{L}^{\cdot g-1} \cdot \psi^* q_j^* \mathcal{M} \cdot \varphi_* H' = s^2 (p^*\mathcal{L})^{\cdot g-1} \cdot q_j^* \mathcal{M} \cdot H'$ puisque $p^*\psi^* q_j^* \mathcal{M} = q_j^* \mathcal{M}^{\otimes s^2}$. En développant le produit d'intersection, nous avons

$$\begin{aligned}
\deg H' &= \Big(p^*\mathcal{L} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} q_j^* \mathcal{M}\Big)^{\cdot g} \cdot H' \\
&\geq (p^*\mathcal{L})^{\cdot g} \cdot H' + g \sum_{j=1}^{n} (p^*\mathcal{L})^{\cdot g-1} \cdot (q_j^* \mathcal{M}) \cdot H' \\
&= s \deg A + \frac{\deg A}{2s} \sum_{j=1}^{n} |q_j \circ \psi|^2,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Nous pouvons conclure.

Démonstration de la proposition 7.1
Nous employons le lemme 7.2 avec $C = B^n$. Il produit H' auquel nous appliquons le lemme 7.3. Notons $x = \max_{1\le j\le n} |q_j \circ \psi|$. Nous avons $x \le s + x^2/2s \le (\deg H/\deg A)^2$. Il reste à voir $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(A,B)) \le x$. Comme $q_j \circ \psi \in \mathrm{Hom}_K(A,B)$ il suffit de vérifier que ces éléments engendrent $\mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \mathbb{Q}$. Soit pour cela $f \in \mathrm{Hom}_K(A,B)$. L'hypothèse (2) montre l'existence d'entiers $\ell \ne 0$ et $m_1,\ldots,m_n$ tels que

$$\psi(A) = H' \subset H \subset \mathrm{Ker}\Big(\ell f \circ p + \sum_{j=1}^{n} m_j q_j\Big).$$

Par suite $\ell f \circ p \circ \psi + \sum_{j=1}^n m_j q_j \circ \psi = 0$. Avec $p \circ \psi = [s]$ nous en déduisons $f = -\sum_{j=1}^n (m_j/\ell s) q_j \circ \psi$ qui donne la conclusion attendue. □

8. Application du théorème des périodes

Nous examinons à présent comment le théorème des périodes permet de produire une sous-variété abélienne H comme dans la proposition 7.1. Pour affiner les constantes, nous nous placerons uniquement dans le cas utile pour la suite où le premier facteur est de la forme $Z(A)$ pour A géométriquement simple. Avant d'énoncer notre résultat, nous définissons un invariant $\nu(\cdot)$ associée à une variété abélienne.

Étant donné une variété abélienne B définie sur un corps k, il existe des entiers $t, r_1, \ldots, r_t \ge 1$ et des variétés abéliennes $B_1,\ldots,B_t$, $\overline{k}$-simples et deux à deux non isogènes, telles que B est isogène à $\prod_{i=1}^t B_i^{r_i}$ sur $\overline{k}$. À $\overline{k}$-isogénies et à permutation des facteurs près, ces données attachées à B sont uniques. Définissons alors le nombre rationnel

$$\nu(B) := \sum_{i=1}^{t} \frac{2(\dim B_i)^2}{\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\overline{k}}(B_i)}.$$

Ce nombre ne dépend que de la classe de $\overline{k}$-isogénies de B. Si k est de caractéristique nulle, il est entier car le rang de $\mathrm{End}_{\overline{k}}(B_i)$ divise $2\dim B_i$ et il est toujours inférieur à $2(\dim B)^2$. De plus, pour toute variété abélienne A définie sur k, on a $\max(\nu(A),\nu(B)) \le \nu(A\times B) \le \nu(A) + \nu(B)$. Si A est isogène sur $\overline{k}$ à une sous-variété abélienne de B et si $n \ge 1$ est un entier, on a $\nu(A \times B^n) = \nu(B)$. Si $A \subset B$ alors $\nu(A) \le \nu(B)$. Bien entendu, pour toute extension K de k on a $\nu(B_K) = \nu(B)$. Cette notion ne nous servira qu'à travers le lemme suivant.

LEMME 8.1
Soient H une variété abélienne complexe et S une partie finie de Ω_H. Supposons que

pour toute sous-variété abélienne stricte H' de H on ait $S \not\subset \Omega_{H'}$. Alors $\dim H \leq \mathrm{Card}(S)\nu(H)$.

Démonstration
Supposons dans un premier temps que $H = A^r$ pour une variété simple A et que S est formé d'un unique élément $\omega = (a_1, \ldots, a_r)$ où a_i est une période de A. Dans le $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$-module Ω_A, la famille $\{a_1, \ldots, a_r\}$ est libre car une relation non triviale entre ces périodes définirait une sous-variété abélienne stricte de H ayant ω dans son espace tangent, ce qui est exclu par hypothèse. On a donc

$$r \leq \mathrm{rg}_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)} \Omega_A = \frac{2 \dim A}{\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A))} = \frac{\nu(H)}{\dim A}$$

ce qui donne bien $\dim H = r \dim A \leq \nu(H)$.

Supposons à présent que H est un produit $\prod_{i=1}^{t} A_i^{r_i}$ où les A_i sont simples et deux à deux non isogènes avec toujours $S = \{\omega\}$. Notons ω_i la composante de ω sur $t_{A_i^{r_i}}$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$. Aucune sous-variété abélienne stricte H_i de $A_i^{r_i}$ ne possède ω_i dans son espace tangent car sinon la sous-variété abélienne de H provenant de $H_i \times \prod_{j \neq i} A_j^{r_j}$ par permutation des facteurs contredirait l'hypothèse sur S. Par le premier cas traité, $\dim A_i^{r_i} \leq \nu(A_i^{r_i})$ donc $\dim H = \sum_{i=1}^{t} \dim A_i^{r_i} \leq \sum_{i=1}^{t} \nu(A_i^{r_i}) = \nu(H)$. L'énoncé étant stable par isogénie, il est donc établi lorsque $\mathrm{Card}\, S = 1$.

Plaçons-nous finalement dans le cas général. Pour tout $\omega \in S$, considérons la plus petite sous-variété abélienne H_ω de H pour laquelle $\omega \in t_{H_\omega}$. Alors l'espace tangent de la variété abélienne $\sum_{\omega \in S} H_\omega$ contient S et donc $H = \sum_{\omega \in S} H_\omega$. En particulier on a $\dim H \leq \sum_{\omega \in S} \dim H_\omega$ et, par ce qui précède, $\dim H_\omega \leq \nu(H_\omega) \leq \nu(H)$ d'où le résultat. $\square$

Dans la suite nous considérons des variétés abéliennes A et B sur un corps de nombres k, de dimensions respectives g et b. Nous munissons $Z(A)$ et $Z(B)$ de polarisations principales (sur k). Posons $Z = Z(A) \times Z(B)^{128b}$, que l'on munit de la polarisation (principale) produit. Soient $p\colon Z \to Z(A)$ la première projection et $q_j\colon Z \to Z(B)$ la projection sur le $j^{\text{ème}}$ facteur de $Z(B)^{128b}$, $1 \leq j \leq 128b$. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 8.2
Supposons que A est k-simple, $g \leq b$ et que tous les endomorphismes de $A \times B$ sont définis sur k. Alors il existe une sous-variété abélienne H de Z telle que (1) $p(H) = Z(A)$, (2) *pour tout $f \in \mathrm{Hom}_k(Z(A), Z(B))$, il existe des entiers $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $m_1, \ldots, m_{128b} \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$H \subset \operatorname{Ker}\Big(\ell f \circ p + \sum_{j=1}^{128b} m_j q_j\Big)$$

et (3) *le degré de H relatif à la polarisation sur Z est majoré par*

$$\Big((8b)^{64b^2}[k:\mathbb{Q}] \max\big(1, h_F(A), h_F(B), \log[k:\mathbb{Q}]\big)^2\Big)^{8\nu(B)}.$$

La démonstration de cet énoncé passe par une variante du théorème des périodes établie dans l'article [GR1].

Étant donné un plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbb{C}$ et une variété abélienne C sur k, on note C_σ la variété abélienne complexe obtenue à partir de C par extension des scalaires. La forme de Riemann de la polarisation principale sur $Z_\sigma = Z(A)_\sigma \times Z(B)_\sigma^{128b}$ donne une norme hermitienne $\|\cdot\|_\sigma$ sur l'espace tangent complexe t_{Z_σ}. Considérons un plongement complexe $\sigma_0\colon k \hookrightarrow \mathbb{C}$ pour lequel la quantité

$$\frac{g^2}{\lambda(\Omega_{Z(A)_{\sigma_0}})^2} + \frac{16b^3}{\lambda(\Omega_{Z(B)_{\sigma_0}})^2}$$

est minimale. Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_{16g})$ (*resp.* $(\chi_1, \ldots, \chi_{16b})$) une famille libre de $\Omega_{Z(A)_{\sigma_0}}$ (*resp.* de $\Omega_{Z(B)_{\sigma_0}}$) telle que $\|\omega_\ell\|_{\sigma_0} \le \Lambda(\Omega_{Z(A)_{\sigma_0}})$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, 16g\}$ (*resp.* $\|\chi_\ell\|_{\sigma_0} \le \Lambda(\Omega_{Z(B)_{\sigma_0}})$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, 16b\}$).

LEMME 8.3
Il existe une partie $S \subset \{\omega_1, \ldots, \omega_{16g}\}$ de cardinal 8 telle que la seule sous-variété abélienne de $Z(A)_{\sigma_0}$ dont l'espace tangent contient S est $Z(A)_{\sigma_0}$.

Démonstration
Comme les endomorphismes de A sont définis sur k, l'hypothèse de k-simplicité de A implique que la variété complexe A_{σ_0} est simple. Par suite, $Z(A)_{\sigma_0}$ étant isogène à $A_{\sigma_0}^8$, toutes ses sous-variétés abéliennes ont pour dimension un élément de $\{0, g, 2g, \ldots, 8g\}$. Pour toute partie $S' \subset \{\omega_1, \ldots, \omega_{16g}\}$ notons $C(S')$ la plus petite sous-variété abélienne de $Z(A)_{\sigma_0}$ dont l'espace tangent contient S'. Nous avons $C(\{\omega_1, \ldots, \omega_{16g}\}) = Z(A)_{\sigma_0}$ donc nous pouvons choisir une partie S de cardinal minimal telle que $C(S) = Z(A)_{\sigma_0}$. Écrivons $S = \{\omega'_1, \ldots, \omega'_m\}$. Nous allons montrer

$$0 = \dim C(\emptyset) < \dim C\big(\{\omega'_1\}\big) < \cdots < \dim C\big(\{\omega'_1, \ldots, \omega'_{m-1}\}\big) < \dim C(S) = 8g$$

ce qui, par la remarque sur les dimensions, entraîne $m \le 8$. Supposons donc par l'absurde que $C(\{\omega'_1, \ldots, \omega'_{i-1}\}) = C(\{\omega'_1, \ldots, \omega'_i\})$ pour un indice $1 \le i \le m$. Alors ω'_i appartient à l'espace tangent de $C(\{\omega'_1, \ldots, \omega'_{i-1}\})$ donc de la variété $C(S \setminus \{\omega'_i\})$ qui la contient. L'espace tangent de cette dernière contient donc S puis $C(S) \subset$

$C(S \setminus \{\omega_i'\})$ et $C(S \setminus \{\omega_i'\}) = Z(A)_{\sigma_0}$ ce qui contredit le choix de S. Pour conclure nous remplaçons S par une partie de cardinal 8 le contenant. □

Quitte à réindexer, on supposera dorénavant que l'ensemble donné par ce lemme est $S = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$. Notons $\mathbf{0}$ le vecteur nul de $t_{Z(B)_{\sigma_0}}^{\oplus 16b}$ et posons pour $i \in \{1, \ldots, 8\}$

$$\varpi_i := (\omega_i, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \chi_1, \ldots, \chi_{16b}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) \in \Omega_{Z_{\sigma_0}}$$

(χ_j correspond ici au facteur $16b(i-1) + j + 1$ de Z).

LEMME 8.4
Pour tout $i \in \{1, \ldots, 8\}$, on a

$$\|\varpi_i\|_{\sigma_0}^2 \leq e^{12{,}5} b^4 \max\big(1, h_F(A), h_F(B)\big).$$

Démonstration
Par définition on a

$$\|\varpi_i\|_{\sigma_0}^2 = \|\omega_i\|_{\sigma_0}^2 + \sum_{j=1}^{16b} \|\chi_j\|_{\sigma_0}^2 \leq \Lambda(\Omega_{Z(A)_{\sigma_0}})^2 + 16b\Lambda(\Omega_{Z(B)_{\sigma_0}})^2.$$

Au moyen du corollaire 3.6, on obtient la borne

$$\|\varpi_i\|_{\sigma_0}^2 \leq \frac{(16g)^2}{\lambda(\Omega_{Z(A)_{\sigma_0}})^2} + \frac{(16b)^3}{\lambda(\Omega_{Z(B)_{\sigma_0}})^2}.$$

Le choix de σ_0 assure que le membre de droite est plus petit que la moyenne

$$\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}} \Big(\frac{(16g)^2}{\lambda(\Omega_{Z(A)_\sigma})^2} + \frac{(16b)^3}{\lambda(\Omega_{Z(B)_\sigma})^2} \Big).$$

Le lemme matriciel d'Autissier [Au, Corollaire 1.4], appliqué à $Z(A)$ et $Z(B)$ (principalement polarisées de hauteurs respectives $8h_F(A)$ et $8h_F(B)$), entraîne alors la majoration

$$\|\varpi_i\|_{\sigma_0}^2 \leq \frac{6 \times (16)^2}{(1-\varepsilon)\pi} \Big(8g^2 h_F(A) + 128b^3 h_F(B) + (4g^3 + 64b^4) \log\Big(\frac{2\pi^2}{\varepsilon}\Big)\Big)$$

pour tout nombre réel $\varepsilon \in]0,1[$. On utilise $g \leq b$ et l'on met en facteur la quantité $b^4 \max(1, h_F(A), h_F(B))$ dans le majorant ci-dessus. La constante restante est

$$\frac{6 \times (16)^2}{(1-\varepsilon)\pi} \Big(136 + 68 \log\Big(\frac{2\pi^2}{\varepsilon}\Big)\Big)$$

et l'on choisit $\varepsilon = 1/8$ pour conclure. □

Démonstration de la proposition 8.2
Si $\mathrm{Hom}_k(A, B) = \{0\}$ alors aucun facteur simple de B n'est isogène à A et $\mathrm{Hom}_k(Z(A), Z(B)) = \{0\}$. Dans ce cas il suffit de prendre $H = Z(A) \times \{0\}$, $\ell = 1$ et $m_1 = \cdots = m_{128b} = 0$. Les propriétés (1) et (2) sont alors vérifiées et la borne sur le degré de H vient de $\deg H = (8g)! \le (8b)^{8b}$. Supposons dorénavant $\mathrm{Hom}_k(A, B) \neq \{0\}$. Soit H la plus petite sous-variété abélienne de Z telle que l'espace tangent de H_{σ_0} contienne les 8 périodes $\varpi_1, \dots, \varpi_8$ construites ci-dessus. La variété H est définie sur k. Par minimalité de H, aucune de ses sous-variétés abéliennes strictes ne possède toutes ces périodes dans son espace tangent. D'après le lemme 8.1 sa dimension h est plus petite que $8\nu(H) \le 8\nu(Z) = 8\nu(B)$. Par ailleurs, on a $p(H) = Z(A)$ car l'espace tangent de $p(H)_{\sigma_0}$ contient les périodes $\omega_1, \dots, \omega_8$ (voir lemme 8.3). De plus, si $f \in \mathrm{Hom}_k(Z(A), Z(B))$ et si $\mathrm{d}f : t_{Z(A)_{\sigma_0}} \to t_{Z(B)_{\sigma_0}}$ désigne sa différentielle en l'origine, on a $\mathrm{d}f(\Omega_{Z(A)_{\sigma_0}}) \subset \Omega_{Z(B)_{\sigma_0}}$. Le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\chi_1, \dots, \chi_{16b}$ est un sous-réseau de $\Omega_{Z(B)_{\sigma_0}}$, d'indice fini $\ell \ge 1$. Il existe donc des entiers $m_1, \dots, m_{128b}$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, 8\}$, on a

$$-\ell\, \mathrm{d}f(\omega_i) = \sum_{j=1}^{16b} m_{16b(i-1)+j}\, \chi_j.$$

Ainsi la composante neutre du groupe algébrique $G = \mathrm{Ker}(\ell f \circ p + \sum_{j=1}^{128b} m_j q_j)$ est une variété abélienne dont l'espace tangent contient les périodes $\varpi_1, \dots, \varpi_8$ et on a donc l'inclusion $H \subset G$ par définition de H. Pour estimer le degré de H, notons $\mathcal{N}$ la polarisation sur H induite par celle de Z. Pour un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, soit $\mathrm{d}_{\mathcal{N}_\sigma}$ la distance sur t_{H_σ} donnée par la forme de Riemann de $\mathcal{N}_\sigma$. Le *minimum essentiel* de $(H_\sigma, \mathcal{N}_\sigma)$ est le nombre réel

$$\delta(H_\sigma, \mathcal{N}_\sigma) := \sup_{H'} \min \left\{ \mathrm{d}_{\mathcal{N}_\sigma}(\omega, t_{H'});\ \omega \in \Omega_{H_\sigma} \setminus \Omega_{H'} \right\}$$

où la borne supérieure porte sur toutes les sous-variétés abéliennes H' de H_σ, différentes de H_σ (voir [GR1, Définition 4.1]). Le théorème 1.2 de [GR1] s'énonce alors comme suit.

THÉORÈME DES PÉRIODES
Nous avons

$$\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}} \frac{(\deg H)^{1/h}}{\delta(H_\sigma, \mathcal{N}_\sigma)^2} \le 50 h^{2h+6} \max\left(1, h_F(H), \log \deg H\right).$$

Ici, en ne gardant que la contribution de σ_0, nous en déduisons l'estimation

$$(\deg H)^{1/h} \le 50 h^{2h+6} [k:\mathbb{Q}]\, \delta(H_{\sigma_0}, \mathcal{N}_{\sigma_0})^2 \max\left(1, h_F(H), \log \deg H\right).$$

Pour obtenir la borne de la proposition 8.2, nous allons estimer chacune des quantités qui apparaissent dans ce majorant. On a vu que $h \leq 8\nu(B) \leq 16b^2$. Par définition du minimum essentiel, on a $\delta(H_{\sigma_0}, \mathcal{N}_{\sigma_0}) \leq \max\{\|\varpi_i\|_{\sigma_0}; 1 \leq i \leq 8\}$ et le lemme 8.4 donne

$$\delta(H_{\sigma_0}, \mathcal{N}_{\sigma_0})^2 \leq e^{12,5} b^4 \max\big(1, h_F(A), h_F(B)\big).$$

Enfin, en tant que sous-variété abélienne de Z, la hauteur de Faltings de H est contrôlée au moyen de l'inégalité $h_F(H) \leq h_F(Z) + \log h^0(H, \mathcal{N}) + (3/2)\dim H^{\perp}$ (voir [GR1, paragraphe 2.3]). On a $h_F(Z) = 8h_F(A) + 2^{10} b h_F(B)$ et $h^0(H, \mathcal{N}) \leq \deg H$. De plus, comme $p\colon H \to Z(A)$ est surjective on a $h \geq \dim Z(A)$ donc $\dim H^{\perp} \leq \dim Z(B)^{128b} = 2^{10}b^2$. On obtient alors

$$\max\big(1, h_F(H), \log\deg H\big) \leq 2568 b^2 \max\big(1, h_F(A), h_F(B)\big) + \log\deg H.$$

Posons $M := \max(1, h_F(A), h_F(B))$ et $x = (\deg H)^{1/h}$. En majorant $\log\deg H = h\log x$ par $16b^2 \log x$ et en remplaçant dans la borne fournie par le théorème des périodes, on obtient

$$x \leq 50 e^{12,5} (4b)^{64b^2+12} b^6 [k:\mathbb{Q}] M(2568M + 16\log x).$$

LEMME 8.5
Soient $u \geq \sqrt{e}$ et $v \geq 0$ des nombres réels. Soit $x > 0$ tel que $x \leq u(v + \log x)$. Alors on a $x \leq 2u(\log u + v)$.

Démonstration
Quitte à remplacer x par xe^v et u par ue^v, on peut supposer $v = 0$. Supposons $x > 2u\log u$. La fonction $y \mapsto y - u\log y$ croît strictement pour $y \geq u$. Comme $2u\log u \geq u$ par l'hypothèse $u \geq \sqrt{e}$, on en déduit $2u\log u - u\log(2u\log u) < x - u\log x \leq 0$. On obtient une contradiction en majorant $\log\log u$ par $\log u - 1$. $\square$

Appliquons ce lemme à la majoration de x obtenue précédemment, qui s'écrit $x \leq u(v + \log x)$ avec $u = 800 e^{12,5} (4b)^{64b^2+12} b^6 [k:\mathbb{Q}] M$ et $v = 160,5M$. En utilisant $\log M \leq M - 1$, le résultat se simplifie en $x \leq c(b)[k:\mathbb{Q}] M \max(M, \log[k:\mathbb{Q}])$ avec $c(b) = c_1(b) c_2(b)$ où

$$c_1(b) = 1600(e^{12,5})(4b)^{64b^2+12} b^6$$

et

$$c_2(b) = 174 + \log(800) + (64b^2 + 12)\log(4b) + 6\log b.$$

On majore $c_2(b)$ par $287b^3$ (la fonction $b \mapsto c_2(b)/b^3$ décroît pour $b \geq 2$). On observe alors $1600 \times 287 \times e^{12,5}(4b)^{12}b^9 \leq 2^{64b^2}$, inégalité qui se montre en prenant le logarithme, en divisant par b^2 et en utilisant la décroissance de $b \mapsto (\log b)/b^2$ pour $b \geq 2$. On a donc $c(b) \leq (8b)^{64b^2}$ puis

$$(\deg H)^{1/h} \leq (8b)^{64b^2}[k:\mathbb{Q}]M \max\big(M, \log[k:\mathbb{Q}]\big).$$

La proposition 8.2 découle immédiatement des majorations $h \leq 8\nu(B)$ et $M \leq \max(M, \log[k:\mathbb{Q}])$. □

9. Conclusion des démonstrations

Dans cette partie, nous établissons finalement les quatre théorèmes de l'introduction. Nous nous plaçons sous leurs hypothèses c'est-à-dire que nous disposons des objets suivants :

– un corps de nombres k,
– deux variétés abéliennes A et A' sur k,
– une extension K de k sur laquelle A et A' sont isogènes,
– une sous-variété abélienne B de A définie sur K.

Les données K, B et A' n'interviennent que dans les théorèmes 1.3 et 1.4, nous pourrons donc les choisir arbitrairement dans les deux autres cas.

Nous notons $g = \dim A$ et k_1 la plus petite extension de k sur laquelle tous les endomorphismes de $A \times A'$ sont définis. D'après le résultat de Silverberg [Si], nous avons $[k_1:k] \leq 4(9g)^{4g}$. Nous savons aussi que k_1 est contenu dans le corps de rationalité de la 3-torsion de $A \times A'$. Vu les propriétés à démontrer, nous pouvons supposer $k \subset K \subset k_1$ sans perte de généralité (puisque si une isogénie $A \to A'$ est définie sur un corps K elle l'est sur $K \cap k_1$ et de même pour B). Pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2 nous posons respectivement $K = k$ et $K = k_1$ (ainsi que disons $A' = B = A$, sans que cela soit en fait utile).

Nous choisissons ensuite une famille maximale $A_1, \ldots, A_t$ de sous-variétés abéliennes de A définies sur K, simples sur K et deux à deux non isogènes sur K. Ce choix permet d'assurer d'une part que tous les endomorphismes de A_i sont définis sur k_1 et d'autre part, par le théorème de complète réductibilité, que A est isogène sur K à la variété abélienne $A'' = \prod_{i=1}^{t} A_i^{n_i}$ pour un unique choix d'entiers n_i. Nous sommes donc précisément dans la situation envisagée dans la partie 6, dont nous conservons les notations g_i et d_i.

Nous faisons ensuite une nouvelle décomposition sur k_1 : pour $1 \leq i \leq t$, nous choisissons une isogénie sur k_1 entre A_i et un produit $\prod_{j=1}^{u_i} C_{i,j}^{m_{i,j}}$ de puissances de variétés abéliennes $C_{i,j}$ simples sur k_1 (non isogènes). En particulier, A est isogène sur k_1 à la variété abélienne $\prod_{i=1}^{t}\prod_{j=1}^{u_i} C_{i,j}^{n_i m_{i,j}}$ que nous notons A'''. Pour soulager la suite des calculs nous posons

$$M=\max\bigl(h_F(A),h_F(A'),h_F(A''),h_F(A'''),1\bigr)\qquad\text{et}$$
$$P=4(9g)^{4g}(8g)^{64g^2}[k:\mathbb{Q}]\max\Bigl(M+\frac{3}{2}g,\log\bigl(4(9g)^{4g}[k:\mathbb{Q}]\bigr)\Bigr)^2.$$

Le résultat de la partie précédente permet de donner l'énoncé suivant.

LEMME 9.1
Soient C l'une des variétés $C_{i,j}$ et C' l'une des variétés A, A' ou A_i. Alors, pour tous choix de polarisations principales sur $Z(C)$ et $Z(C')$, on a

$$\Lambda\bigl(\mathrm{Hom}_{k_1}\bigl(Z(C),Z(C')\bigr)\bigr)\leq 2^{-30}P^{16\nu(C')}.$$

Démonstration
Par la proposition 7.1, le membre de gauche ci-dessus est majoré par $(\deg H/\deg Z(C))^2$ où $H\subset Z(C)\times Z(C')^{128\dim C'}$ est le sous-groupe fourni par la proposition 8.2. Ici par polarisation principale $\deg Z(C)=(\dim Z(C))!\geq 8!\geq 2^{15}$. D'autre part, la quantité $(\deg H)^{1/8\nu(C')}$ est majorée par

$$(8g)^{64g^2}[k_1:\mathbb{Q}]\max\bigl(1,h_F(C),h_F(C'),\log[k_1:\mathbb{Q}]\bigr)^2$$

puisque $\dim C'\leq g$. Voyons ensuite que les hauteurs $h_F(C)$ et $h_F(C')$ valent au plus $M+3g/2$. Pour $C'=A,A'$ c'est immédiat. Sinon nous utilisons la minoration de la hauteur de Faltings $h_F(C_{i,j})\geq-(3/2)\dim C_{i,j}$ due à Bost (voir [GR1, Corollaire 8.4] en prenant garde à la différence entre $h(\cdot)$ et $h_F(\cdot)$ rappelée au paragraphe 2.3). Ainsi

$$\begin{aligned}h_F(C)&\leq h_F(C)+\frac{3}{2}\dim C\\&\leq\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{u_i}n_im_{i,j}\Bigl(h_F(C_{i,j})+\frac{3}{2}\dim C_{i,j}\Bigr)=h_F(A''')+\frac{3}{2}g.\end{aligned}$$

On raisonne de même dans A'' pour avoir $h_F(A_i)\leq h_F(A'')+3g/2$. Finalement

$$(\deg H)^{1/8\nu(C')}\leq(8g)^{64g^2}[k_1:\mathbb{Q}]\max\bigl(M+3g/2,\log[k_1:\mathbb{Q}]\bigr)^2\leq P$$

et le résultat en découle. □

Nous réutilisons à présent les notations Λ, Λ' et Λ_i de la proposition 6.3.

LEMME 9.2
Nous avons

$$\Lambda_i\leq(9g)^{4g}P^{32\nu(A_i)}\qquad\textit{et}\qquad\Lambda\Lambda'\leq 2^{-116}(9g)^{8g}P^{64\nu(A)}.$$

Démonstration
Commençons par estimer Λ. Par définition de k_1, ce corps est une extension galoisienne de k donc *a fortiori* de K. En combinant les lemmes 3.3 et 3.4, nous avons

$$\begin{aligned}\Lambda &\le [k_1 : K]\Lambda\big(\mathrm{Hom}_{k_1}\big(Z(A''), Z(A''')\big)\big)\Lambda\big(\mathrm{Hom}_{k_1}\big(Z(A'''), Z(A)\big)\big)\\ &\le 4(9g)^{4g}\Lambda\big(\mathrm{Hom}_{k_1}\big(Z(A'''), Z(A'')\big)\big)\Lambda\big(\mathrm{Hom}_{k_1}\big(Z(A'''), Z(A)\big)\big),\end{aligned}$$

où, pour échanger les deux variétés dans le facteur central, nous utilisons le fait que l'involution de Rosati est une isométrie entre les réseaux $\mathrm{Hom}_{k_1}(Z(A''), Z(A'''))$ et $\mathrm{Hom}_{k_1}(Z(A'''), Z(A''))$ par principalité des polarisations (voir la remarque précédant la proposition 2.7). En outre, le réseau $\mathrm{Hom}_{k_1}(Z(A'''), Z(A))$ est la somme directe orthogonale de copies des réseaux $\mathrm{Hom}_{k_1}(Z(C_{i,j}), Z(A))$ donc le lemme précédent entraîne

$$\Lambda\big(\mathrm{Hom}_{k_1}\big(Z(A'''), Z(A)\big)\big) = \max_{i,j}\Lambda\big(\mathrm{Hom}_{k_1}\big(Z(C_{i,j}), Z(A)\big)\big) \le 2^{-30}P^{16\nu(A)}.$$

La même borne vaut pour $\Lambda(\mathrm{Hom}_{k_1}(Z(A'''), Z(A'')))$ puisque par isogénie $\nu(A'') = \nu(A)$. Ainsi

$$\Lambda \le 4(9g)^{4g}(2^{-30}P^{16\nu(A)})^2 = 2^{-58}(9g)^{4g}P^{32\nu(A)}$$

et comme la même estimation s'applique à A' nous voyons apparaître la majoration annoncée de $\Lambda\Lambda'$. Pour Λ_i, nous procédons exactement de la même manière en remplaçant la variété intermédiaire A''' par le produit $\prod_{j=1}^{u_i} C_{i,j}^{m_{i,j}}$ qui est bien isogène à A_i. Le calcul est identique et nous avons omis le 2^{-58}. □

Nous ne sommes plus qu'à quelques calculs du but.

LEMME 9.3
Les quatre théorèmes de l'introduction valent en écrivant au lieu de $\kappa(A)$ la quantité

$$(9g)^{96g^4}P^{2^{10}g^3}.$$

Démonstration
Nous appliquons les propositions 6.3 et 6.4. Pour la première, les résultats sont exactement ceux requis. La seconde fournit des groupes $G_i \subset A_i(\overline{k}) \subset A(\overline{k})$ pour $1 \le i \le t$. Notons G' le sous-groupe de $A(\overline{k})$ engendré par les G_i et les points de 3-torsion. De cette façon, le corps k' de définition des points de G' contient $k_1 = K$ et le corps K' de la proposition 6.4. Nous avons $\mathrm{Card}\, G' \le 3^{2g}\,\mathrm{Card}\, G$ et $[k' : k] \le (\mathrm{Card}\, G')^{2g}$ par le lemme 4.7. Pour obtenir le théorème 1.2, il faut changer les notations : B_i devient A_i, G' devient G ; et remarquer que A_i et A_j pour $i \ne j$ ne sont pas isogènes sur

$\overline{k'}$ car tous les endomorphismes de $A_i \times A_j$ sont définis sur k_1. Avec les majorations données à la fin de la partie 6, les énoncés des quatre théorèmes de l'introduction valent donc avec la borne

$$\max\Big((10g)^{5g}(\Lambda\Lambda')^{4g}\prod_{i=1}^{t}\Lambda_i^{8n_i^2 g_i d_i}, 3^{4g}(4g)^{3g}\prod_{i=1}^{t}\Lambda_i^{8g_i d_i}\Big)$$

à la place de $\kappa(A)$. Nous reportons les estimations du lemme précédent et constatons sans peine que le premier terme l'emporte alors et est majoré par

$$g^{5g}(9g)^{32g^2+32g\sum_{i=1}^{t} n_i^2 g_i d_i}P^{256(g\nu(A)+\sum_{i=1}^{t} n_i^2 g_i d_i \nu(A_i))}.$$

Pour contrôler d_i et $d_i\nu(A_i)$ considérons l'isomorphisme

$$\mathrm{End}_{k_1} A_i \otimes \mathbb{Q} \simeq \prod_{j=1}^{u_i} \mathrm{End}_{k_1}(C_{i,j}^{m_{i,j}}) \otimes \mathbb{Q}.$$

Alors, pour tout indice $1 \le j \le u_i$, la j-ème projection du produit fournit un morphisme d'anneaux $\mathrm{End}_{k_1} A_i \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{End}_{k_1}(C_{i,j}^{m_{i,j}}) \otimes \mathbb{Q}$. La restriction de celui-ci à $\mathrm{End}_K A_i \otimes \mathbb{Q}$ est injective car, par simplicité de A_i sur K, ce dernier anneau est un corps (commutatif ou non). Par suite $d_i = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}_K A_i \le \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}_{k_1}(C_{i,j}^{m_{i,j}}) = m_{i,j}^2 \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}_{k_1}(C_{i,j})$. Nous en déduisons $d_i \le d_i\nu(A_i) \le 2g_i^2$ car, par définition, $\nu(A_i)$ vaut $\sum_{j=1}^{u_i} 2(\dim C_{i,j})^2/\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}_{k_1} C_{i,j}$. Notre borne devient alors

$$g^{5g}(9g)^{32g^2+64g^4}P^{2^{10}g^3}$$

puisque $\nu(A) \le 2g^2$. Nous majorons enfin g^{5g} par $(9g)^{32g^2(g^2-1)}$. □

La dernière étape consiste à supprimer dans notre majoration les hauteurs de Faltings de A', A'' et A''' présentes dans M.

LEMME 9.4
Nous avons

$$(9g)^{96g^4}P^{2^{10}g^3} \le \kappa(A).$$

Démonstration
Notons Q le membre de gauche. Par construction Q majore le degré d'une isogénie $A \to A'$. Par conséquent $h_F(A') \le h_F(A) + (1/2)\log Q$. De plus cette formule vaut aussi pour les hauteurs de A'' et A''' : pour A'' on peut utiliser la proposition 6.2 qui donne une majoration plus petite que la borne finale de la partie 6 (donc que Q) et

A''' joue sur k_1 le même rôle que A'' sur K ; la majoration vaut donc en utilisant la partie 6 sur k_1. Nous avons donc

$$M \leq \max\Big(h_F(A) + \frac{1}{2}\log Q, 1\Big).$$

En revenant à la définition de P nous pouvons majorer brutalement

$$\begin{aligned} Q &\leq (9g)^{96g^4}\big(2(9g)^{2g}(8g)^{32g^2}\big(\log\big(4(9g)^{4g}\big)\big)\big)^{2^{11}g^3}\big([k:\mathbb{Q}]M\big)^{2^{11}g^3} \\ &\leq \exp(75 \times 2^{11} g^6)\big([k:\mathbb{Q}]M\big)^{2^{11}g^3} \end{aligned}$$

(la première inégalité résulte des majorations $1 + 3g/2 \leq \log(4(9g)^{4g}) =: \ell$ et $\ell + \log[k:\mathbb{Q}] \leq \ell\sqrt{[k:\mathbb{Q}]}$). Nous reportons ceci dans la majoration précédente et trouvons

$$M \leq h_F(A) + 75 \times 2^{10} g^6 + 2^{10} g^3 \log[k:\mathbb{Q}] + 2^{10} g^3 \log M$$

en notant que $h_F(A) \geq -3g/2$ (minoration de Bost). Nous pouvons donc utiliser le lemme 8.5 avec $x = M$, $u = 2^{10}g^3$ et $v = (75g^3 + 1 + 2^{-10})\max(h_F(A), \log[k:\mathbb{Q}], 1)$. Il fournit (avec $\log u \leq 10\log 2 + 3(g-1)$)

$$\begin{aligned} M + \frac{3}{2}g &\leq 2^{11} g^3\Big(75g^3 - 2 + 10\log 2 + 3g + \frac{7}{2^{12}}\Big)\max\big(h_F(A), \log[k:\mathbb{Q}], 1\big) \\ &\leq 83 \times 2^{11} g^6 \max\big(h_F(A), \log[k:\mathbb{Q}], 1\big). \end{aligned}$$

Nous reportons cette estimation (qui est plus grande que $\log(4(9g)^{4g}[k:\mathbb{Q}])$) dans la définition de P et nous obtenons cette fois-ci

$$Q \leq (9g)^{96g^4}\big(4(9g)^{4g}(8g)^{64g^2} 83^2 2^{22} g^{12} [k:\mathbb{Q}] \max\big(h_F(A), \log[k:\mathbb{Q}], 1\big)^2\big)^{2^{10}g^3}$$

et nous trouvons la borne $\kappa(A)$ de l'introduction en constatant

$$83^2 (9g)^{4g+3g/32} (8g)^{64g^2} (4g)^{12} \leq (14g)^{64g^2}. \qquad \square$$

Établissons maintenant la majoration de la hauteur de Faltings d'une sous-variété abélienne.

Démonstration du corollaire 1.5
Le théorème 1.3 fournit une isogénie $B \times B_1 \to A$ de degré $\mathrm{Card}(B \cap B_1)$ donc

$$h_{F,K}(B \times B_1) = h_{F,K}(B) + h_{F,K}(B_1) \leq h_{F,K}(A) + \frac{1}{2}\log \mathrm{Card}(B \cap B_1).$$

Par la minoration de Bost utilisée ci-dessus, $h_{F,K}(B_1) \geq h_F(B_1) \geq -(3/2)\dim B_1 \geq -(3/2)g$. Par suite

$$h_{F,K}(B) \leq h_{F,K}(A) + \frac{1}{2}\log e^{3g}\operatorname{Card}(B \cap B_1).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'à la fin de la démonstration précédente nous pouvons écrire $e^{-3g}\kappa(A)$ au lieu de $\kappa(A)$. □

10. Cas elliptique

Dans cette partie, nous examinons ce que deviennent les théorèmes de l'introduction lorsque $g = 1$ c'est-à-dire lorsque A est une courbe elliptique. Dans cette situation, les résultats de [GR1] permettent de donner de bien meilleures bornes. Nous distinguons selon que la courbe elliptique admet ou non des multiplications complexes.

Supposons en premier lieu que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire précisément que $\operatorname{End}_{\overline{k}} A \simeq \mathbb{Z}$. Dans ce cas, les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 valent trivialement en remplaçant $\kappa(A)$ par 1 puisque toute courbe elliptique est géométriquement simple et principalement polarisée et puisque $\mathbb{Z}$ est bien un ordre maximal. Le seul énoncé significatif est donc le théorème 1.4 qui vaut ici avec la borne

$$10^{13}[k:\mathbb{Q}]^2 \max\bigl(h_F(A), \log[k:\mathbb{Q}], 1\bigr)^2$$

en vertu de [GR1, Théorème 1.4] ; il faut rappeler que si une isogénie entre les courbes A et A' est définie sur une extension K alors c'est le cas de toutes les isogénies (voir [GR1, Proposition 7.3]).

Tournons-nous ensuite vers le cas de la multiplication complexe. Les théorèmes 1.1 et 1.3 restent sans objet ainsi que l'assertion de polarisation principale dans le théorème 1.2 ; en revanche le passage à un ordre maximal (autrement dit à l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire de multiplication complexe) demande un travail supplémentaire.

PROPOSITION 10.1

Soit E une courbe elliptique sur un corps de nombres k. Il existe une extension k_1 de k, une courbe elliptique E' sur k_1 et une isogénie $\varphi\colon E \to E'$ sur k_1 de sorte que $\operatorname{End}_{k_1} E' = \operatorname{End}_{\overline{k_1}} E'$ *est l'anneau des entiers du corps* $\operatorname{End}_{k_1} E' \otimes \mathbb{Q}$*,*

$$\deg\varphi \leq 30[k:\mathbb{Q}]\max\Bigl(1, h_F(E) + \frac{1}{2}\log[k:\mathbb{Q}]\Bigr)$$

et $[k_1 : k] \leq 2(\deg\varphi)^2$.

Démonstration

Nous supposons bien sûr que E admet des multiplications complexes. Nous reprenons tout d'abord le paragraphe 7.4 de [GR1] avec $E_1 = E_2 = E$ mais avec la différence que nous choisissons pour (ω_1, ω_2) une base minimale du réseau des périodes de E telle que $\|\omega_1\| \leq \|\omega_2\|$. En considérant une extension finie k'/k telle que $\mathrm{End}_{k'} E = \mathrm{End}_{\overline{k}} E$, nous faisons ensuite la même construction qui fournit une isogénie $\psi \colon E \to E$, définie sur k', à partir des deux projections $p_1, p_2 \colon A_\omega \to E$. Nous avons donc $\psi \circ p_1 = \Delta_1 p_2$ puis $\mathrm{d}\psi(\omega_1) = \Delta_1 \omega_2$. En particulier, ψ n'est pas un multiple de l'identité. Nous en déduisons $\mathrm{End}_{k'} E \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathrm{id} \oplus \mathbb{Q}\psi$ puis $\Lambda(\mathrm{End}_{k'} E) \leq \max(\sqrt{2}, |\psi|) = |\psi| = \sqrt{2 \deg \psi}$ et $\mathrm{vol}(\mathrm{End}_{k'} E) \leq 2\sqrt{\deg \psi}$ (inégalité d'Hadamard). Notons $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $\mathrm{End}_{k'} E \otimes \mathbb{Q}$. Le discriminant de ce corps vaut $-\mathrm{vol}(\mathcal{O})^2$. Comme c'est un entier congru à 1 modulo 4 ou divisible par 4, sa valeur absolue est au moins 3. Par suite, $\mathrm{vol}(\mathcal{O}) \geq \sqrt{3}$ et $[\mathcal{O} : \mathrm{End}_{k'} E] \leq 2\sqrt{\deg \psi / 3}$. Par la proposition 4.9 appliquée avec $A = E$ et $K = k'$, nous disposons de E' comme dans l'énoncé et d'un couple d'isogénies $E \rightleftharpoons E'$ dont le produit des degrés est au plus $4 \deg \psi / 3$. L'une des deux isogénies est donc de degré au plus $2\sqrt{\deg \psi / 3}$ et, quitte éventuellement à dualiser, nous obtenons $\varphi \colon E \to E'$ de degré majoré par $2\sqrt{\deg \psi / 3}$. Ces objets φ et E' sont définis sur le corps K' donné par la proposition 4.9 mais nous pouvons en fait nous limiter à l'extension k_1 de k' sur laquelle le noyau de φ est défini. Par le lemme 4.7, nous avons $[k_1 : k'] \leq (\deg \varphi)^2$. Il nous reste donc à estimer $[k' : k]$ et $\deg \psi$. Comme l'identité de E est définie sur k, la seule action non triviale de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathbb{Z}\mathrm{id} \oplus \mathbb{Z}\psi$ est celle donnée par $\psi \mapsto -\psi$, nous en déduisons que l'on peut choisir $[k' : k] \leq 2$. Pour majorer $\deg \psi$ nous utilisons les calculs de [GR1, paragraphe 7.4] dont nous reprenons les notations. Les modifications à apporter sont les suivantes : le choix des périodes donne $\|\omega_1\| \|\omega_2\| \leq 2/\sqrt{3}$ (inégalité d'Hermite) donc la relation $\|\omega\|^2 = \|\omega_1\|^2/\Delta_1 = \|\omega_2\|^2/\Delta_2$ fournit $\|\omega\|^2 \leq 2/\sqrt{3\Delta_1\Delta_2}$. Ceci donne encore $T_\omega \geq \sqrt{3}\delta/2$ à condition de changer la définition de δ en $\sqrt{\Delta_1\Delta_2}/D$ (où $D = [k' : \mathbb{Q}]$). La suite des calculs se poursuit alors de même en ne modifiant que les constantes numériques. Comme l'extension de corps à faire est de degré au plus 2, nous sommes amenés à prendre $H = \max(1, h(E) + (1/2)\log(D/2\pi))$ (où $h(E) = h_F(E) + (1/2)\log \pi$). Les constantes subissent alors les mêmes changements qu'au paragraphe 7.5.1 de [GR1] : les valeurs $19,55$ et $25,12$ sont remplacées par $14,18$ et $19,75$ tandis que 233 devient 167. Il faut simplement remarquer que la relation $\Delta_1 \leq D\delta$ vaut encore car $\|\omega_1\| \leq \|\omega_2\|$. De même nous avons toujours $\Delta_1\Delta_2 \leq D^2\delta^2$ (ici il y a égalité) et l'on conclut

$$\deg \psi \leq 668[k : \mathbb{Q}]^2 \max\Big(1, h_F(E) + \frac{1}{2}\log[k : \mathbb{Q}]\Big)^2.$$

L'énoncé suit enfin de $\deg \varphi \leq 2\sqrt{\deg \psi / 3}$. □

Terminons par une version du théorème 1.4 dans le cas CM.

PROPOSITION 10.2
Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques sur k à multiplications complexes (sur $\overline{k}$) et isogènes sur une extension K de k. Alors il existe une K-isogénie $E_1 \to E_2$ de degré au plus

$$2,85 \times 10^5 [k:\mathbb{Q}]^2 \max\big(1, h_F(E_1) + \log[k:\mathbb{Q}]\big)^2.$$

Démonstration
Dans la plupart des cas, la borne de [GR1, Théorème 1.4] suffit sauf dans le cas où il existe une isogénie $E_1 \to E_2$ qui n'est pas définie sur K. Dans ce cas, par l'argument de la démonstration précédente, toutes les isogénies sont définies sur une extension K' de K de degré au plus 2. Par ailleurs on sait (voir [GR1, Proposition 7.3]) qu'elles sont aussi définies sur une extension k' de k de degré au plus 12. Ici nous choisissons $k' \subset K'$. Nous devons alors appliquer le paragraphe 7.4 de [GR1] deux fois : une fois tel quel et il nous fournit une isogénie φ sur k' de degré au plus

$$3,4 \times 10^4 [k:\mathbb{Q}]^2 \max\big(1, h_F(E_1) + \log[k:\mathbb{Q}]\big)^2.$$

La construction est telle que $\mathrm{d}\varphi$ envoie une période minimale de E_1 sur un multiple d'une période minimale de E_2. Nous faisons ensuite une deuxième construction avec un couple de périodes différent pour obtenir une autre isogénie ψ sur k', indépendante de φ. Ici nous choisissons les périodes (ω_1, ω_2) de sorte que l'une soit minimale et l'autre le deuxième élément d'une base minimale et de façon que le produit de leurs normes soit minimal. Ce dernier vaut $\lambda(\Omega_1)\Lambda(\Omega_2)$ ou $\Lambda(\Omega_1)\lambda(\Omega_2)$; il est donc majoré par la racine carrée du produit de ces quantités et donc n'excède pas $2/\sqrt{3}$. Nous poursuivons la preuve avec ce couple de périodes comme dans la démonstration précédente en utilisant $\delta = \sqrt{\Delta_1\Delta_2}/D$. Les différences sont la borne 12 au lieu de 2 pour $[k':k]$ et le fait que l'on peut seulement écrire en général $\Delta_1 \leq (D\delta)^2$ au lieu de $\Delta_1 \leq D\delta$. Ceci amène à poser $H = \max(1, h(E_1) + \log(D/(12\sqrt{\pi})))$. La relation cruciale entre δ et H se transforme en

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\delta \leq 3\log\frac{\sqrt{3}}{2}\delta^3 + 6H + 6\log(12\sqrt{\pi}) + 8,66 \leq 9\log\delta + 32,58H.$$

On vérifie qu'elle entraîne $\delta \leq 22,24H$ puis

$$\deg\psi \leq 71225[k:\mathbb{Q}]^2 \max\big(1, h_F(E_1) + \log[k:\mathbb{Q}]\big)^2.$$

La fin de l'argument est alors simple avec les techniques du présent texte : nous avons $\Lambda(\mathrm{Hom}_{K'}(E_1,E_2)) \leq \max(|\varphi|,|\psi|) = \sqrt{2\max(\deg\varphi,\deg\psi)}$ et $\Lambda(\mathrm{Hom}_K(E_1, E_2)) \leq 2\Lambda(\mathrm{Hom}_{K'}(E_1,E_2))$ (lemme 3.3). Enfin il existe une isogénie $\chi\colon E_1 \to E_2$ définie sur K avec $|\chi| \leq \Lambda(\mathrm{Hom}_K(E_1,E_2))$ donc $\deg\chi \leq 4\max(\deg\varphi,\deg\psi)$. Avec les bornes obtenues, ceci fournit immédiatement le résultat. $\square$

11. Exemple

Pour illustrer le théorème 1.2 nous montrons l'énoncé suivant.

PROPOSITION 11.1

Il existe une classe d'isogénie de variétés abéliennes complexes dans laquelle aucun élément A ne possède simultanément une polarisation principale et un anneau d'endomorphismes qui soit un ordre maximal.

Nous commençons par établir le critère suivant.

LEMME 11.2

Soient K un corps quadratique imaginaire et p un nombre premier inerte dans K. Soit A une variété abélienne de dimension paire sur un corps algébriquement clos, d'anneau des endomorphismes isomorphe à $\mathcal{O}_K$ et admettant une polarisation donnée par un faisceau inversible $\mathcal{L}$ tel que $v_p(h^0(A,\mathcal{L})) \notin 2\mathbb{Z}$. Alors la classe d'isogénie de A vérifie les conditions de la proposition 11.1.

Démonstration

Raisonnons par l'absurde et supposons donc avoir une isogénie $\varphi\colon A \to A'$ de A vers une variété abélienne principalement polarisée A' telle que $\mathrm{End}(A')$ est un ordre maximal. Notons $\mathcal{L}'$ un faisceau sur A' définissant la polarisation principale. Par formule de projection, nous avons $\deg\varphi = h^0(A,\varphi^*\mathcal{L}')$. D'autre part, l'espace $\mathrm{NS}(A)\otimes\mathbb{Q}$ est isomorphe aux points fixes de l'involution de Rosati sur $\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q} \simeq K$. Comme l'involution correspond à la conjugaison sur K, il vient $\mathrm{NS}(A)\otimes\mathbb{Q}\simeq\mathbb{Q}$ puis $\mathrm{NS}(A)\simeq\mathbb{Z}$. Par conséquent, il existe $m,n\in\mathbb{N}$ avec $\mathcal{L}^{\otimes n}\simeq(\varphi^*\mathcal{L}')^{\otimes m}$. Avec $g=\dim A$ cela donne $n^g h^0(A,\mathcal{L}) = m^g \deg\varphi$. Comme g est pair, $v_p(\deg\varphi)$ est impaire.

Montrons dans un deuxième temps que le groupe fini $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (de cardinal $\deg\varphi$) admet une structure de $\mathcal{O}_K$-module. Pour cela fixons une isogénie $\psi\colon A'\to A$ telle que $\psi\circ\varphi$ est la multiplication sur A par un entier ℓ. Alors l'application

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(A')\otimes\mathbb{Q} &\longrightarrow \mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q},\\ \chi &\longmapsto \ell^{-1}\psi\circ\chi\circ\varphi\end{aligned}$$

est un isomorphisme de corps. L'image de $\mathrm{End}(A')$ est donc un ordre maximal du corps $\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}$. Comme $\mathcal{O}_K$ est le seul ordre maximal de K, cette image coïncide donc avec $\mathrm{End}(A)\simeq\mathcal{O}_K$. Tout $u\in\mathrm{End}(A)$ s'écrit ainsi $\ell^{-1}\psi\circ\chi\circ\varphi$ pour un certain $\chi\in\mathrm{End}(A')$ et donc $\varphi\circ u = \chi\circ\varphi$. En particulier $u(\mathrm{Ker}\,\varphi)\subset\mathrm{Ker}\,\varphi$ nous montre bien que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un $\mathrm{End}(A)$-module.

Finalement, la contradiction résulte du fait que pour tout $\mathcal{O}_K$-module fini M nous avons $v_p(\mathrm{Card}(M)) \in 2\mathbb{Z}$. En effet, par théorème de structure sur un anneau de Dedekind, M est produit de modules de la forme $\mathcal{O}_K/I$ pour un idéal non nul I. Le cardinal d'un tel module, égal à la norme de I, s'écrit comme produit de normes d'idéaux premiers. Enfin, p étant inerte, le seul idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ tel que $v_p(N(\mathfrak{p})) \neq 0$ est l'idéal $p\mathcal{O}_K$ de norme p^2. □

Il reste à construire une variété abélienne A comme dans le lemme. La première solution est d'invoquer la construction des espaces de modules de variétés abéliennes avec structure d'endomorphismes, telle qu'elle est décrite au chapitre 9 de [BL]. Si nous prenons $K = \mathbb{Q}(i)$, $p = 3$, $g = 4$ puis $\mathcal{M} = \mathcal{O}_K^4$ et $T = \mathrm{diag}(i, i, i, -3i)$ alors la construction du paragraphe 9.6 (avec $F = K$) montre que tout élément A de $\mathcal{A}(\mathcal{M}, T)$ possède une polarisation avec $v_3(h^0(A, \mathcal{L})) = 1$ et une injection $\iota\colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$. De plus le théorème 9.9.1 entraîne que ι est une bijection pour A suffisamment générale dans $\mathcal{A}(\mathcal{M}, T)$. Les hypothèses du lemme sont donc satisfaites.

Plutôt que de faire appel à cette construction générale, nous pouvons aussi expliciter un cas particulier où les vérifications se font bien plus simplement.

Choisissons trois nombres réels a, b, c tels que $a^2 + b^2 + c^2 < 1$ et qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ de degré 2 avec $P(a\sqrt{3}, b\sqrt{3}, c\sqrt{3}) = 0$ (ceci précise le caractère suffisamment général apparu plus haut). Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & a\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & b\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & c\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définissons ensuite le sous-groupe Λ de $\mathbb{C}^4$ engendré par les colonnes de M et de iJM. Il s'agit d'un réseau car M est inversible ($\det M = \sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$). Écrivons enfin pour $x, y \in \mathbb{C}^4$

$$H(x, y) = x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + x_4\overline{y_4} + \frac{x_1\overline{y_1} + (ax_2 + bx_3 + cx_4)\overline{(ay_2 + by_3 + cy_4)}}{1 - a^2 - b^2 - c^2}.$$

Ceci donne visiblement une forme H sesquilinéaire hermitienne définie positive sur $\mathbb{C}^4$ et l'on vérifie par calcul direct que la forme alternée $\mathrm{Im}\, H$ prend des valeurs entières sur $\Lambda \times \Lambda$ et que son pfaffien est 3 (en fait la base fournie de Λ est orthogonale pour cette forme).

Tout ceci entraîne que $A = \mathbb{C}^4/\Lambda$ est une variété abélienne munie d'une polarisation pour laquelle $h^0(A, \mathcal{L}) = 3$. Nous déterminons ensuite $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ comme ensemble des matrices $Z \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ pour lesquelles $Z(\Lambda) \subset \Lambda$. Matriciellement, cette dernière condition signifie qu'il existe $U, V, W, X \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z})$ avec $ZM = MU +$

$iJMV$ et $iZJM = MW + iJMX$. En éliminant Z et en séparant parties réelle et imaginaire, il vient

$$MUM^{-1}JM = JMX \qquad \text{et} \qquad -JMVM^{-1}JM = MW.$$

Le couple $(-V, W)$ satisfait donc la même équation que (U, X) qui s'écrit encore $UN = NX$ avec $N = M^{-1}JM$. Nous pouvons même remplacer N par $N' = (a^2 + b^2 + c^2 - 1)N$ qui vaut

$$\begin{pmatrix} c^2+b^2-a^2-1 & -2ab & -2ac & -2a\sqrt{3} \\ -2ab & c^2-b^2+a^2-1 & -2bc & -2b\sqrt{3} \\ -2ac & -2bc & -c^2+b^2+a^2-1 & -2c\sqrt{3} \\ 2a/\sqrt{3} & 2b/\sqrt{3} & 2c/\sqrt{3} & c^2+b^2+a^2+1 \end{pmatrix}.$$

La condition imposée sur a, b, c entraîne que les dix coefficients présents ici sur et au-dessus de la diagonale sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Nous écrivons donc N' comme une combinaison linéaire de dix matrices $N_1, \ldots, N_{10}$ de $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$. Toute combinaison linéaire Y de ces matrices satisfait $UY = YX$. Comme nous obtenons en particulier toutes les matrices diagonales, nous trouvons que $U = X$ est diagonale. En reportant dans $UN = NX$ il vient finalement $U = X = xI$ avec $x \in \mathbb{Z}$. De même $-V = W = -yI$ donc $Z = xI + iyJ$.

Ce calcul nous montre $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{Z}I \oplus \mathbb{Z}iJ$. Comme l'inclusion inverse est immédiate nous en déduisons bien que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[i] = \mathcal{O}_K$.

Références

[Au] P. AUTISSIER, *Un lemme matriciel effectif*, Math. Z. **273** (2013), 355–361. MR 3010164. DOI 10.1007/s00209-012-1008-x. *(2094)*

[Ba] W. BANASZCZYK, *New bounds in some transference theorems in the geometry of numbers*, Math. Ann. **296** (1993), 625–635. MR 1233487. DOI 10.1007/BF01445125. *(2072)*

[Be] D. BERTRAND, *Minimal heights and polarizations on abelian varieties*, prépublication Math. Sci. Res. Inst., Berkeley, 1987. *(2059)*

[BL] C. BIRKENHAKE et H. LANGE, *Complex Abelian Varieties*, Grund. Math. Wiss. **302**, Springer, 1992. MR 1217487. *(2072, 2075, 2106)*

[Bo] J.-B. BOST, *Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres*, Séminaire Bourbaki, Astérisque, **237**, Société Mathématique de France, 1996, 115–161. MR 1423622. *(2058)*

[FP] D. FARENICK et B. PIDKOWICH, *The spectral theorem in quaternions*, Lin. Alg. Appl. **371** (2003), 75–102. MR 1997364. DOI 10.1016/S0024-3795(03)00420-8. *(2074)*

[GR1] É. GAUDRON et G. RÉMOND, *Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies*, à paraître dans Comment. Math. Helv. **89** (2014), 343–403. MR 3225452.

DOI 10.4171/CMH/322. *(2058, 2061, 2062, 2090, 2093, 2095, 2096, 2098, 2102, 2103, 2104)*

[GR2] ———, *Lemmes de Siegel d'évitement*, Acta Arith. **154** (2012), 125–136. MR 2945657. DOI 10.4064/aa154-2-2. *(2070)*

[Mar] J. MARTINET, *Perfect Lattices in Euclidean Spaces*, Grund. Math. Wiss. **327**, Springer, 2003. MR 1957723. *(2070)*

[Mas] D. MASSER, "From $2^{\sqrt{2}}$ to polarizations on abelian varieties" in *Colloquium de Giorgi*, Edizioni della Normale, Pisa, 2006, 37–43. MR 2252827. *(2058)*

[MW1] D. MASSER et G. WÜSTHOLZ, *Isogeny estimates for abelian varieties, and finiteness theorems*, Ann. of Math. **137** (1993), 459–472. MR 1217345. DOI 10.2307/2946529. *(2060)*

[MW2] ———, *Endomorphism estimates for abelian varieties*, Math. Z. **215** (1994), 641–653. MR 1269495. DOI 10.1007/BF02571735. *(2060, 2061, 2066, 2068, 2089, 2090)*

[MW3] ———, *Factorization estimates for abelian varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **81** (1995), 5–24. MR 1361754. *(2058, 2060, 2061, 2073, 2076, 2079, 2082, 2083, 2084)*

[MW4] ———, *Polarization estimates for abelian varieties*, à paraître dans Algebra and Number Theory. *(2058)*

[MvdG] B. MOONEN et G. VAN DER GEER, *Abelian Varieties*, livre en préparation, voir staff.science.uva.nl/~bmoonen/boek/BookAV.html. *(2073, 2074)*

[Mu] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*. Oxford Univ. Press, London, 1974. MR 0282985. *(2062, 2063, 2064, 2065, 2067, 2074, 2075, 2076, 2078)*

[RU] N. RATAZZI et E. ULLMO, "Galois + equidistribution = Manin-Mumford" in *Arithmetic Geometry*, Clay Math. Proc. **8**., Amer. Math. Soc., Providence, 2009, 419–430. MR 2498067. *(2059)*

[Re] I. REINER, *Maximal Orders*, London Math. Soc. Monogr., N.S., **28**, Clarendon Press Oxford Univ. Press. 2003. MR 1972204. *(2079, 2081, 2082)*

[Si] A. SILVERBERG, Fields of definition for homomorphisms of abelian varieties, J. Pure Appl. Algebra. **77** (1992), 253–262. MR 1154704. DOI 10.1016/0022-4049(92)90141-2. *(2097)*

Gaudron

Université Blaise Pascal, UMR 6620, Campus universitaire des Cézeaux, BP 80026, 63171 Aubière Cedex, France ; Eric.Gaudron@univ-bpclermont.fr

Rémond

Institut Fourier, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France ; Gael.Remond@ujf-grenoble.fr