Université Blaise Pascal
U.F.R. Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Licence Sciences - Langues

Deuxième année

# MATHÉMATIQUES

*Notes de cours (seconde partie)*

2015-2016

François Dumas

Université Blaise Pascal
U.F.R. Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Licence Sciences - Langues

Deuxième année

# MATHÉMATIQUES

*Notes de cours (seconde partie)*

2015-2016

François Dumas

Ces notes sont organisées en cinq chapitres (trois en analyse consacrés aux séries, deux relevant de l'algèbre linéaire et s'appliquant en géométrie), incluant de nombreux exercices d'application, complétés par des sujets de devoirs des années antérieures.

Elles correspondent à un contenu, un niveau et un mode d'exposition propres au programme et aux objectifs de la formation concernée.

Le fait de les mettre à la disposition des étudiants comme support à leur travail personnel ne signifie pas qu'il s'agisse d'un document parfaitement finalisé, dans sa conception comme dans sa rédaction. Je suis donc par avance reconnaissant à toutes celles et tous ceux qui me signaleront les erreurs, manques, imperfections, coquilles,... qu'il contient immanquablement.

version du 16 décembre 2015 Francois.Dumas@univ-bpclermont.fr

# Table des matières

**4 Réduction des endomorphismes** **95**
4.1 Notions générales sur les valeurs propres . . . 96
4.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres . . . 96
4.1.2 Exemples de problèmes de valeurs propres . . . 96
4.1.3 Polynôme caractéristique . . . 97
4.1.4 Multiplicité d'une valeur propre . . . 99
4.1.5 Quelques exemples explicites de différentes situations possibles . . . 100
4.1.6 Théorème de Cayley-Hamilton . . . 101
4.1.7 Exercices . . . 104
4.2 Diagonalisation . . . 106
4.2.1 Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable . . . 106
4.2.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité . . . 107
4.2.3 La question de la trigonalisabilité . . . 108
4.2.4 Exercices . . . 110
4.3 Applications de la diagonalisation . . . 111
4.3.1 Application au calcul des puissances d'une matrice . . . 111
4.3.2 Application à l'étude de suites récurrentes . . . 112
4.3.3 Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires . . . 113
4.3.4 Exercices . . . 116

**5 Espaces vectoriels euclidiens** **119**
5.1 Produit scalaire et norme euclidienne . . . 119
5.1.1 Notion de produit scalaire . . . 119
5.1.2 Orthogonalité . . . 121
5.1.3 Représentation des formes linéaires . . . 123
5.1.4 Familles orthogonales de polynômes . . . 124
5.1.5 Quelques propriétés classiques (sous forme d'exercices) . . . 125
5.1.6 Exercices . . . 127
5.2 Groupe orthogonal . . . 129
5.2.1 Endomorphismes orthogonaux . . . 129
5.2.2 Matrices orthogonales . . . 130
5.2.3 Orientation et produit mixte . . . 131
5.2.4 Exercices. . . . 133
5.3 Endomorphismes symétriques . . . 135
5.3.1 Transposition . . . 135

5.3.2 Diagonalisation des endomorphismes symétriques . . . . . . . . . . . . . . . 136
5.3.3 Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137
5.4 Applications géométriques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 138
5.4.1 Description des isométries vectorielles en dimension 2 . . . . . . . . . . . 138
5.4.2 Angles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 140
5.4.3 Description des isométries vectorielles en dimension 3 . . . . . . . . . . . 144
5.4.4 Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 145

**Annexe 3 : une fiche de synthèse (notation des différents groupes) 147**

**Annexe 4 : archives de sujets de devoirs sur les chapitres 4 et 5 151**

# Chapitre 4

# Réduction des endomorphismes

Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ (où $\mathbb{K}$ est un corps ; pour nous ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f$ un endomorphisme de $E$.

**a)** L'image par $f$ d'une droite vectorielle de $E$, lorsqu'elle n'est pas nulle, est une droite vectorielle. Existe-t-il des droites qui soient leur propre image par $f$ ? C'est une des questions que nous allons étudier dans ce chapitre.

**b)** Supposons que $E$ est de dimension finie. En choisissant une base $\mathscr{B}$ de $E$, on peut représenter $f$ par sa matrice carrée $A$ dans la base $\mathscr{B}$. Or il existe des types particuliers de matrices pour lesquelles les règles de calculs sont particulièrement simples, en particulier les matrices diagonales (le produit de deux matrices diagonales est diagonale, le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses coefficients diagonaux,...), ou plus généralement les matrices triangulaires. On comprend donc que, pour représenter $f$ par sa matrice $A$ dans la base $\mathscr{B}$, on a tout intérêt à choisir $\mathscr{B}$ telle que $A$ soit diagonale (ou à défaut triangulaire). Encore faut-il que cela soit possible, c'est-à-dire qu'une telle base existe. C'est ce problème (pour un endomorphisme donné, déterminer une base dans laquelle sa matrice soit la plus simple possible : diagonale, triangulaire...) que l'on va aborder dans ce chapitre. Cette question est directement liée à la question a) précédente. Les applications (en analyse et en géométrie en particulier) sont extrêmement importantes.

**c)** On connaît divers *invariants* pour les matrices carrées : il s'agit d'objets mathématiques qui ne changent pas quand on remplace une matrice $A$ par une matrice semblable, c'est-à-dire une matrice carrée $A' = P^{-1}AP$, avec $P$ inversible. On sait que cela signifie que ces objets sont en fait attachés non pas à la matrice $A$ elle-même, mais à l'endomorphisme $f$ dont $A$ ou $A'$ sont les matrices dans deux bases. Citons :

- le rang, qui est un entier naturel : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(P^{-1}AP) = \operatorname{rg} f$ ;
- la trace, qui est un scalaire : $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} f$ ;
- le déterminant, qui est aussi un scalaire : $\det A = \det(P^{-1}AP) = \det f$.

On va dans ce chapitre définir un autre invariant, qui est cette fois un polynôme (en un certain sens, que l'on précisera plus loin, il "contient" les précédents), et qui est un outil fondamental pour résoudre les questions a) et b) formulées précédemment.

## 4.1 Notions générales sur les valeurs propres

### 4.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

**a)** Définitions

1. Une *valeur propre* de $f$ dans $\mathbb{K}$ est un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur $v \in E$ <u>non-nul</u> tel que $f(v) = \lambda.v$. On utilisera l'abréviation v.p. pour valeur propre.

2. On appele *spectre* de $f$ l'ensemble des v.p. de $f$.

3. Si $\lambda$ est une v.p. de $f$, on appelle *vecteur propre* de $f$ associé à $\lambda$ tout vecteur $v \in E$ <u>non-nul</u> tel que $f(v) = \lambda.v$.

4. Pour toute v.p. $\lambda$ de $f$, on appelle *sous-espace propre* de $f$ associé à la v.p. $\lambda$ le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda.\operatorname{id})$ de $E$.

**b)** Remarque. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Considérons le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda.\operatorname{id})$.

- Par définition, $E_\lambda$ est l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $f(v) = \lambda.v$.

- Dire que $\lambda$ est une v.p. de $f$ signifie que le ss-e.v. $E_\lambda$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$. Si $E$ est de dimension finie $n$, on a alors : $1 \leq \dim E_\lambda \leq n$.

- Si $\lambda$ est une v.p. de $f$, le sous-espace vectoriel $E_\lambda$ est donc formé des vecteurs propres associés à $\lambda$ (qui par définition sont tous non-nuls), et du vecteur nul (qui n'est pas un vecteur propre, mais qui appartient quand même au sous-espace propre).

**c)** Remarque. Si $v$ est un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda$, alors $v$ ne peut pas être vecteur propre pour une autre valeur propre $\mu \neq \lambda$. En effet, $f(v) = \lambda.v = \mu.v$ implique $(\lambda - \mu).v = 0_E$, ce qui, puisque $v \neq 0_E$, conduit nécessairement à $\lambda = \mu$.

### 4.1.2 Exemples de problèmes de valeurs propres

**a)** Exemple (*équation différentielle*). On prend ici pour $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute fonction $y \in E$ associe sa dérivée $y' \in E$. Il est clair que $f$ est linéaire.
Un réel $\lambda$ est une v.p. de $f$ si et seulement s'il existe une fonction non identiquement nulle $y \in E$ telle que $y' = \lambda y$. On sait que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $y = ky_\lambda$ avec $k \in \mathbb{R}$ quelconque, où l'on note $y_\lambda$ la fonction $y_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. En d'autres termes, le spectre de $f$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le sous-espace propre $E_\lambda$ associé à la v.p. $\lambda$ est la droite vectorielle dirigée dans $E$ par $y_\lambda$.

**b)** Exemple (*espace de suites*). On prend ici pour $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées de réels. On considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$, associe la suite $u^+ = (u_{n+1})_{n\geq 0}$. Il est clair que $f$ est linéaire.
Un réel $\lambda$ est une v.p. de $f$ si et seulement s'il existe une suite non identiquement nulle $u \in E$ telle que $u_{n+1} = \lambda u_n$ pour tout $n \geq 0$. Il est clair que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les suites vérifiant cette condition sont les suites géométriques définies par $u_n = \lambda^n u_0$. Une telle suite est bornée si et seulement si ($u_0 = 0$) ou ($u_0 \neq 0$ et $|\lambda| \leq 1$).

En d'autres termes, le spectre de $f$ est l'ensemble $[-1,1]$ et, pour tout $\lambda \in [-1,1]$, le sous-espace propre $E_\lambda$ associé à la v.p. $\lambda$ est la droite vectorielle dirigée par la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\geq 0}$.

**c)** Exemple (*projections et symétries*). On prend ici un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque $E$, et l'on considère deux sous-espaces vectoriels non-nuls $F$ et $H$ tels que $E = F \oplus H$.

Tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in H$.

La *projection* sur $F$ parallèlement à $H$ est l'application $p$ qui à tout $x \in E$ ainsi décomposé associe $p(x) = y$.
On a : $p \circ p = p$, $\operatorname{Ker} p = H$ et $\operatorname{Im} p = F$.

La *symétrie* par rapport à $F$ parallèlement à $H$ est l'application $s$ qui à tout $x \in E$ ainsi décomposé associe $s(x) = y - z$.
On a : $s \circ s = \mathrm{id}_E$, $\operatorname{Ker} s = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} s = E$

Si un réel $\lambda$ est une v.p. de $p$, alors il existe un vecteur non-nul $u \in E$ tel que $p(u) = \lambda u$, d'où $p^2(u) = p(\lambda u) = \lambda p(u) = \lambda^2 u$. Puisque $p \circ p = p$, il vient $\lambda u = \lambda^2 u$. Les seules v.p. possibles sont donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Il est clair que réciproquement 0 et 1 sont bien des v.p. de $p$, de sous-espaces propres associés $E_0 = H$ et $E_1 = F$. En particulier, on a : $E = E_0 \oplus E_1$.

Si un réel $\lambda$ est une v.p. de $s$, alors il existe un vecteur non-nul $u \in E$ tel que $s(u) = \lambda u$, d'où $s^2(u) = s(\lambda u) = \lambda s(u) = \lambda^2 u$. Puisque $s \circ s = \mathrm{id}_E$, il vient $u = \lambda^2 u$. Les seules v.p. possibles sont donc $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$. Il est clair que réciproquement $-1$ et 1 sont bien des v.p. de $p$, de sous-espaces propres associés $E_{-1} = H$ et $E_1 = F$. En particulier, on a : $E = E_{-1} \oplus E_1$.

**d)** Commentaires. Le fait que, pour les projections et pour les symétries, $E$ soit somme directe des sous-espaces propres est une propriété très importante, que l'on étudiera dans un contexte plus général plus loin en 4.2.

Les exemples précédents mettent en évidence que, même pour des espaces vectoriels de dimension infinie, on peut dans certaines situations particulières déterminer des v.p. et leurs sous-espaces propres associés simplement en revenant aux définitions. Mais dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, on dispose d'une méthode systématique que l'on va maintenant développer.

### 4.1.3 Polynôme caractéristique

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

**a)** Définition. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On appelle *polynôme caractéristique de $f$* le polynôme $P_f(x) = \det(f - x.\,\mathrm{id}_E) \in \mathbb{K}[x]$.

**b)** Théorème. *Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Les valeurs propres de $f$ dans $\mathbb{K}$ sont exactement les zéros dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique $P_f(x)$.*

*Preuve.* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a vu à la remarque b) du 4.1.1 que $\lambda$ est une v.p. de $f$ si et seulement si le noyau de l'endomorphisme $(f - \lambda.\,\mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, c'est-à-dire si et seulement si $(f - \lambda.\,\mathrm{id}_E)$ n'est pas injectif. Comme $E$ est de dimension finie, on sait que cela est encore équivalent à dire que $(f - \lambda.\,\mathrm{id}_E)$ n'est pas bijectif, et donc à $\det(f - \lambda.\,\mathrm{id}_E) = 0$. En résumé, les v.p. de $f$ sont exactement les scalaires $\lambda$ tels que $P_f(\lambda) = 0$. □

**c)** Remarques (passage aux matrices).

• Soit $\mathscr{B}$ une base quelconque de $E$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Soit $A$ la matrice de $f$ par rapport à la base $\mathscr{B}$. La matrice par rapport à la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme $(f - x.\,\mathrm{id}_E)$ est alors $(A - x.I_n)$. On a donc $\det(f - x.\,\mathrm{id}_E) = \det(A - x.I_n)$, et ceci quelle que soit la base $\mathscr{B}$ choisie.

• Réciproquement, toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut être considérée comme la matrice d'un certain endomorphisme $f$ de $E = \mathbb{K}^n$ par rapport à la base canonique. On appelle *polynôme caractéristique* de la matrice $A$ le polynôme caractéristique de $f$, c'est-à-dire le polynôme $P_A(x) = \det(A - x.I_n)$. Ses zéros dans $\mathbb{K}$ seront appelés les *valeurs propres* de la matrice $A$ dans $\mathbb{K}$ ; ce sont bien sûr les valeurs propres de l'endomorphisme $f$.

**d)** Conséquences pratiques. On suppose toujours que $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$.

(i) Pour déterminer les v.p. de $f$, on fixe une base quelconque $\mathscr{B}$, on introduit la matrice $A$ de $f$ par rapport à $\mathscr{B}$, et on détermine par un calcul de déterminant le polynôme $P_f(x) = P_A(x) = \det(A - x.I_n)$. Les zéros de ce polynôme sont les v.p. de l'endomorphisme $f$, que l'on appelle aussi les v.p. de la matrice $A$.

(ii) Comme il est clair que $P_f(x)$ est de degré $n$, il admet forcément au plus $n$ zéros dans $\mathbb{K}$. Donc $f$ admet au plus $n$ valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

(iii) *Attention !* Le polynôme $P_f(x)$ n'a pas forcément des zéros dans $\mathbb{K}$ (par exemple s'il est à coefficients réels de degré 2 et de discriminant $< 0$). Ce qui signifie que l'endomorphisme $f$ ou la matrice $A$ *n'a pas forcément de valeurs propres dans* $\mathbb{K}$ *!*

En revanche, un polynôme à coefficients réels $P_f(x)$ a forcément des zéros dans $\mathbb{C}$, et donc $f$ ou $A$ ont forcément des v.p. dans $\mathbb{C}$. On verra sur des exemples qu'il est parfois très utile de considérer les v.p. complexes d'une matrice même si celle-ci est au départ une matrice à coefficients réels.

(iv) Le calcul explicite du polynôme caractéritique se ramène le plus souvent à un calcul de déterminant, qui n'est pas forcément simple. Dans le cas évident où $n = 2$, le polynôme caractéristique d'une matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ s'exprime sous la forme :

$$P_A(x) = \left|\begin{smallmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{smallmatrix}\right| = x^2 - x(a+d) + (ad - bc).$$

On reconnaît en $(a+d)$ la trace de $A$ et en $(ad - bc)$ son déterminant. C'est le cas le plus simple du résultat général suivant.

**e)** Proposition. *Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. Son polynôme caractéristique $P_f(x) = \det(f - x.\,\mathrm{id}_E)$ est un polynôme de degré $n$, à coefficients dans $\mathbb{K}$, tel que :*

– *le coefficient de $x^n$ est $(-1)^n$ ;*
– *le coefficient de $x^{n-1}$ est $(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\, f$ ;*
– *le coefficient constant est $\det f$.*

*On a donc :*
$$P_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}\, f)x^{n-1} + \cdots + \det f.$$

*En d'autres termes, pour toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}\, A)x^{n-1} + \cdots + \det A.$$

*Preuve :* Le résultat est vrai pour $n = 2$ comme on vient de le voir à la fin du c) ci-dessus. Pour $n \geq 3$, notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $f$ par rapport à une base $\mathscr{B}$ de $E$, et développons par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-x & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-x & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}-x & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n}-x \end{vmatrix} = (a_{1,1}-x) \begin{vmatrix} a_{2,2}-x & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3}-x & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n}-x \end{vmatrix} + \cdots$$

où le reste désigné par les points de suspension est de degré $< n-1$. En d'autres termes, $P_A(x) = (a_{1,1} - x)P_{A'}(x) + \cdots$, où $A'$ est la matrice carrée d'ordre $n-1$ extraite de $A$ obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne.

Par récurrence, supposons que : $P_{A'}(x) = (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n(\operatorname{tr} A')x^{n-2} + \cdots$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } P_A(x) &= (-x + a_{1,1})[(-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n(\operatorname{tr} A')x^{n-2} + \cdots] + \cdots \\ &= (-1)^n x^n + [a_{1,1}(-1)^{n-1} - (-1)^n(\operatorname{tr} A')]x^{n-1} + \cdots \\ &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{1,1} + \operatorname{tr} A')}_{\operatorname{tr} A} x^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

ce qui prouve les deux premiers points de la proposition. Le troisième est clair en évaluant le polynôme $P_A(x) = \det(A - x.I_n)$ en $x = 0$. $\square$

### 4.1.4 Multiplicité d'une valeur propre

**a)** Rappel (sur les polynômes). Soit $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ de degré $n$. Soit $\alpha$ un zéro de $P(x)$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un nombre $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$. On peut alors mettre $(x - \alpha)$ en facteur dans $P(x)$. Il existe donc un unique entier $1 \leq q \leq n$, appelé la *multiplicité* de $\alpha$, tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)^q Q(x)$$

avec $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ de degré $n - q$ vérifiant $Q(\alpha) \neq 0$.

**b)** Définition. Soit $\lambda$ une v.p. dans $\mathbb{K}$ d'un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ (ou d'une matrice $A$ carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$). On appelle *multiplicité algébrique* de $\lambda$ sa multiplicité en tant que zéro du polynôme caractéristique de $f$ (ou de $A$).

**c)** Proposition. *Avec les données et notations ci-dessus, et en notant $E_\lambda$ le sous-epace propre associé à la v.p. $\lambda$, on a :*

$$1 \;\leq\; \dim E_\lambda \;\leq\; (\text{multiplicité algébrique de } \lambda) \;\leq\; n.$$

*Preuve :* Notons $p = \dim E_\lambda$ et $q$ la multiplicité algébrique de $\lambda$. On sait [remarque b) de 4.1.1] que $1 \leq p \leq n$. Soit $\mathscr{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de $E_\lambda$. Comme c'est une famille libre, on peut la complèter en une base $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ de $E$. Notons $M$ la matrice de $f$ par rapport à $\mathscr{B}$. Pour tout $1 \leq i \leq p$, le vecteur $u_i$ est un vecteur propre de $f$ associé à $\lambda$, donc $f(u_i) = \lambda.u_i$. Donc, par définition même de la matrice d'un endomorphisme par rapport à une base, les $p$ premières colonnes de la matrice $M$ sont :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det(M - x.I_n) = \begin{vmatrix} \lambda-x & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda-x & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \lambda-x & & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-x & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport aux $p$ premières colonnes, on déduit que $P_f(x)$ est de la forme $P_f(x) = (\lambda - x)^p Q(x)$, avec $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ de degré $n-p$. Par définition de la multiplicité algébrique $q$ de $P_f(x)$, on a donc $p \leq q$. $\square$

**d)** Terminologie. La dimension du sous-espace propre $E_\lambda$ est parfois appelée la *multiplicité géométrique* de la v.p. $\lambda$. On a donc toujours :

$$1 \leq p = (\text{multiplicité géométrique de } \lambda) \leq q = (\text{multiplicité algébrique de } \lambda) \leq n.$$

Une v.p. est *simple* si $q = 1$ ; sa multiplicité géométrique $p$ est alors 1.
Une v.p. est *double* si $q = 2$ ; sa multiplicité géométrique $p$ peut alors être alors 1 ou 2.
Une v.p. est dite *triple* si $q = 3$ ; sa multiplicité géométrique $p$ peut alors être alors 1, 2 ou 3.

### 4.1.5 Quelques exemples explicites de différentes situations possibles

**a)** Premier exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On calcule : $P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-2)+2 = -x^3+x^2+2x = -x(x-2)(x+1)$.

Donc $A$ admet trois valeurs propres simples qui sont 0, 2 et $-1$. Déterminons les sous-espaces propres correspondants.

$$(x,y,z) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 1 & 1 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}.$$

Donc $E_2 = \{(2y, y, y) \in \mathbb{R}^3 \,;\, y \in \mathbb{R}\}$ est la droite de base $(u_2)$, où $u_2 = (2,1,1)$.

$$(x,y,z) \in E_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-0 & 1 \\ 1 & 1 & -1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Donc $E_0 = \{(-2y, y, -y) \in \mathbb{R}^3 \,;\, y \in \mathbb{R}\}$ est la droite de base $(u_0)$, où $u_0 = (2,-1,1)$.

$$(x,y,z) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 & 0 \\ 0 & 1-(-1) & 1 \\ 1 & 1 & -1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Donc $E_{-1} = \{(y, -y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \,;\, y \in \mathbb{R}\}$ est la droite de base $(u_{-1})$, où $u_{-1} = (1,-1,2)$.

**b)** Second exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

On calcule : $P_A(x) = \begin{vmatrix} 8-x & 2 & -2 \\ 2 & 5-x & 4 \\ -2 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-x & 2 & -2 \\ 2 & 5-x & 4 \\ 0 & 9-x & 9-x \end{vmatrix} = (9-x) \begin{vmatrix} 8-x & 2 & -2 \\ 2 & 5-x & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (9-x) \begin{vmatrix} 8-x & 2 & -4 \\ 2 & 5-x & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (9-x)(-1) \begin{vmatrix} 8-x & -4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = (9-x)(x^2-9x) = -x(x-9)^2.$$

Donc 0 est v.p. simple et 9 est v.p. double. On sait qu'alors $E_0$ est forcément une droite, mais $E_9$ peut être soit une droite, soit un plan. Déterminons-les.

$$(x,y,z) \in E_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8-0 & 2 & -2 \\ 2 & 5-0 & 4 \\ -2 & 4 & 5-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 0 \\ -2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}.$$

Après calculs, on trouve que $E_0$ est la droite de base $(u_0)$, où $u_0 = (1,-2,2)$.

$$(x,y,z) \in E_9 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8-9 & 2 & -2 \\ 2 & 5-9 & 4 \\ -2 & 4 & 5-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 4z = 0 \\ -2x + 4y - 4z = 0 \end{cases}.$$

Donc $E_9$ est le plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$, dont une base est $(u_9, v_9)$, où $u_9 = (2,1,0)$ et $v_9 = (2,0,-1)$. Donc, sur cet exemple, la multiplicité de la v.p. double 9 est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

**c)** Troisième exemple. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$.

$$P_A(x) = \left|\begin{smallmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ -1 & 3-x & -1 \\ -2 & -1 & -3-x \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} -1-x & 2 & 4 \\ 0 & 3-x & -1 \\ x+1 & -1 & -3-x \end{smallmatrix}\right| = (x+1)\left|\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3-x & -1 \\ 1 & -1 & -3-x \end{smallmatrix}\right| = (x+1)\left|\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3-x & -1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{smallmatrix}\right|$$
$$= -(x+1)(x^2 - 4x + 4) = -(x+1)(x-2)^2.$$

Donc $-1$ est v.p. simple et 2 est v.p. double. On sait qu'alors $E_{-1}$ est forcément une droite, mais $E_2$ peut être soit une droite, soit un plan. Déterminons-les.

$$(x,y,z) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ -1 & 3-(-1) & -1 \\ -2 & -1 & -3-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Après calculs, on trouve que $E_{-1}$ est la droite de base $(u_{-1})$, où $u_{-1} = (1,0,-1)$.

$$(x,y,z) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & 2 & 4 \\ -1 & 3-2 & -1 \\ -2 & -1 & -3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases}.$$

Après calculs, on trouve que $E_2$ est la droite de base $(u_2)$, où $u_2 = (2,1,-1)$. Donc, sur cet exemple, la multiplicité de la v.p. double 2 est strictement supérieure à la dimension du sous-espace propre correspondant.

**d)** Quatrième exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Après calculs, $P_A(x) = (x+1)(x-1)^3$.

$-1$ est v.p. simple. On sait qu'alors $E_{-1}$ est forcément une droite. Après calculs, on trouve que $E_{-1}$ est la droite de base $(u_{-1})$, où $u_{-1} = (1,0,0,-1)$.

1 est v.p. triple. $(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 5x - 3y - 3z + 5t = 0 \\ 4x - 2y - 2z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Donc $E_1$ est la droite de base $(u_1)$, où $u_1 = (0,1,-1,0)$. Sur cet exemple, le sous-espace propre associé à la v.p. triple 1 est seulement de dimension 1.

**e)** Cinquième exemple. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Après calculs, $P_A(x) = x^2 + x + 1$. Donc $A$ n'admet pas de v.p. dans $\mathbb{R}$. En revanche, dans $\mathbb{C}$, elle admet deux v.p. simples distinctes qui sont $j$ et $j^2$. On vérifie aisément (par la même méthode que sur les exemples précédents) que $E_j$ est la droite de base $(u_j)$, où $u_j = (1, 1-j)$ et $E_{j^2}$ est la droite de base $(u_{j^2})$, où $u_{j^2} = (1, 1-j^2)$.

### 4.1.6 Théorème de Cayley-Hamilton

**a)** Notations (*Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices*).

Soit $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ un polynôme dans $\mathbb{K}[x]$, avec donc $\alpha_i \in \mathbb{K}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

• Pour toute matrice carré $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut considère dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice notée $P(A)$ et définie par :

$$P(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n.$$

Cette écriture désigne bien une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ : c'est une combinaison linéaire (avec les coefficients $\alpha_i$) des puissances $A^i$ de la matrice $A$ pour $i$ allant de $n$ à 0.
La notation $P_(A)$ est naturelle dans la mesure où cette matrice est obtenue en "appliquant" le polynôme $P(x)$ à $A$.
On sera particulièrement vigilant sur le fait que dans cette correspondance, le terme constant $\alpha_0$ (qu'il faut penser comme $\alpha_0 \times 1$) devient $\alpha_0 I_n$.
A noter que dans cette correspondance le produit de deux polynômes donne le produit matriciel :

$$\text{pour tous } P, Q \in \mathbb{K}[x] \text{ et toute } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \ (PQ)(A) = P(A) \times Q(A).$$

• Pour tout endomorphisme $f \in \operatorname{End} E$, on peut considère dans $\operatorname{End} E$ l'endomorphisme noté $P(f)$ et défini par :

$$P(f) = \alpha_n f^n + \alpha_{n-1} f^{n-1} + \cdots + \alpha_1 f + \alpha_0 \operatorname{id}_E.$$

Cette écriture désigne bien un endomorphisme de $E$ : c'est une combinaison linéaire (avec les coefficients $\alpha_i$) des puissances de composition $f^i$ de l'endomorphisme $f$ pour $i$ allant de $n$ à 0, avec la convention habituelle $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\ldots$, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ avec $n$ facteurs.
La notation $P_(f)$ est naturelle dans la mesure où cette matrice est obtenue en "appliquant" le polynôme $P(x)$ à $f$.
On sera particulièrement vigilant sur le fait que dans cette correspondance, le terme constant $\alpha_0$ (qu'il faut penser comme $\alpha_0 \times 1$) devient $\alpha_0 \operatorname{id}_E$.
A noter que dans cette correspondance le produit de deux polynômes donne le produit de composition des endomorphismes :

$$\text{pour tous } P, Q \in \mathbb{K}[x] \text{ et tout } f \in \operatorname{End} E,\ \ (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

• Soient $f$ un endomorphisme de $E$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de $f$ dans une base $\mathscr{B}$ de $E$. Il est facile de montrer que la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme $P(f)$ est la matrice $P(A)$. En d'autres termes :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f)) = P(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)).$$

Le théorème important ci-dessous applique cette notion de polynôme de matrice ou de polynôme d'endomorphisme au cas du polynôme caractéristique. Il nécessite le lemme préliminaire suivant.

**b)** LEMME (*matrice compagnon*). *Soit $P(x) = x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ un polynôme unitaire dans $\mathbb{K}[x]$, avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\alpha_n = 1$. Soit $C(P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice compagnon de $P$, définie par :*

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

*Alors le polynôme caractéristique de $C(P)$ est égal à $(-1)^n P(x)$.*

*Preuve.* On procède par récurrence sur $n$. Le résultat est trivial pour $n = 1$. Pour $n = 2$, on $C(P) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{smallmatrix}\right)$, dont le polynôme caractéristique est $\left|\begin{smallmatrix} -x & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 - x \end{smallmatrix}\right| = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = P(x)$. Supposons (hypothèse de récurrence) la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1$. On calcule en développant par rapport à la première ligne.

$$\det(C(P)-xI_n) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 & 0 & -a\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a\alpha_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & -x & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}-x \end{vmatrix} = (-x) \times \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & -x & \dots & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & -x & -\alpha_{n-2} \\ 0 & & & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}-x \end{vmatrix} + \alpha_0 \times 1.$$

Le déterminant $(n-1)\times(n-1)$ apparaisant comme coefficient de $x$ dans cette expression est, d'après l'hypothèse de récurrence, égal à : $(-1)^{n-1}\times(x^{n-1}+\alpha_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\alpha_2 x+\alpha_1)$. D'où : $\det(C(P)-xI_n) = (-1)^n \times (x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_2x^2+\alpha_1x)+\alpha_0$. □

**c)** Théorème (*de Cayley-Hamilton*). *Toute matrice carrée annule son polynôme caractéristique. Tout endomorphisme de $E$ annule son polynôme caractéristique. En d'autres termes :*

$$\big[P_A(A) = O_n \ \ \textit{pour toute } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big], \quad \textit{et} \quad \big[P_f(f) = O_E \ \ \textit{pour tout } f \in \operatorname{End} E\big].$$

*Preuve.* Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Notons $P_f$ son polynôme caractéristique. Considérons l'endomorphisme $g = P_f(f)$. Il s'agit de montrer que $g$ est l'endomorphisme nul de $E$, c'est-à-dire que $g(u) = 0_E$ pour tout $u \in E$. Si $u = 0_E$, c'est clair. Prenons donc $u \in E$ quelconque distinct de $0_E$. Introduisons la famille de tous les vecteurs $u, f(u), f^2(u), \dots, f^i(u), \dots$. Comme $E$ est de dimension finie $n$, il existe nécessairement un entier $0 \leq m \leq n$ tel que :

$$(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{m-1}(u)) \text{ est libre, et } (u, f(u), f^2(u), \dots, f^m(u)) \text{ est liée.}$$

D'une part, parce que la famille $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{m-1}(u))$ est libre, on peut la compléter en une base $\mathscr{B} = (u, f(u), f^2(u), \dots, f^{m-1}(u), w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n)$.

D'autre part, parce que la famille $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^m(u))$ est liée, il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que $f^m(u) = -\alpha_0 u - \alpha_1 f(u) - \alpha_2 f^2(u) - \cdots - \alpha_{m-1}f^{m-1}(u)$.

On introduit le polynôme : $Q(x) = x^m + \alpha_{m-1}x^m + \cdots + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0$, de sorte que l'identité ci-dessus entre vecteurs de $E$ devient $Q(f)(u) = 0_E$.

Avec ces notations, la matrice $A$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 & \star \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 & \star \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 & \star \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_3 & \star \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 & -a_{m-2} & \star \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 & -a_{m-1} & \star \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(Q) & \star \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

où $M$ est une certaine matrice carrée d'ordre $n-m$, et $C(Q)$ est la matrice compagnon du polynôme $Q(x)$. Il en résulte que $P_f(x) = P_A(x) = P_{C(Q)}(x) \times P_M(x)$, ou encore $P_f(x) = P_A(x) = Q(x) \times P_M(x) = P_M(x) \times Q(x)$ en utilisant le lemme b) précédent.

Cette égalité entre polynômes implique l'égalité $g = P_M(f) \circ Q(f)$ entre endomorphismes de $E$. Si on l'applique au vecteur $u$ choisi arbitrairement non-nul au début de la preuve, on obtient l'égalité $g(u) = P_m(f)\big(Q(f)(u)\big) = P_M(f)(0_E) = 0_E$. Ce qui achève la preuve. □

**d)** Exemple d'application (*matrices nilpotentes*). Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente lorsqu'il existe un entier $q \geq 0$ tel que $A^q = O_n$. Il est clair qu'alors $A^p = O_n$ pour tout $p \geq q$. Le plus petit entier $q \geq 0$ tel que $A^q = O_n$ est appelé l'indice de nilpotence de $A$.

► Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^n = O_n$ (et donc l'indice de nilpotence de $A$ est $\leq n$).

*En effet.* Parce que $A$ est nilpotente, 0 est une valeur propre de $A$, c'est la seule valeur propre de $A$, et le polynôme caractéristique de $A$ est $P_A(x) = (-1)^n x^n$ ; voir ci-dessous exercice 8 de 4.1.7. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_A(A) = O_n$, et donc directement $A^n = O_n$. □

► Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte, alors elle est nilpotente.

*En effet.* On suppose que $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq j \leq i \leq n$. Un calcul évident donne $P_A(x) = (-1)^n x^n$ et donc, comme ci-dessus, le théorème de Cayley-Hamilton implique $A^n = (-1)^n P_A(A) = O_n$. □

**e)** Exemple d'application (*calcul de puissances d'une matrice*). Considérons dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On vérifie facilement que 2 est valeur propre double, avec un sous-espace propre associé qui est la droite vectorielle engendrée sur $\mathbb{C}$ par le vecteur $v(1, -1)$. Donc $A$ n'est pas diagonalisable. Son polynôme caractéristique est $P_A(x) = (x-2)^2$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_A(A) = O_2$, donc $(A - 2I_2)^2 = O_2$, et finalement :

$$A^2 - 4A + 4I_2.$$

Ainsi $A^2 = 4(A - I_2)$, d'où l'on tire par une récurrence (laissée au lecteur) une formule générale donnant les puissances de $A$ suivant la parité de l'exposant :

$$A^{2p} = 2^{2p}(pA - (2p-1)I_2) \quad \text{et} \quad A^{2p+1} = 2^{2p}((2p+1)A - 4pI_2).$$

A noter aussi qu'il résulte de la relation $A^2 - 4A + 4I_2$ que $4I_2 = -A^2 + 4A = A(-A + 4I_2)$, ou encore $I_2 = A(-\frac{1}{4}A + I_2)$. Ceci démontre que la matrice $A$ est inversible, et que son inverse est :

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{4}A + I_2,$$

qui n'est autre que la première des deux formules ci-dessus pour $p = -\frac{1}{2}$.

### 4.1.7 Exercices

Exercice 1. Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie admet-il forcément des v.p. dans $\mathbb{K}$ ? (On pourra distinguer suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ qui n'est pas de dimension finie admet-il forcément des v.p. dans $\mathbb{C}$ ? (On pourra considérer dans $E = \mathbb{C}[x]$ l'endomorphisme $f$ qui envoie tout monôme $x^i$ sur $x^{i+1}$).

Exercice 2. Montrer que, si $\lambda$ est une valeur propre d'un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, alors $\lambda^n$ est valeur propre de l'endomorphisme $f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ; que peut-on dire des sous-espaces propres correspondants ?

Exercice 3. Deux matrices semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique (rappeler la preuve) ; a-t-on la réciproque ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la somme des valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{C}$ (chacune répétée autant de fois que sa multiplicité) est égale à la trace de $A$.

Exercice 5. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P$ son polynôme caractéristique. Quelle relation a-t-on entre $P$ et le polynôme caractéristique $R$ de la transposée ${}^tA$.

On suppose de plus que $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, et l'on note $Q$ est le polynôme caractéristique de $A^{-1}$ ; quelle relation a-t-on pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$ entre $Q(\lambda)$ et $P(\lambda^{-1})$ ?

Exercice 6. Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que, si 0 est v.p. de $f^m$ pour un certain entier $m \geq 1$, alors 0 est v.p. de $f$. Montrer que $f$ est surjectif si et seulement si 0 n'est pas v.p. de $f$.

exercice 7. Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $f$ est une homothétie vectorielle de $E$ (c'est-à-dire un multiple scalaire de $\mathrm{id}_E$) si et seulement si tout vecteur non-nul de $E$ est vecteur propre de $f$.

Exercice 8. Soit $f$ un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer que 0 est v.p. de $f$, que c'est la seule v.p. de $f$, et déterminer le polynôme caractéristique de $f$.

Exercice 9. Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer que $f$ et $g$ n'ont aucune valeur propre commune dans $\mathbb{C}$ si et seulement si leurs polynômes caractéristiques $P_f$ et $P_g$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10. Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si $A$ ou $B$ est inversible, alors $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique.

On suppose maintenant $A$ et $B$ non-inversibles. Montrer que, pour tout $\lambda \in K$, les polynômes $Q_\lambda(x) = \det[(A - xI_n)B - \lambda I_n]$ et $R_\lambda(x) = \det[B(A - xI_n) - \lambda I_n]$ sont égaux dans $\mathbb{K}[x]$. En déduire que dans ce cas aussi $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 11. Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, non-nul et distinct de $E$. On suppose que $F$ est stable par $u$, et l'on note $v$ l'endomorhisme de $F$ défini par la restriction de $u$ à $F$. Montrer que le polynôme caractéristique $P_v$ divise le polynôme caractéristique $P_u$.

Montrer que si $H$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$ stable par $u$, et si l'on note $w \in \operatorname{End} H$ la restriction de $u$ à $H$, on a $P_u = P_v P_w$.

Exercice 12. On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On fixe dans $E$ une matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et on considère l'application $f$ de $E$ dans $E$ qui, à toute matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ associe $f(M) = AM - MA$. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer ses v.p. et sous-espaces propres.

Exercice 13. On considère dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est son rang ?

En déduire que 0 est v.p. de $A$ et déterminer la dimension du sous-espace propre $E_0$. En écrivant le système d'équations que satisfont les coordonnées d'un vecteur propre de $A$ associé à une valeur propre non-nulle $\lambda$, déterminer les valeurs possibles $\lambda$. Vérifier réciproquement que ce sont bien des valeurs propres.

Exercice 14. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En utilisant le théorème de Cayley et Hamilton, déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$. Calculer le polynôme de matrice $Q(A)$ pour $Q(x) = x^5 - ax^4 + x^3 - (1-a)x^2 - x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

Exercice 15. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ admettant deux valeurs propres distinctes $\lambda$ et $\mu$. Montrer qu'il existe deux matrices $M$ et $N$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$A^n = \lambda^n M + \mu^n N \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

*Indication :* on pourra, pour $n \geq 2$, effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{C}[x]$ de $x^n$ par le polynôme caractéristique $P_A(x)$, et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 16. Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En utilisant l'exercice 9 ci-dessus et le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que si $A$ et $B$ n'ont aucune valeur propre commune dans $\mathbb{C}$, alors la matrice $P_A(B)$ est inversible.

## 4.2 Diagonalisation

### 4.2.1 Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$.

**a)** Lemme préliminaire. *Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $f$ admet $s$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ dans $\mathbb{K}$. Alors, le sous-espace somme $F = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_s}$ des sous-espaces propres de $f$ est une somme directe : $F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_s}$.*

*Preuve :* Il s'agit de montrer que tout vecteur de $F$ se décompose de façon unique en une somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_s$ avec $u_1 \in E_{\lambda_1}, u_2 \in E_{\lambda_2}, \ldots, u_s \in E_{\lambda_s}$. Par définition de $F$, l'existence d'une telle décomposition est claire. Le problème est seulement l'unicité. Quitte à faire la différence membre à membre de deux telles décompositions, on est ramené à montrer simplement que, pour tous $u_1 \in E_{\lambda_1}, u_2 \in E_{\lambda_2}, \ldots, u_s \in E_{\lambda_s}$, on a :

$$\text{si } u_1 + u_2 + \cdots + u_s = 0_E, \text{ alors } u_1 = u_2 = \cdots = u_s = 0_E.$$

Supposons donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_s = 0_E$ avec $u_i \in E_{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq s$. En appliquant $f$, on a :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \cdots + \lambda_s.u_s = f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_s) = f(u_1 + u_2 + \cdots + u_s) = f(0_E) = 0_E.$$

Par ailleurs, en multipliant par $\lambda_1$, on a aussi $\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_2 + \cdots + \lambda_1 u_s = 0_E$, d'où par différence membre à membre : $\sum_{i=2}^{s} (\lambda_i - \lambda_1).u_i = 0_E$. On réitère. En appliquant $f$, il vient :

$$\sum_{i=2}^{s} (\lambda_i - \lambda_1)\lambda_i.u_i = \sum_{i=2}^{s} (\lambda_i - \lambda_1).f(u_i) = f\left(\sum_{i=2}^{s} (\lambda_i - \lambda_1).u_i\right) = f(0_E) = 0_E.$$

Par ailleurs, en multipliant par $\lambda_2$, on obtient $\sum_{i=2}^{s} (\lambda_i - \lambda_1)\lambda_2.u_i = 0_E$, d'où par différence membre à membre : $\sum_{i=3}^{s} (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2).u_i = 0_E$. De proche en proche, on parvient ainsi à : $(\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2) \ldots (\lambda_s - \lambda_{s-1}).u_s = 0_E$. Comme les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts, on conclut $u_s = 0_E$. La somme de départ $u_1 + \cdots + u_s = 0_E$ se réduit donc à $u_1 + \cdots + u_{s-1} = 0_E$. En réitérant le même raisonnement, on obtient successivement $u_{s-1} = 0_E, \cdots ; u_2 = 0_E, u_1 = 0_E$. Ce qui achève la preuve. □

**b)** Définitions. Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit *diagonalisable* lorsqu'il existe une base $\mathscr{C}$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{C}$ soit une matrice diagonale $D$. Une matrice carrée d'ordre $n$ est dite *diagonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Si $A$ désigne la matrice de $f$ dans une base quelconque $\mathscr{B}$ de $E$, on a donc :

$$(\text{l'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable}) \Leftrightarrow (\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable}).$$

Dans ce cas, en notant $A = M_{\mathscr{B}}(f)$, $D = M_{\mathscr{C}}(f)$ diagonale, et $P = \text{Pass}_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$, on a :

$$A = PDP^{-1}$$

Remarquons qu'alors les coefficients diagonaux de la matrice $D$ sont exactement les v.p. de $f$, chacune apparaissant un nombre de fois égal à sa multiplicité algébrique : il suffit pour le voir de développer $\det(D - x.I_n) = P_D(x) = P_A(x) = P_f(x)$.
En particulier :
- la trace de $A$ est la somme des valeurs propres de $A$, chacune comptée avec sa multiplicité ;
- le déterminant $A$ est le produit des valeurs propres de $A$, chacune comptée avec sa multiplicité.

### 4.2.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$.

**a)** THÉORÈME. *Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f$ est diagonalisable ;*

(ii) *il existe une base $\mathscr{C}$ de $E$ qui est formée de vecteurs propres de $f$ ;*

(iii) *$E$ est la somme directe des sous-espaces propres de $f$ ;*

(iv) *le polynôme caractéristique $P_f(x)$ admet $n$ zéros (comptés avec leur multiplicité), et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre $\lambda$ de $f$ est égale à la dimension du sous-espace propre $E_\lambda$ correspondant ;*

(v) *le polynôme caractéristique $P_f(x)$ est produit de $n$ facteurs de degré 1, et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre $\lambda$ de $f$ est égale à la dimension du sous-espace propre $E_\lambda$ correspondant.*

*Preuve.* Supposons que l'on a (i). Il existe donc une base $\mathscr{C}$ de $E$ telle que la matrice $D$ de $f$ par rapport à $\mathscr{C}$ est diagonale. Certains de ses coefficients peuvent être égaux : on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ les valeurs distinctes de ces coefficients diagonaux (donc $1 \leq s \leq n$). Quitte à permuter les vecteurs de $\mathscr{C}$, on peut sans restriction supposer qu'ils apparaissent dans l'ordre :

$$D = M_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_s & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

(tous les autres coefficients hors de la diagonale étant des zéros).

Pour tout $1 \leq i \leq s$, notons $q_i$ le nombre de fois où apparaît le coefficient $\lambda_i$ sur la diagonale. Donc la base $\mathscr{C}$ de $E$ est la réunion $\mathscr{C}_1 \cup \dots \cup \mathscr{C}_s$ où chaque $\mathscr{C}_i$ est formé de $q_i$ vecteurs de $\mathscr{C}$ vérifiant $f(u) = \lambda_i.u$. Chaque $\lambda_i$ est donc une v.p. de $f$, et la dimension du sous-espace propre associé $E_{\lambda_i}$ est $q_i$. Cet entier $q_i$ est aussi la multiplicité algébrique de la v.p. $\lambda_i$, puisque qu'il suffit de développer le déterminant $\det(D - x.I_n)$ pour obtenir $P_f(x) = \det(D - x.I_n) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{q_1}(x-\lambda_2)^{q_2}\dots(x-\lambda_s)^{q_s}$. Donc (v) est vérifiée.

• L'implication (v) $\Rightarrow$ (iv) est claire.

• Supposons (iv). On a d'une part : $P_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{q_1}(x-\lambda_2)^{q_2}\dots(x-\lambda_s)^{q_s}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sont les v.p. distinctes de $f$, et d'autre part : $\dim E_{\lambda_i} = q_i$ pour tout $1 \leq i \leq s$.

Considérons le ss-e.v. somme $F = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_s}$. D'après le lemme a), on a en fait $F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$, donc $\dim F = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dots + \dim E_{\lambda_s} = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \deg P_f(x) = n = \dim E$. Donc $E = F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$, ce qui prouve (iii).

• Il résulte de (iii) que l'on peut former une base $\mathscr{C}$ de $E$ en prenant la réunion disjointe : $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \dots \cup \mathscr{C}_s$, où chaque $\mathscr{C}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}$ (donc formée de $q_i$ vecteurs propres associés à la v.p. $\lambda_i$) pour tout $1 \leq i \leq s$. Ceci prouve (ii).

• Supposons (ii). Avec les notations précédentes, pour tout vecteur $u \in \mathscr{C}$, il existe un unique indice $1 \leq i \leq s$ tel que $u \in \mathscr{C}_i$, et l'on a alors $f(u) = \lambda_i.u$. La matrice de $f$ par rapport à la base $\mathscr{C}$ est ainsi diagonale par construction.

On a montré que : (i) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), ce qui achève la preuve. □

**b)** Corollaire. *Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Si $f$ admet $n$ v.p. distinctes (chacune étant nécessairement une v.p. simple), alors $f$ est diagonalisable.*

*Preuve.* On applique tout ce qui précède au cas $n = s$, d'où $q_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Dans ce cas, chaque sous-espace propre est une droite. □

**c)** Attention ! Ce corollaire ne donne qu'une condition suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable ; elle n'est nullement nécessaire, comme l'exprime le théorème général a) et comme le montre le deuxième des exemples ci-dessous.

**d)** Exemples. Reprenons les exemples traités en 4.1.5.

• Dans l'exemple (a), la matrice $A$ considérée est diagonalisable, d'après le corollaire ci-dessus. Une base de vecteurs propres est $\mathscr{C} = (u_2, u_{-1}, u_0)$, donc :

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Dans l'exemple (b), la matrice $A$ considérée est diagonalisable, d'après le (iv) du théorème c) ci-dessus. Une base de vecteurs propres est $\mathscr{C} = (u_0, u_9, v_9)$, donc :

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

• Dans l'exemple (c), la matrice $A$ considérée n'est pas diagonalisable, car le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est seulement de dimension 1.

• De même dans l'exemple (d), la matrice $A$ considérée n'est pas diagonalisable, car le sous-espace propre associé à la valeur propre triple 1 est seulement de dimension 1.

• Enfin, dans l'exemple (e), $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (car admet deux v.p. simples distinctes complexes). Une base de vecteurs propres est $\mathscr{C} = (u_j, u_{j^2})$, donc : $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-j & 1-j^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

### 4.2.3 La question de la trigonalisabilité

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$.

On a traité au paragraphe précédent la situation la plus favorable : celle où la matrice carrée $A$ considérée est semblable à une matrice diagonale. Ce n'est pas toujours le cas ! On traite donc dans ce paragraphe une situation moins favorable, mais utile quand même pour les applications pratiques, celle où $A$ est seulement semblable à une matrice triangulaire.

**a)** Définitions. Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit *trigonalisable* lorsqu'il existe une base $\mathscr{C}$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{C}$ soit une matrice triangulaire (supérieure) $T$. Une matrice carrée d'ordre $n$ est dite *trigonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure).

Si $A$ désigne la matrice de $f$ dans une base quelconque $\mathscr{B}$ de $E$, on a donc :

$$(\text{l'endomorphisme } f \text{ est trigonalisable}) \Leftrightarrow (\text{la matrice } A \text{ est trigonalisable}).$$

Dans ce cas, avec $A = M_{\mathscr{B}}(f)$, $T = M_{\mathscr{C}}(f)$ triangulaire, et $P = \mathrm{Pass}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, on a :

$$A = PTP^{-1}$$

**b)** Théorème. *Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ ;*

(ii) *le polynôme caractéristique $P_f(x)$ est produit de $n$ facteurs de degré 1 sur $\mathbb{K}$.*

*Preuve.* Supposons que l'on a (i). Il existe donc une base $\mathscr{C}$ de $E$ telle que la matrice $T$ de $f$ par rapport à $\mathscr{C}$ est triangulaire supérieure. Donc $P_f(x) = P_T(x)$. Comme $T$ est triangulaire, il est clair que $P_T(x) = (-1)^n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$. Donc (ii) est vérifié (et les coefficients diagonaux de $T$ sont les v.p. de $f$).

• Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur $n$. Le résultat est trivial si $n = 1$. Supposons-le vrai pour tout endomorphisme de tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n-1$. Prenons $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n$ tel que $P_f(x)$ est produit de $n$ facteurs de degré 1 sur $\mathbb{K}$. Il admet donc au moins un zéro dans $\mathbb{K}$. Soit donc $\lambda$ un zéro de $P_f(x)$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une v.p. de $f$. Soit $u$ un vecteur propre de $f$ associé à $\lambda$. On a $u \neq 0$, donc d'après 1.5.4.b, on peut compléter $u$ en une base $\mathscr{B} = (u, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ de $E$. Notons $\mathscr{C} = (v_2, v_3, \ldots, v_n)$, qui est une famille libre (car sous-famille de $\mathscr{B}$). Notons $F = \mathrm{Vect}\,\mathscr{C}$. D'après 1.5.2.b, $\mathscr{C}$ est une base de $F$, de sorte que $\dim F = n-1$. D'après 1.5.3.b, $F$ est un supplémentaire dans $E$ de la droite vectorielle $\Delta$ de base $(u)$.

Comme $f(u) = \lambda.u$, la matrice de $f$ par rapport à $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 \ \alpha_3 \ldots \ \alpha_n \\ 0 & \\ 0 & \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $\alpha_j \in \mathbb{K}$ pour tout $2 \leq j \leq n$.

Appelons $g$ l'endomorphisme de $F$ dont $B$ est la matrice par rapport à la base $\mathscr{C}$ (attention, ce n'est pas la restriction de $f$ à $F$, car $F$ n'est a priori pas stable par $f$). On a donc :

$$f(v_j) = \alpha_j.u + g(v_j) \quad \text{pour tout } 2 \leq j \leq n.$$

On calcule alors à partir de $A$ : $P_A(f) = \det(A - x.I_n) = (\lambda - x)\det(B - x.I_{n-1})$, c'est-à-dire : $P_f(x) = (\lambda - x)P_g(x)$. Comme on a supposé que $P_f(x)$ est produit de $n$ facteurs de degré 1, il en résulte que $P_g(x)$ est produit de $n-1$ facteurs de degré 1. On peut appliquer à $g$ l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{C}' = (w_2, w_3, \ldots, w_n)$ de $F$ telle que la matrice $T$ de $g$ par rapport à la base $\mathscr{C}'$ est triangulaire supérieure. Comme $E = \Delta \oplus F$, il résulte de 1.5.3.b que $\mathscr{B}' = (u, w_2, w_3, \ldots, w_n)$ est une base de $E$. Chaque $w_i$ (pour $2 \leq i \leq n$) est c.l. de $v_2, \ldots, v_n$, donc :

$$f(w_i) = \beta_i.u + g(w_i) \quad \text{pour tout } 2 \leq i \leq n,$$

où le scalaire $\beta_i$ est c.l. des $\alpha_j$. Donc la matrice de $f$ par rapport à $\mathscr{C}'$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & \beta_2 \ \beta_3 \ldots \ \beta_n \\ 0 & \\ 0 & \begin{bmatrix} & & \\ & T & \\ & & \end{bmatrix} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

qui est triangulaire ; ce qui achève la preuve. □

**c)** Corollaire (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ ; toute matrice carrée à coefficients complexes est trigonalisable.*

*Preuve.* On sait que tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ se décompose en un produit de facteurs de degré 1 sur $\mathbb{C}$ ; on peut donc appliquer le théorème précédent. □

**d)** Remarque importante. Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. On peut toujours la considérer comme un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est donc toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$, mais cela ne signifie bien sûr pas qu'elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
Si par exemple $P_A(x) = -(x-2)(x^2+1)$, $A$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur $\mathbb{C}$ puisque $P_A(x) = -(x-2)(x-i)(x+i)$.

**e)** Exemples. Reprenons les exemples vus en 4.1.5. On a déjà vu que les exemples (a) et (b) correspondent à des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$, et que l'exemple e) est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (il n'est sur $\mathbb{R}$ ni diagonalisable ni trigonalisable puisque qu'il n'admet pas de v.p. réelles.)

Dans les exemples (c) et (d), les matrices considérées ne sont pas diagonalisables, mais elles sont trigonalisables sur $\mathbb{R}$ puisque le polynôme caractéristique se décompose en produit de facteurs de degré 1. Détaillons :

• Reprenons la matrice $A$ de l'exemple (c) de 4.1.5. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont $A$ est la matrice par rapport à la base canonique. Le sous-espace propre associé à la valeur simple $-1$ est la droite de base $(u_{-1})$ avec $u_{-1} = (1,0,-1)$. Le sous-espace propre associé à la valeur double 2 est la droite de base $(u_2)$ avec $u_2 = (2,1,-1)$. Quelle que soit la façon de compléter la famille libre $(u_{-1}, u_2)$ en une base $\mathscr{C}$ par l'adjonction d'un vecteur quelconque qui n'est pas combinaison linéaire de $u_{-1}$ et $u_2$, la matrice de $f$ par rapport à la base $\mathscr{C}$ est triangulaire. Prenons par exemple $\mathscr{C} = (u_{-1}, u_2, e_1)$ avec $e_1 = (1,0,0)$. Notons $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{C}$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Reprenons la matrice $A$ de l'exemple (d) de 4.1.5. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont $A$ est la matrice par rapport à la base canonique. Le sous-espace propre associé à la valeur simple $-1$ est la droite de base $(u_{-1})$ avec $u_{-1} = (1,0,0,-1)$. Le sous-espace propre associé à la valeur triple 1 est la droite de base $(u_1)$ avec $u_1 = (0,1,-1,0)$. On sait que l'on peut compléter $(u_{-1}, u_1)$ en une base $\mathscr{C} = (u_{-1}, u_1, v, w)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de $f$ par rapport à la base $\mathscr{C}$ est triangulaire. Mais ici, le choix des deux vecteurs $v, w$ n'est pas indifférent ; il existe une méthode générale pour les déterminer (réduction de Jordan, hors de notre programme). Contentons-nous de noter ici que, pour $v = (1,0,2,0)$ et $w = (0,0,1,1)$, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 4.2.4 Exercices

Exercice 1 Pour quelles valeurs des paramètres réels les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ m-6 & m-7 & -m+12 \\ m-3 & m-3 & -m+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} q & 1 & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ définie par : $a_{i,j} = b$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = a$. Montrer que $A$ est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose que $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id}_E) = \{0\}_E$. Montrer que $u$ est diagonalisable.

Exercice 4. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in \mathrm{End}\, E$.

– Montrer que le sous-ensemble de $\operatorname{End} E$ formé des endomorphismes $u$ tels quelconque$f \circ u = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{End} E$ de dimension $n \times \dim \operatorname{Ker} f$.

– Soit $\sigma$ l'application de $\operatorname{End} E$ dans $\operatorname{End} E$ définie par $\sigma(u) = f \circ u$ pour tout $u \in \operatorname{End} E$. Montrer que $\sigma$ est un endomorphisme de $\operatorname{End} E$, qui admet les mêmes v.p. que $f$, et qui est diagonalisable si et seulement si $f$ l'est.

Exercice 5. Soient $n \geq 1$ un entier fixé et $E = \mathbb{R}_n[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. Soient $a, b$ deux réels distincts fixés. Soit $f$ l'application $E \to E$ définie par $f(P(x)) = (x-a)(x-b)P'(x) - nxP(x)$ pour tout $P \in E$, où $P'$ désigne le polynôme dérivé de $P$.

– Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

– Montrer que, si un polynôme $P \in E$ est un vecteur propre de $f$, alors il est de la forme $P(x) = (x-a)^k(x-b)^hQ(x)$ avec $k, h \in \mathbb{N}$ et $Q \in E$. Montrer que $Q$ est nécessairement une constante. En déduire les v.p. et les vecteurs propres de $f$. Conclure que $f$ est diagonalisable.

Exercice 6. On fixe un entier $p \geq 2$. On note $U_p$ le groupe des racines $p$-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ vérifiant $u^p = \mathrm{id}_E$.

– Montrer que l'ensemble des v.p. de $u$ est inclus dans $U_p$.

– Montrer que, pour tout $\omega \in U_p$, l'image de l'endomorphisme $v_\omega = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \omega^{-j}u^j$ est égale à $\operatorname{Ker}(u - \omega\,\mathrm{id}_E)$.

– En notant $\omega_k = \exp(2ik\pi/p)$ pour tout entier $1 \leq k \leq p$, montrer que, our tout entier $1 \leq n \leq p-1$, on a $\sum_{k=1}^{p}(\omega_k)^{-n} = 0$.

– Calculer $\sum_{k=1}^{p} v_{\omega_k}(x)$ pour tout $x \in E$. Conclure que $u$ est diagonalisable.

## 4.3 Applications de la diagonalisation

On développe dans le corps du texte trois applications classiques de la diagonalisation : le calcul des puissances d'une matric carrée, le calcul du terme général de suites définies par des relations récurrences linéaires (qui est une conséquence du calcul précédent), et la résolution des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants.

Plusieurs autres applications en algèbre et en géométrie figurent dans les exercices en fn de paragraphe.

### 4.3.1 Application au calcul des puissances d'une matrice

**a)** Principe. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que $A$ est diagonalisable. Comme on l'a vu en 4.2.1, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D$ diagonale et $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. On calcule alors :

$$A^m = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^mP^{-1} \text{ pour tout entier } m \geq 1.$$

Puisque $D^m$ est elle-même diagonale, ceci permet de calculer aisément $A^m$.

**b)** Exemple. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $P_A(x) = -(x+1)^2(x-2)$. On montre que le sous-espace propre $E_{-1}$ est le plan d'équation $x + ay + a^2z = 0$ et que le sous-espace propre $E_2$ est la droite d'équations $x = ay = a^2z$. Donc $A$ est diagonalisable et l'on a : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/a & 2 & -a \\ -1/a^2 & -1/a & 2 \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/a & 2 & -a \\ -1/a^2 & -1/a & 2 \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix},$$

pour obtenir que : $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_n$ où l'on a posé : $\alpha_n = \frac{1}{3}[2^n - (-1)^n]$ et $\beta_n = \frac{1}{3}[2(-1)^n + 2^n]$.

On a en particulier : $A^2 = A + 2I_3$,

d'où $\frac{1}{2}(A - I_3)A = I_3$, ce qui prouve que $A$ est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

### 4.3.2 Application à l'étude de suites récurrentes

**a)** Principe. Les contextes peuvent être divers, mais le principe est toujours d'exprimer des relations de récurrence de type linéaire entre les termes successifs d'une ou plusieurs suites sous forme d'une égalité matricielle entre vecteurs, faisant intervenir une matrice carrée $A$, de sorte que le calcul de $A^n$ (suivant la méthode que l'on vient de voir lorsque $A$ est diagonalisable) permet de déterminer l'expression du terme général de la suite ou des suites considérées.
On verra diverses formes de relations en exercice ; limitons-nous ici à l'exemple suivant :

**b)** Exemple (suite récurrente avec une relation linéaire d'ordre 2). Soient $a$ et $b$ deux réels fixés. Soit $(u)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par la donnée des valeurs de $u_0$ et de $u_1$, et par la relation :

$$u_{n+2} = au_n + bu_{n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Posons $X_n = \left(\begin{smallmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathbb{R}^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right)$, de sorte que la relation s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ puisque

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On calcule $P_A(x) = x^2 - bx - a$.

• Si $P_A(x)$ admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les deux v.p. distinctes de $A$. Donc $A$ est diagonalisable. Il existe une matrice inversible $P$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. On peut écrire $X_{n+1} = AX_n$ sous la forme $X_{n+1} = PDP^{-1}X_n$, ou encore, en définissant $Y_n = \left(\begin{smallmatrix} v_n \\ w_n \end{smallmatrix}\right) = P^{-1}X_n$, sous la forme : $Y_{n+1} = DY_n$.

On en tire : $Y_n = D^nY_0$ pour tout $n \geq 0$, donc : $v_n = \lambda_1^n v_0$ et $w_n = \lambda_2^n v_1$. Avec $X_n = PY_n$, on conclut que la suite $(u_n)$ est combinaison linéaire des suites géométriques $(\lambda_1^n)$ et $(\lambda_2^n)$.

• Si $P_A(x)$ admet une racine double réelle $\lambda_0$, qui est donc v.p. double de $A$, on remplace la diagonalisation de $A$ par une trigonalisation de $A$ et l'on montre de même que la suite $(u_n)$ est combinaison linéaire de la suite géométrique $(\lambda_0^n)$ et de la suite $(n\lambda_0)^n$.

• Si $P_a(x)$ admet deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, on applique le premier cas avec une diagonalisation dans $\mathbb{C}$. On obtient que $\mu\rho^n e^{ni\theta} + \eta\rho^n e^{-i_theta}$ avec $\mu, \eta$ quelconques dans $\mathbb{C}$. En posant $\alpha = \mu + \eta$ et $\beta = i(\eta - \mu)$, on déduit que les solutions sont les suites $u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))$ avec $\alpha, \beta$ quelconques dans $\mathbb{R}$.

A noter que cette méthode permet de traiter de cas de relations de récurrence linéaires d'ordre $p \geq 2$, en réduisant (diagonalisant dans les bons cas) une matrice carrée d'ordre $p$.

### 4.3.3 Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires

**a)** Premier exemple (*cas diagonalisable avec v.p. simples*).

On cherche à déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = & -2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = & 3x(t) + 5y(t) \\ z'(t) = & x(t) + 2y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

On note matriciellement ce système sous la forme :

$$X'(t) = AX(t), \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suivant les méthodes vues ci-dessus, on montre que $A$ est diagonalisable et on réalise la diagonalisation :

$$P_A(x) = -(x+1)(x-2)(x-5), \text{ et } A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose : $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$ ; d'où : $U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t)$.

On a alors :

$(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow PU'(t) = APU(t) \Leftrightarrow U'(t) = P^{-1}APU(t) \Leftrightarrow U'(t) = DU(t)$.

On est donc ramené à résoudre le système (beaucoup plus simple) :

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = 2v(t) \\ w'(t) = 5w(t) \end{cases}.$$

D'après le cours d'analyse, on sait que les solutions de ce dernier système sont :

$$u(t) = \alpha e^{-t},\ v(t) = \beta e^{2t},\ w(t) = \gamma e^{5t}, \text{ pour } \alpha, \beta, \gamma \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

En revenant à $X(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{5t} \end{pmatrix}$, on conclut que les solutions du système différentiel $(S)$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = 2\alpha e^{-t} + \beta e^{2t} \\ y(t) = -\alpha e^{-t} - \beta e^{2t} + \gamma e^{5t} \\ z(t) = \beta e^{2t} + \gamma e^{5t} \end{cases}, \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

*Remarque :* algébriquement, les trois fonctions vectorielles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définies par $t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$, forment une base de l'espace vectoriel des solutions de $(S)$.

**b)** Deuxième exemple (*cas diagonalisable avec v.p. multiples*).

On cherche à déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = & 2x(t) + 3y(t) - 6z(t) \\ y'(t) = & -6x(t) - 7y(t) + 12z(t) \\ z'(t) = & -3x(t) - 3y(t) + 5z(t) \end{cases}.$$

On note matriciellement ce système sous la forme :

$$X'(t) = AX(t), \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -7 & 12 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Suivant les méthodes vues ci-dessus, on montre que $A$ est diagonalisable et on réalise la diagonalisation :

$$P_A(x) = -(x+1)^2(x-2), \text{ et } A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose : $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$ ; d'où : $U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t)$.

On a alors :

$(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow PU'(t) = APU(t) \Leftrightarrow U'(t) = P^{-1}APU(t) \Leftrightarrow U'(t) = DU(t)$.

On est donc ramené à résoudre le système (beaucoup plus simple) :

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -v(t) \\ w'(t) = -w(t) \end{cases}.$$

D'après le cours d'analyse, on sait que les solutions de ce dernier système sont :

$$u(t) = \alpha e^{2t},\ v(t) = \beta e^{-t},\ w(t) = \gamma e^{-t}, \text{ pour } \alpha, \beta, \gamma \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

En revenant à $X(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} \\ \beta e^{-t} \\ \gamma e^{-t} \end{pmatrix}$, on conclut que les solutions du système différentiel $(S)$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = -\alpha e^{2t} + (\beta+\gamma)e^{-t} \\ y(t) = 2\alpha e^{2t} + (-\beta+\gamma)e^{-t} \\ z(t) = \alpha e^{2t} + \gamma e^{-t} \end{cases}, \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

*Remarque :* algébriquement, les trois fonctions vectorielles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définies par $t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$, forment une base de l'espace vectoriel des solutions de $(S)$.

**c)** Troisième exemple (*cas diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *mais pas sur* $\mathbb{R}$).

On cherche à déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = \quad 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + z(t) \\ z'(t) = \quad 2x(t) - y(t) \end{cases}.$$

On note matriciellement ce système sous la forme :

$$X'(t) = AX(t), \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule : $P_A(x) = -x(x^2+9)$.

• *On résoud d'abord sur* $\mathbb{C}$.

$P_A(x) = -x(x-3i)(x+3i)$, donc $A$ est diagonalisable. On a :

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1+3i & -1-3i \\ 2 & -1-3i & -1+3i \end{pmatrix}.$$

On raisonnant comme sur les 2 exemples a) et b) précédents, on montre que les solutions du système différentiel $(S)$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + 4\beta e^{3it} + 4\gamma e^{-3it} \\ y(t) = 2\alpha + (-1+3i)\beta e^{3it} + (-1-3i)\gamma e^{-3it} \\ z(t) = 2\alpha + (-1-3i)\beta e^{3it} + (-1+3i)\gamma e^{-3it} \end{cases}, \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

• *On cherche ensuite les solutions réelles.*
D'après ce qui précède, les 3 fonctions vectorielles $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ définies par :

$$u_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v : t \mapsto \begin{pmatrix} 4e^{3it} \\ (-1+3i)e^{3it} \\ (-1-3i)e^{3it} \end{pmatrix}, \quad \overline{v} : t \mapsto \begin{pmatrix} 4e^{-3it} \\ (-1-3i)e^{-3it} \\ (-1+3i)e^{-3it} \end{pmatrix},$$

forment une base de l'espace vectoriel des solutions complexes de $(S)$.
On en déduit qu'une base de l'espace vectoriel des solutions réelles de $(S)$ est formée des 3 fonctions vectorielles $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ définies par : $u_0$, $w_1 = \frac{1}{2}(v + \overline{v})$, $w_2 = \frac{1}{2i}(v - \overline{v})$. En d'autres termes :

$$w_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 4\cos 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t \\ -\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}, \quad w_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 4\sin 3t \\ -\sin 3t + 3\cos 3t \\ -\sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

On conclut que les solutions réelles du système différentiel $(S)$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + 4\beta\cos 3t + 4\gamma\sin 3t \\ y(t) = 2\alpha + (-\beta+3\gamma)\cos 3t + (-3\beta-\gamma)\sin 3t \\ z(t) = 2\alpha + (-\beta-3\gamma)\cos 3t + (3\beta-\gamma)\sin 3t \end{cases}, \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

**d)** QUATRIÈME EXEMPLE (*cas triangularisable non diagonalisable*).
On cherche à déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ 5z'(t) = -6x(t) + 8y(t) \end{cases}.$$

On note matriciellement ce système sous la forme :

$$X'(t) = AX(t), \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \ X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule : $P_A(x) = -(x-1)^2(x+2)$.
$\lambda = -2$ est v.p. simple ; le sous-espace propre associé est la droite dirigée par $v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
$\lambda = 1$ est v.p. double ; le sous-espace propre associé est la droite dirigée par $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Donc $A$ n'est pas diagonalisable. On sait que si l'on complète la famille libre $(v_0, v_1)$ en une base en lui adjoignant un vecteur $v_2$, on a :

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & * \\ -4 & 1 & * \\ 5 & -2 & * \end{pmatrix}.$$

Il existe une raison théorique (méthode de Jordan, qui n'est pas au programme de ce cours) pour laquelle on peut toujours choisir $v_2$ de telle sorte que $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour l'instant, contentons-nous de vérifier par le calcul que si l'on choisit $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\mathscr{C} = (v_0, v_1, v_2)$ base de $\mathbb{R}^3$ et :

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \mathrm{Pass}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose : $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$ ; d'où : $U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t)$. Donc :

$(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow PU'(t) = APU(t) \Leftrightarrow U'(t) = P^{-1}APU(t) \Leftrightarrow U'(t) = TU(t)$.

On est ainsi ramené à résoudre le système (beaucoup plus simple) :

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} u'(t) = -2u(t) \\ v'(t) = v(t) + w(t) \\ w'(t) = w(t) \end{cases}.$$

D'après le cours d'analyse, on sait que les solutions des équations (1) et (3) sont $u(t) = \alpha e^{-2t}$ et $w(t) = \gamma e^t$ pour $\alpha, \gamma$ décrivant $\mathbb{R}$. La seconde équation devient $v'(t) = v(t) + \gamma e^t$, dont la solution générale est $v(t) = (\gamma t + \beta)e^t$.

En revenant à $X(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{-2t} \\ (\gamma t+\beta)e^t \\ \gamma e^t \end{pmatrix}$, on conclut que les solutions du système différentiel $(S)$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = 3\alpha e^{-2t} + (3\gamma t+3\beta-\gamma)e^t \\ y(t) = -4\alpha e^{-2t} + (\gamma t+\beta-2\gamma)e^t \\ z(t) = 5\alpha e^{-2t} + (-2\gamma t-2\beta)e^t \end{cases}, \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

### 4.3.4 Exercices

Exercice 1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On considère deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout $n \geq 0$, on ait : $u_{n+1} = -10u_n - 28v_n$ et $v_{n+1} = 6u_n + 16v_n$. En diagonalisant une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ adaptée, calculer les termes généraux $u_n$ et $v_n$ en fonction de $u_0$, $v_0$ et $n$.

Exercice 3. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites de réels définies par leurs premiers termes $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, $w_0 = 0$, et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = -4u_n - 6v_n, \quad v_{n+1} = 3u_n + 5v_n, \quad w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n.$$

– En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$. Diagonaliser $A$.

– Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.

– Montrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$ ; la formule donnant $A^n$ trouvée à la question précédente reste-t-elle valable pour les entiers $n < 0$ ?

Exercice 4. Déterminer les fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions des systèmes différentiels :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = -2y(t) \\ z'(t) = 5x(t) - 5y(t) - 2z(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = 9x(t) + 5y(t) + 5z(t) \\ y'(t) = -5x(t) - y(t) - 5z(t) \\ z'(t) = -5x(t) - 5y(t) - z(t) \end{cases}$$

Exercice 5. Soit $(E)$ la courbe du plan d'équation : $x^2 - xy + y^2 - \frac{1}{2} = 0$, par rapport à un repère orthonormé. En diagonalisant la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que $(E)$ est une ellipse centrée en l'origine.

Exercice 6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A_\alpha = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6\alpha+1 & 2\alpha-1 & -\sqrt{2}(2\alpha-1) \\ 2\alpha-1 & 6\alpha+1 & \sqrt{2}(2\alpha-1) \\ -\sqrt{2}(2\alpha-1) & \sqrt{2}(2\alpha-1) & 4\alpha+2 \end{pmatrix}.$$

On note $\phi_\alpha$ l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A_\alpha$.

– Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $A_1$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice de $\phi_\alpha$ dans la base $\mathscr{B}'$ est une matrice diagonale $D_\alpha$.

– En déduire, par un calcul simple, que $A_\alpha A_\beta = A_{2\alpha\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et que $A_{1/2} = I_3$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la matrice $A_\alpha$ est-elle inversible ?

– En déduire que l'ensemble $G = \{A_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ admettant $n$ valeurs propres distinctes.

– Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale $D$, et en déduire que la famille $\mathscr{B} = \{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$ est libre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

– On note $\mathscr{C}$ le centralisateur de $A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifient $AM = MA$. Montrer que, pour toute $M \in \mathscr{C}$, la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

– Déduire des questions précédentes que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont une base est $\mathscr{B}$.

# Chapitre 5

# Espaces vectoriels euclidiens

L'objectif de ce chapitre est d'introduire sur un espace vectoriel réel $E$ une structure algébrique complémentaire, celle de produit scalaire. Cette notion permet de disposer dans $E$ de la notion d'orthogonalité (entre vecteurs, entre sous-espaces...) et d'une forme de “longueur” ou de “distance” définie à partir de la norme associée au produit scalaire.

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ainsi muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien réel. De tels espaces en dimension infinie ont une grande importance en analyse fonctionnelle. Néanmoins, conformément au programme de ce cours, on se concentre dans ce chapitre sur le cas où $E$ est de dimension finie : on dit alors que $E$ est un espace vectoriel euclidien. On développe dans ce contexte l'étude des endomorphismes de $E$ qui préservent le produit scalaire, à la fois dans son aspect algébrique matriciel (où l'on retrouve des considérations du chapitre précédent sur la diagonalisation) et sur ses applications en géométrie concrète du plan ou de l'espace.

Dans tout ce chapitre, $E$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie.

## 5.1 Produit scalaire et norme euclidienne

### 5.1.1 Notion de produit scalaire

**a)** Définition. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* sur $E$ toute application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est bilinéaire, symétrique, définie positive.
Précisons le sens de ces expressions :
Dire que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est *bilinéaire* signifie qu'elle est linéaire par rapport à chacune des deux variables, c'est-à-dire que :

(i) $\langle \lambda x + \mu y \,|\, z \rangle = \lambda \langle x \,|\, z \rangle + \mu \langle y \,|\, z \rangle$ pour tous $x, y, z \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i') $\langle x \,|\, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x \,|\, y \rangle + \mu \langle x \,|\, z \rangle$ pour tous $x, y, z \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dire que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est *symétrique* signifie que :

(ii) $\langle x \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$.

Dire que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est *définie positive* signifie que :

(iii) $\langle x \,|\, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$,

(iv) quel que soit $x \in E$, $\big( \langle x \,|\, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0_E \big)$.

Comme il est clair que, si on a (ii), les conditions (i) et (i') sont équivalentes, on peut aussi bien dire qu'un produit scalaire est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv).

**b)** Exemples.

• Soit $E = \mathbb{R}^n$. On définit un produit scalaire sur $E$, dit produit scalaire *canonique*, en posant :

$$\langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{pour tous } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \ldots, y_n) \text{ dans } E.$$

• Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur $E$ en posant :

$$\langle A \,|\, B \rangle = \mathrm{trace}(A \times {}^t B) \quad \text{pour toutes } A, B \in E.$$

• Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur $E$ en posant :

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt \quad \text{pour toutes } f, g \in E.$$

**c)** Définitions. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est de dimension finie est appelé un *espace vectoriel euclidien.*

> C'est le cas des deux premiers exemples ci-dessus. Le troisième exemple n'en est pas un car il n'est pas de dimension finie (on parle alors simplement d'espace préhilbertien réel, mais on ne les étudiera pas dans ce cours).

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. On appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ l'application $\| \cdot \|$ de $E$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

**d)** Remarque. Il résulte immédiatement de cette définition et des propriétés du produit scalaire que, pour tout $x \in E$, on a :

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| \ \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \|x\| \geq 0, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

**e)** Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Dans tout espace vectoriel euclidien $E$, on a :*

$$\big|\, \langle x \,|\, y \rangle \,\big| \leq \|x\|\, \|y\| \qquad \textit{pour tous } x, y \in E,$$

*avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires.*

> *Preuve.* On fixe $x, y \in E$. La proposition étant trivialement vraie si $x$ ou $y$ est nul, on peut supposer dans la suite que $x$ et $y$ sont non-nuls. On pose alors $x' = \frac{1}{\|x\|} x$ et $y' = \frac{1}{\|y\|} y$ qui sont de norme 1. On calcule :
>
> $$\|x' + y'\|^2 = \langle x' + y' \,|\, x' + y' \rangle = \|x'\|^2 + 2\langle x' \,|\, y' \rangle + \|y'\|^2 = 2 + 2\langle x' \,|\, y' \rangle,$$
> $$\|x' - y'\|^2 = \langle x' - y' \,|\, x' - y' \rangle = \|x'\|^2 - 2\langle x' \,|\, y' \rangle + \|y'\|^2 = 2 - 2\langle x' \,|\, y' \rangle.$$
>
> Ces deux réels étant des carrés dans $\mathbb{R}$, ils sont positifs et donc : $-2 \leq 2\langle x' \,|\, y' \rangle \leq 2$, ou encore $|\, \langle x' \,|\, y' \rangle \,| \leq 1$. Cette inégalité peut se réécrire $|\, \langle \frac{1}{\|x\|} x \,|\, \frac{1}{\|y\|} y \rangle \,| \leq 1$, et finalement par bilinéarité : $|\, \langle x \,|\, y \rangle \,| \leq \|x\|\, \|y\|$.
>
> De plus, $|\, \langle x \,|\, y \rangle \,| = \|x\|\, \|y\|$ si et seulement si $|\, \langle x' \,|\, y' \rangle \,| = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\langle x' \,|\, y' \rangle = 1$ ou $\langle x' \,|\, y' \rangle = -1$. D'après les deux égalités ci-dessus, le premier cas équivaut à $\|x' - y'\| = 0$ et le second à $\|x' + y'\| = 0$. En résumé, $|\, \langle x \,|\, y \rangle \,| = \|x\|\, \|y\|$ si et seulement si $x' = y'$ ou $x' = -y'$, ce qui équivaut à la colinéarité des deux vecteurs $x$ et $y$. □

**f)** PROPOSITION (Inégalité triangulaire). *Dans tout espace vectoriel euclidien $E$, on a :*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \textit{pour tous } x, y \in E,$$

*avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires avec un facteur de colinéarité positif.*

*Preuve.* Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y \,|\, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x \,|\, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\,\langle x \,|\, y\rangle\,| + \|y\|^2,$$

d'où en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,$$

ce qui donne l'inégalité voulue. L'égalité se produit lorsque $\langle x \,|\, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, ce qui achève la preuve en appliquant le cas d'égalité de la proposition précédente. □

**g)** LEMME (identités de polarisation). *Dans tout espace vectoriel euclidien $E$, on a pour tous vecteurs $x, y \in E$ :*

$$\langle x \,|\, y\rangle = \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big).$$

*Preuve.* Evidente, laissée à titre d'exercice. □

**h)** REMARQUES. Les trois propriétés du d) ci-dessus et l'inégalité triangulaire f) se traduisent en disant que $\|\cdot\|$ satisfait les axiomes d'une norme sur $E$ (voir cours sur les evn au semestre suivant). On remarquera aussi que les preuves des propriétés d) à g) n'utilisent pas le fait que $E$ est de dimension finie, et restent donc vraies dans le cadre plus général d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ munis d'un produit scalaire sans hypothèse de dimension (espaces préhilbertiens réels).

### 5.1.2 Orthogonalité

**a)** DÉFINITIONS. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ sont dits *orthogonaux* lorsque leur produit scalaire est nul. On note alors $x \perp y$.

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \langle x \,|\, y\rangle = 0.$$

D'après la propriété (iv) de 5.1.1, le vecteur nul est le seul vecteur qui est orthogonal à lui-même :

$$x \perp x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E.$$

Deux parties $A$ et $B$ de $E$ sont dites *orthogonales* lorsque tout vecteur de $A$ est orthogonal à tout vecteur de $B$. On note alors $A \perp B$.

$$A \perp B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B,\ \langle x \,|\, y\rangle = 0.$$

Pour toute partie non vide $A$ de $E$, on appelle *orthogonal de $A$*, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs de $E$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de $A$. Il est facile de vérifier (le faire en exercice !) que c'est un sous-espace vectoriel de $E$.

$$A^\perp = \{x \in E\,;\ \forall\, y \in A,\ \langle x \,|\, y\rangle = 0\} \text{ sous-espace vectoriel de } E.$$

Il résulte immédiatement de cette définition que, pour deux parties non-vides $A$ et $B$ de $E$ :

$$\Big[A \perp B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B^\perp \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A^\perp\Big] \qquad \text{et} \qquad \Big[A \subseteq B \;\Rightarrow\; B^\perp \subseteq A^\perp\Big].$$

Enfin, on déduit aisément des propriétés (i) à (iv) de 5.1.1 (le faire en exercice !) que le vecteur nul $0_E$ est orthogonal à tous les vecteurs de $E$, et que c'est le seul à avoir cette propriété :

$$\{0_E\}^\perp = E \qquad \text{et} \qquad E^\perp = \{0_E\}.$$

On considère dans la suite l'orthogonal de parties de $E$ qui sont des sous-espaces vectoriels. L'orthogonal $F^\perp$ d'un tel sous-espace $F$ prend parfois le nom de *supplémentaire orthogonal de* $F$, ceci en raison du théorème fondamental suivant.

**b)** THÉORÈME. *Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ :*

$$F^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } E, \qquad E = F \oplus F^\perp \qquad \text{et} \qquad (F^\perp)^\perp = F.$$

*Preuve.* Le résultat étant clair si $F = \{0_E\}$ ou $F = E$, on suppose que $F$ est un sous-espace non-nul et distinct de $E$. Il est clair que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ (car on aurait sinon un élément non-nul de $F$ orthogonal à tous les éléments de $F$, donc à lui-même, ce qui est impossible).

Considérons une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F$. Construisons l'application $f : E \to \mathbb{R}^p$ qui, à tous vecteur $x$ de $E$ associe le $p$-uplet $f(x) = (\langle x \,|\, e_1\rangle, \langle x \,|\, e_2\rangle, \ldots, \langle x \,|\, e_p\rangle)$. D'après la propriété (i) de 5.1.1, $f$ est linéaire. Son noyau $\operatorname{Ker} f$ est formé des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x)$ est nul dans $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire tels que $\langle x \,|\, e_j\rangle = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$. En d'autres termes, un vecteur $x \in E$ est dans $\operatorname{Ker} f$ si et seulement s'il est orthogonal à tous les vecteurs de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de $F$, et donc finalement par linéarité à tout vecteur de $F$. On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} f = F^\perp$. En particulier, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$ (ce que l'on savait déjà).

Dès lors, en notant $n = \dim E$, on tire de la formule du rang $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$ que $\dim F^\perp = n - \dim \operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^p$, on a $\dim \operatorname{Im} f \leq p$, d'où $\dim F^\perp \geq n - p$.

Par ailleurs, $\dim(F+F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp = p + \dim F^\perp$. Comme évidemment $\dim(F+F^\perp) \leq n$, il vient $\dim F^\perp \leq n-p$. Finalement : $\dim F^\perp = n-p$. Ceci prouve que $E = F \oplus F^\perp$.

En appliquant ce qui précède à $F^\perp$ au lieu de $F$, on obtient $\dim(F^\perp)^\perp = n - \dim F^\perp = n-(n-p) = p$. Ainsi $\dim(F^\perp)^\perp = \dim F$. Comme il est clair (par définition de l'orthogonal) que $F \subseteq (F^\perp)^\perp$, on conclut à l'égalité. □

**c)** VOCABULAIRE. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel eucliden $E$.

On dit que la base $\mathscr{B}$ est une *base orthogonale* lorsque tous les vecteurs $e_i$ sont orthogonaux deux à deux (c'est-à-dire $\langle e_i \,|\, e_j\rangle = 0$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$).

On dit que la base $\mathscr{B}$ est une *base orthonormale* lorsque c'est une base orthogonale et que, de plus, tous les vecteurs $e_i$ sont de norme égale à 1 (c'est-à-dire $\langle e_i \,|\, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$).

Il est clair que, si on a une base orthogonale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, il suffit de définir $e'_j = \frac{1}{\|e_j\|} e_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$ pour obtenir une base orthonormale $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

**d)** THÉORÈME. *Dans tout espace vectoriel euclidien non-nul, il existe des bases orthonormales.*

*Preuve.* On raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de $E$.

Si $n = 1$, il suffit de choisir un vecteur non-nul quelconque $x$ de $E$ et de poser $e_1 = \frac{1}{\|x\|} x$ ; il est clair que $(e_1)$ est une base orthonormale de $E$.

Supposons la propriété vraie pour tous les espaces vectoriel euclidiens de dimension $n-1$ et considérons un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$. Choisissons un vecteur non-nul quelconque $x$ de $E$ et posons $e_n = \frac{1}{\|x\|} x$. Considérons la droite $F$ de base $(e_n)$. D'après le théorème précédent, on a $E = F \oplus F^\perp$, avec $\dim F^\perp = n-1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$, il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ de $F^\perp$. Il est clair que $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est alors une base orthonormale de $E$. □

**e)** Proposition (expression du produit scalaire dans une base orthonormale). *Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$, muni d'une base orthonormale $\mathscr{B}$.*

(i) *Pour tout $x \in E$ de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, on a :*

$$x_i = \langle x \mid e_i \rangle \quad \textit{pour tout } 1 \leq i \leq n, \quad \textit{et donc } x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i.$$

(ii) *Pour tous $x, y \in E$, de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, on a :*

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \textit{et} \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

*Preuve.* On a : $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ ; pour tout $1 \leq i \leq n$, on calcule $\langle x \mid e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mid e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j \mid e_i \rangle = x_i$ puisque $\langle e_j \mid e_i \rangle = 0$ si $j \neq i$ et $\langle e_i \mid e_i \rangle = 1$. Ce qui montre (i).

Pour (ii) on calcule : $\langle x \mid y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i \mid e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, d'où la première égalité ; la seconde en découle en prenant $x = y$. □

**f)** Remarque (*projection orthogonale et symétrie orthogonale*). Il résulte aussi du théorème b) que l'on peut appliquer les notions de projection et de symétrie vues en 4.1.2 du chapitre 4 dans le cas où la direction de projection (ou symétrie) est orthogonale au sous-espace sur lequel on projette (ou par rapport auquel on symétrise).

Plus précisément, si $F$ est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $E$, avec donc $E = F \oplus F^{\perp}$, on appelle *projection orthogonale* sur $F$ la projection sur $F$ parallèlement à $F^{\perp}$, et *symétrie orthogonale* par rapport à $F$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $F^{\perp}$.

Ainsi, tout vecteur $x \in E$ se décomposant de façon unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, la projection orthogonale $p$ sur $F$ et la symétrie orthogonale $s$ par rapport à $F$ sont respectivement définies par $p(x) = y$ et $s(x) = y - z$. On a :

$$p \circ p = p, \quad \operatorname{Im} p = F = E_1, \quad \operatorname{Ker} p = F^{\perp} = E_0,$$
$$s \circ s = \mathrm{id}_E, \quad \operatorname{Im} s = E, \quad \operatorname{Ker} s = \{0_E\}, \quad E_1 = F, \quad E_{-1} = F^{\perp}.$$

exemple : $\dim E = 2,\ \dim F = 1$

exemple : $\dim E = 3,\ \dim F = 2$

exemple : $\dim E = 3,\ \dim F = 1$

### 5.1.3 Représentation des formes linéaires

**a)** Rappels. Si $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les applications linéaires de $E$ dans $\mathbb{R}$ sont appelées les *formes linéaires* sur $\mathbb{R}$. Elles forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel que l'on note $E^*$ et que l'on appelle l'*espace dual* de $E$. Si $E$ est de dimension finie $n$, alors $E^*$ est de dimension finie $n$.

**b)** PROPOSITION. *Soit $E$ un espace vectoriel euclidien.*

(i) *Pour tout vecteur $a \in E$, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(x) = \langle a \,|\, x\rangle$ pour tout $x \in E$ est une forme linéaire sur $E$.*

(ii) *Réciproquement, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f = \varphi_a$.*

*Preuve.* Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques. Par bilinéarité du produit scalaire, on a : $\varphi_a(\lambda x + \mu y) = \langle a \,|\, \lambda x + \mu y = \lambda\langle a \,|\, x\rangle + \mu\langle a \,|\, y\rangle = \lambda\varphi_a(x) + \mu\varphi_a(y)$, ce qui montre que $\varphi_a$ est linéaire et prouve (i).

Pour (ii), considérons l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par $\Phi(a) = \varphi_a$ pour tout $a \in E$. Elle est linéaire : en effet, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a, b \in E$, on a pour tout $x \in E$ : $\varphi_{\lambda a+\mu b}(x) = \langle \lambda a + \mu b \,|\, x\rangle = \lambda\langle a \,|\, x\rangle + \mu\langle b \,|\, x\rangle = \lambda\varphi_a(x) + \mu\varphi_b(x)$, ce qui prouve bien que $\Phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\Phi(a) + \mu\Phi(b)$. Déterminons son noyau. Dire qu'un vecteur $a$ est dans $\operatorname{Ker}\Phi$ signifie que $\varphi_a = 0_{E^*}$, ce qui équivaut à dire que, pour tout $x \in E$, on a $\varphi_a(x) = 0$, c'est-à-dire $\langle a \,|\, x\rangle = 0$. Parce que $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est un produit scalaire, on sait que cela n'est possible (pour tout $x \in E$) que lorsque $a = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_E\}$. Donc l'application $\Phi : E \to E^*$ est injective. Comme $\dim E = \dim E^*$, cela équivaut à la bijectivité de $\Phi$. Donc, pour tout $f \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ telle que $f = \Phi(a)$, ce qui est l'assertion (ii) voulue. □

### 5.1.4 Familles orthogonales de polynômes

La plupart des applications des produits scalaires que l'on verra dans la suite de ce chapitre sont de nature géométrique. On insère néanmoins ici un type d'application de nature un peu différente, qu'il peut être utile de connaître, touchant à des espaces vectoriels de polynômes.

**a)** RAPPELS. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels en une indéterminée $x$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré *inférieur ou égal à $n$*. Comme tout élément $p$ de $\mathbb{R}_n[x]$ s'écrit de façon unique $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, il est clair que la famille $\mathscr{B} = (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. En particulier, on retient que $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Comment reconnaître qu'une famille donnée de $n+1$ polynômes est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ ? Une condition suffisante pratique et usuelle est la suivante :

*Si $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sont des polynômes tels que chaque $p_i$ soit de degré égal à $i$ (pour tout $0 \leq i \leq n$), alors la famille $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.*

*En effet :* il suffit pour le démontrer d'observer que la matrice de cette famille $\mathscr{C}$ par rapport à la base canonique $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale des coefficients tous non-nuls (ce sont les coefficients du terme de plus haut degré de chaque $p_i$). Il en résulte que cette matrice est inversible, ce qui équivaut à la propriété pour $\mathscr{C}$ d'être une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

**b)** LEMME. *Soit $n \geq 1$ un entier fixé. L'application $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ définie par : $\langle p \,|\, q\rangle = \int_{-1}^{+1} p(t)q(t)\,dt$ pour tous $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.*

*Preuve.* Analogue au troisième exemple du 5.1.1 ci-dessus ; le détail des calculs est laissé à titre d'exercice. □

Une question naturelle est alors de voir si la base canonique est une base orthogonale pour ce produit scalaire. Ce n'est pas le cas car un calcul simple montre que $\langle x^m \,|\, x^k\rangle = 0$ si $m+k$ est impair, mais $\frac{2}{m+k+1} \neq 0$ si $m+k$ est pair.

**c)** PROPOSITION. *Une base orthogonale de* $\mathbb{R}_n[x]$ *est donnée par la famille* $\mathscr{L} = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, *où, pour tout entier* $m \geq 0$, *on désigne par* $\ell_m$ *le polynôme de degré* $m$ *défini par :*

$$\ell_m(x) = \tfrac{d^m}{dx^m}[(x^2-1)^m].$$

*Preuve.* Il est clair que $\ell_m$ est de degré $m$ pour tout $m \geq 0$. Il résulte donc du rappel a) ci-dessus que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Par ailleurs, pour tout $0 \leq m \leq n$ et tout $0 \leq k \leq m-1$, on peut calculer $I_{k,m} := \langle \ell_m \,|\, x^k \rangle$ par intégration par parties :

$$I_{k,m} = \int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^m}{dx^m}[(x^2-1)^m]\,dx = \Big[x^k \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[(x^2-1)^m]\Big]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} kx^{k-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[(x^2-1)^m]\,dx$$

Or comme $\pm 1$ est zéro d'ordre $m$ de $(x^2-1)^m$, il est aussi zéro d'ordre $m-j$ de $\frac{d^j}{dx^j}[(x^2-1)^m]$ pour tout $j \leq m-1$. En particulier le polynôme $\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[(x^2-1)^m]$ s'annule en $+1$ et en $-1$, de sorte que l'expression précédente se réduit à

$$I_{k,m} = -k\int_{-1}^{+1} x^{k-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[(x^2-1)^m]\,dx.$$

En itérant, il vient de même :

$$I_{k,m} = +k(k-1)\int_{-1}^{+1} x^{k-2}\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}[(x^2-1)^m]\,dx,$$

et après $k$ itérations :

$$I_{k,m} = (-1)^k\,k!\int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}[(x^2-1)^m]\,dx = (-1)^k\,k!\Big[\frac{d^{m-k-1}}{dx^{m-k-1}}[(x^2-1)^m]\Big]_{-1}^{+1}.$$

Cette dernière expression est nulle par le même argument que celui utilisé précédemment ($\pm 1$ est zéro du polynôme $\frac{d^{m-k-1}}{dx^{m-k-1}}[(x^2-1)^m]$ car $m-k-1 \leq m-1$).

On a ainsi montré que $\langle \ell_m \,|\, x^k\rangle = 0$ pour tous $0 \leq k \leq m-1$, donc par bilinéarité $\langle \ell_m \,|\, \ell_k\rangle = 0$ pour tous $0 \leq k \leq m-1$, et finalement par symétrie $\langle \ell_m \,|\, \ell_k\rangle = 0$ pour tous $k \neq m$. $\square$

**d)** REMARQUES ET DÉFINITION. On peut évidemment rendre orthonormale la base orthogonale $\mathscr{L}$ en multpliant chaque polynôme $\ell_m$ par l'inverse de sa norme.

Le calcul (utilisant les intégrales de Wallis) permet d'observer que : $\|\ell_m\|^2 = \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{2m+1}$.

Ceci explique que l'on remplace souvent les polynômes $\ell_m$ par leurs multiples $L_m = \frac{1}{2^m\,m!}\ell_m$, qui restent évidemment deux à deux orthogonaux, mais vérifient plus simplement : $\|L_m\| = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}$.

Ces polynômes s'appelent les *polynômes de Legendre.* Les premiers termes sont :

$$L_0(x) = 1 \qquad L_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \qquad L_4(x) = \tfrac{35}{8}x^4 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}$$
$$L_1(x) = x \qquad L_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x \qquad L_5(x) = \tfrac{63}{8}x^5 - \tfrac{35}{4}x^3 + \tfrac{15}{8}x$$

Ils interviennent dans la résolution de certains types d'équations différentielles.

**e)** REMARQUE. Nous avons donné à titre d'illustration un exemple de famille orthogonale de polynômes, parmi les plus simples. D'autres familles classiques font l'objet de nombreux problèmes liant des questions d'algèbre et d'analyse : polynômes de Tchébychev, de Laguerre, d'Hermite,...

### 5.1.5 Quelques propriétés classiques (sous forme d'exercices)

Certaines propriétés importantes liées aux produits scalaires sont regroupées dans les exercices suivants. Elles doivent être considérées comme des résultats de cours à connaître.

▶ Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel euclidien $E$. Montrer que l'on peut construire une base *orthogonale* $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $E$ qui vérifie $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ pour tout $1 \leq p \leq n$.

Indication : considérer par récurrence les vecteurs $\varepsilon_i$ définis par :

$$\varepsilon_i = e_i - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \varepsilon_j \mid e_i \rangle}{\langle \varepsilon_j \mid \varepsilon_j \rangle} \varepsilon_j.$$

▶ Propriété de Pythagore. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Montrer que deux vecteurs $x$ et $y$ sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Montrer que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de $p$ vecteurs deux à deux orthogonaux, alors $\|\sum_{j=1}^{p} x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{p} \|x_j\|^2$.

▶ Equations d'hyperplan vectoriel et vecteur normal. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. On rappelle que, par définition, un hyperplan de $E$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$.

– Montrer que, si $H$ est un hyperplan de $E$, alors il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls (et non uniques) tels que $H$ est l'ensemble des vecteurs de $E$ dont les composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ vérifient la relation $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. On dit que cette relation est une équation de $H$ dans $\mathscr{B}$.

– Réciproquement montrer que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels non tous nuls, alors l'ensemble des vecteurs de $E$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$ vérifient $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ est un hyperplan vectoriel $H$.

– Avec les notations ci-dessus, montrer que $H^\perp$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur non-nul $a$ dont les composantes dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. On dit que $a$ est un vecteur normal à $H$.

– Soient $H$ et $H'$ deux hyperplans de $E$ d'équations respectives $\alpha_1 x_1 + \cdots + \cdots \alpha_n x_n = 0$ et $\alpha'_1 x_1 + \cdots + \cdots \alpha'_n x_n = 0$ dans une base orthonormale. Comment traduire sur les coefficients $\alpha_i$ et $\alpha'_i$ le fait que $H = H'$ ? que $H^\perp \subset H'$ ? Peut-on avoir $H \perp H'$ ?

– Que deviennent ces résultats dans les cas particulier où $\dim E = 2$ ? où $\dim E = 3$ ?

▶ Projection orthogonale et minimalisation de la distance. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Pour toute partie non-vide $A$ de $E$, et tout vecteur $x \in E$, on définit la distance entre $x$ et $A$ par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

– Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, et pour tout vecteur $x \in E$, on a $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ où $p$ désigne la projection orthogonale sur $F$ (en d'autres termes, la distance minimale entre $x$ et les vecteurs de $F$ est atteinte en l'unique vecteur $p(x)$).

– On suppose ici que $F$ est un hyperplan $H$, de vecteur normal $a$ de composantes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans une base orthonormale de $E$. Montrer que, pour tout vecteur $x \in E$, on a :

$$d(x, H) = \frac{|\langle x \mid a \rangle|}{\|a\|}.$$

Que devient cette égalité dans les cas particulier où $\dim E = 2$ ? où $\dim E = 3$ ?

▶ Réflexion échangeant deux vecteurs. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $E$. Montrer que, si $x$ et $x'$ sont deux vecteurs non-nuls distincts de même norme, alors il existe une unique réflexion qui les échange. (Indication : considérer l'hyperplan de vecteur normal $x - x'$).

### 5.1.6 Exercices

Exercice 1 (*sur la notion de produit scalaire et sa définition*). Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$ fixé, on considère l'application $\varphi_k : E \to \mathbb{R}$ qui, à tout couple de vecteurs $(u, v)$ avec $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, associe :

$$\varphi_k(u, v) = xx' + yy' + k(xy' + yx').$$

Montrer que $\varphi_k$ est une forme bilinéaire symétrique pour tout $k \in \mathbb{R}$. Est-ce que $\varphi_k$ est un produit scalaire si $k = 0$ ? si $k = 1$ ? si $k = 2$ ? si $k = \frac{1}{2}$ ? Déterminer pour quelles valeurs de $k$ la forme bilinéaire symétrique $\varphi_k$ est un produit scalaire.

Exercice 2 (*sur la notion de produit scalaire et sa définition*). Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, on considère l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ qui, à tout couple de vecteurs $(u, v)$ avec $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$, associe :

$$\varphi_a(u, v) = xx' + yy' + (a + 12)zz' - 3(xz' + zx') + 2(yz' + zy').$$

Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, avec ces notations : $\varphi_a(u, v) = (x, y, z)A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles $\varphi_a$ est un produit scalaire.

Exercice 3 (*sur l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel, et les projections et symétries orthogonales*). Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace euclidien $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}$.

a) On considère le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t)\,;\, x + y = 0 \text{ et } y + z + t = 0\}$.

Déterminer une base et/ou des équations de $F$ et de $F^\perp$. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur $F$ et de la symétrie orthogonale par rapport à $F$.

b) Mêmes questions si $F$ est le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les trois vecteurs $(1, 1, 2, -1)$, $(2, 3, -1, 0)$ et $(0, 2, 0, 1)$.

c) Mêmes questions si $F = \{(x, y, z, t)\,;\, x + y - z = 0\}$.

d) Mêmes questions dans $\mathbb{R}^5$ pour $F = \{(x, y, z, t, s)\,;\, x+y+z-t = 0 \text{ et } x-z-2t+3s = 0\}$.

Exercice 4 (*sur la méthode de Gram-Schmidt*). Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$e_1 = (1, 2, -1, -2), \quad e_2 = (2, 3, 0, -1), \quad e_3 = (5, -2, -5, -2), \quad e_4 = (8, 10, -10, 4).$$

En appliquant la méthode de Gram-Schmidt à ces vecteurs, construire une base orthonormale $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $E$. La famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est-elle une base de $E$ ?

Exercice 5 (*sur la notion de produit scalaire et la méthode de Gram-Schmidt* ). Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Pour tous de vecteurs $u, v$ avec $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ on pose :

$$\langle u \,|\, v\rangle = (x + y + z)(x' + y' + z') + (y + z)(y' + z') + zz'.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$ et déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, avec les notations ci-dessus, on ait : $\langle u \,|\, v\rangle = (x, y, z)A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

En appliquant la méthode de Gram-Schmidt à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E$, construire une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ qui est orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 6 (*sur les projections orthogonales et la méthode de Gram-Schmidt* ). Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 2), \quad u_2 = (1, 3, 1), \quad u_3 = (0, 12, 6).$$

Montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas orthonormale. En lui appliquant la méthode de Gram-Schmidt, en déduire une base ortonormale $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Soient $F$ la droite de base $u_1$ et $p$ la projection orthogonale sur $F$. Déterminer la matrice de $p$ dans la base $\mathscr{B}'$. Déterminer la matrice de $p$ dans la base canonique $\mathscr{B}$.

Exercice 7 (*sur la notion de produit scalaire et de base orthonormale*).

Montrer qu'en posant $\langle u \,|\, v\rangle = 2(xx' + yy' + zz') + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'$ pour tous $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$, on définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer une base de $E$ qui soit orthonormale pour ce produit scalaire.

Définir un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^3$ de telle sorte que les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ forment une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 8 (*produit scalaire sur des polynômes*). Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. On note $F = \mathbb{R}_1[x]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1 dans $E$. On pose pour tous $p, q \in E$ :

$$\langle p \,|\, q\rangle = \int_0^1 x^2 p(x)q(x)\, dx.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$. Déterminer une base orthonormale de $E$ et une base orthonormale de $F$ pour ce produit scalaire.

Déterminer pour quelles valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I_{a,b} = \int_0^1 x^2(x^2 + (1-a)x + (1-b))^2\, dx$ est minimale [*indication :* on pourra interpréter cette intégrale comme la distance entre un élément quelconque de $F$ et un élément fixé bien choisi de $E$].

Exercice 9 (*produit scalaire sur des polynômes*). Soit $E = \mathbb{R}_1[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 1. Pour $a, b, c$ fixés quelconques dans $\mathbb{R}$, on pose pour tous $p, q \in E$ :

$$\langle p \,|\, q\rangle = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)^2 p(x)q(x)\, dx.$$

Pour quelles valeurs de $a, b, c$ définit-on ainsi un produit scalaire sur $E$ ? Déterminer une base orthonormale de $E$ pour ce produit scalaire lorsque $a = c = 1$ et $b = 0$.

Exercice 10 (*produit scalaire sur des polynômes*). Soit $E = \mathbb{R}_1[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 1. Pour $a, b, c$ fixés quelconques dans $\mathbb{R}$, on pose pour tous $p, q \in E$ :

$$\langle p \,|\, q\rangle = \int_0^1 \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$. Déterminer une base orthonormale de $E$ pour ce produit scalaire.

Exercice 11 (*produit scalaire sur des polynômes*). Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n$ (avec $n \geq 1$ fixé). Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels *distincts* fixés. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $E$ en posant :

$$\langle p \,|\, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} p(a_i)q(a_i) \text{ pour tous } p, q \in E.$$

Exercice 12 (*produit scalaire sur des polynômes*). Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. On note $F = \mathbb{R}_1[x]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1 dans $E$. On pose pour tous $p, q \in E$ :

$$\langle p \,|\, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$. Déterminer à partir de la base canonique $(1, x)$ de $F$ une base orthonormale de $F$ pour ce produit scalaire.

b) Soit $r(x) = 3x^2 - 5x$. Déterminer $f(r) \in F$ où $f$ est la projection orthogonale sur $F$. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique $(1, x, x^2)$. Comparer avec la question a).

c) Déterminer les réels $a$ et $b$ pour obtenir la valeur minimale du réel :

$$(r - (ax + b))(0)^2 + (r - (ax + b))(1)^2 + (r - (ax + b))(2)^2.$$

## 5.2 Groupe orthogonal

### 5.2.1 Endomorphismes orthogonaux

On se place dans un espace vectoriel euclidien $E$. On note $n$ sa dimension.

**a)** Lemme fondamental. *Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\langle f(x) \,|\, f(y)\rangle = \langle x \,|\, y\rangle$ *pour tous* $x, y \in E$ *(on dit que $f$ conserve le produit scalaire) ;*

(ii) $\|f(x)\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in E$ *(on dit que $f$ conserve la norme euclidienne) ;*

(iii) *pour toute base orthonormale* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de $E$, la famille* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *est une base orthonormale de $f$ (on dit que $f$ transforme toute base orthonormale en une base orthonormale) ;*

(iv) *il existe une base orthonormale* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de $E$ telle que la famille* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *soit une base orthonormale de $f$.*

*Preuve.* Il est clair que (i) implique (ii), et, puisque $f(x+y) = f(x) + f(y)$, on a aussi que (ii) implique (i) d'après la première identité de polarisation vue au g) de 5.1.1.

Supposons que l'on a (i). On a en particulier $\|f(0_E)\| = \|0_E\|$, donc $\|f(0_E)\| = 0$, donc $f(0_E) = 0_E$. En d'autres termes $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Ainsi $f$ est injective, c'est-à-dire bijective puisque $f$ est un endomorphisme en dimension finie. Dès lors, considérons une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$. La famille $\mathscr{C} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de $E$ puisque $f$ est bijective. De plus, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $\langle f(e_i) \,|\, f(e_j)\rangle = \langle e_i \,|\, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, ce qui prouve que la base $\mathscr{C}$ est orthonormale. Ainsi (iii) est satisfaite. Il est trivial que (iii) implique (iv).

Supposons pour finir qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que la famille $\mathscr{C} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit une base orthonormale de $E$. Quels que soient $x, y$ dans $E$, de composantes respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, on a $\langle x \,|\, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ d'après la proposition e) de 5.1.2. Mais comme $f$ est linéaire, $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont aussi les composantes respectives de $f(x)$ et $f(y)$ dans la base $\mathscr{C}$. De sorte que $\sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle f(x) \,|\, f(y)\rangle$, ce qui prouve (i). □

**b)** Définition. On appelle *endomorphisme orthogonal* tout endomorphisme de $E$ satisfaisant l'une des conditions équivalentes du lemme précédent.

Comme on l'a vu dans la preuve, il résulte de la condition (ii) qu'un endomorphisme orthogonal est nécessairement injectif, donc bijectif (car $E$ est de dimension finie). On emploie aussi le mot d'*isométrie vectorielle* comme synonyme d'endomorphisme orthogonal.

**c)** Exemple. Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, la symétrie orthogonale $s$ par rapport à $F$ est un endomorphisme orthogonal.

*En effet.* Soit $x \in E$ quelconque, décomposé en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. On a $s(x) = y - z$, donc $\|s(x)\|^2 = \langle y - z \,|\, y - z\rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle y \,|\, z\rangle$. Mais $y \perp z$ donc cette expression se réduit à $\|y\|^2 + \|z\|^2$, qui est de même égale à $\langle y + z \,|\, y + z\rangle$. Ainsi $\|s(x)\| = \|x\|$.

**d)** Théorème et définition. *L'ensemble des endomorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien $E$ est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(E)$.

*On l'appelle le groupe orthogonal de $E$, noté* $\mathrm{O}(E)$.

*Preuve.* Rappelons d'abord que $\mathrm{GL}(E)$ désigne le groupe linéaire de $E$, c'est-à-dire le groupe (pour la loi $\circ$) des automorphismes de l'espace vectoriel $E$, c'est-à-dire des endomorphismes de $E$ qui sont bijectifs. On a donc bien $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$. Il est clair aussi que $\mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$.

Soient $f$ et $g$ deux éléments de $\mathrm{O}(E)$. Pour tout $x \in E$, on a $\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| = \|f(x)\| = \|x\|$ en appliquant d'abord le fait que $g$ conserve la norme, puis que $f$ conserve la norme. Ceci montre que $g \circ f \in \mathrm{O}(E)$. Donc $\mathrm{O}(E)$ est stable pour la loi $\circ$.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Notons $f^{-1}$ sa bijection réciproque. On a $\|x\| = \|f(f^{-1}(x))\|$ pour tout $x \in E$. Mais comme $f$ conserve la norme, $\|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\|$. Ainsi $\|x\| = \|f^{-1}(x)\|$. Ceci montre que $f^{-1} \in \mathrm{O}(E)$. Donc $\mathrm{O}(E)$ est stable par passage à la réciproque. □

### 5.2.2 Matrices orthogonales

**a)** Rappel (*transposition des matrices*). Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la transposée de $A$ est la matrice ${}^tA \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de $A$ :

$$\text{si} \quad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}, \quad \text{alors} \quad {}^tA = (a_{ji})_{1 \le i,j \le n}.$$

Pour toutes $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA, \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA, \quad {}^t({}^tA) = A.$$

**b)** Définition. On appelle *matrice orthogonale* d'ordre $n$ toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A\,{}^tA = {}^tAA = I_n.$$

Une matrice orthogonale et donc nécessairement inversible et vérifie $A^{-1} = {}^tA$.

**c)** Théorème. *L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre $n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.*

*Preuve.* Rappelons d'abord que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices carrées inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc bien $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Il est clair aussi que $I_n \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. On a : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, ce qui montre que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est stable par produit. De plus, ${}^t(A^{-1}) = {}^t({}^tA) = A = (A^{-1})^{-1}$. Donc $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse, ce qui achève la preuve. □

Le fait que l'on utilise la même terminologie et des notations voisines pour désigner à la fois les endomorphismes orthogonaux de $E$ et les matrices orthogonales d'ordre $n$ est justifié par le théorème suivant.

**d)** Théorème. *Pour tout endomorphisme $f$ d'un espace vectoriel euclidien $E$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ ;*
2. *pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de $E$, la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale ;*
3. *il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ soit une matrice orthogonale.*

*Preuve.* Soit $f$ un endomorphisme de $E$, et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de $f$ dans une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$.

Par définition de $A$, on a $f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k$ pour tout $1 \le i \le n$. Donc pour $1 \le i,j \le n$, on calcule :

$$\langle f(e_i)\,|\,f(e_j)\rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{ki}e_k \,|\, \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j}e_\ell\rangle = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_{ki}a_{\ell j}\langle e_k\,|\,e_\ell\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}.$$

La famille $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une base orthonormale si seulement si $\langle f(e_i)\,|\,f(e_j)\rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i,j \leq n$, c'est-à-dire si et seulement $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i,j \leq n$, égalités entre coefficients qui traduisent exactement l'égalité matricielle ${}^tAA = I_n$. □

**e)** Corollaire. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$. L'application qui, à tout endomorphisme de $E$, associe sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ définit un isomorphisme de groupes de* $\mathrm{O}(E)$ *sur* $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

*Preuve.* Considérons l'application $\Phi$ qui, à tout endomorphisme $f$ de $E$ associe sa matrice $A = \Phi(f)$ par rapport à la base $\mathscr{B}$. On sait déjà que $f$ est bijective si et seulement si $A$ est inversible, et donc $\Phi$ définit une application du groupe $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de $E$ dans le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n$ inversibles. On sait aussi que, si $g$ est un autre automorphisme de $E$ de matrice $B$ dans la base $\mathscr{B}$, alors la matrice de $g\circ f$ est $BA$. En d'autres termes, $\Phi(g\circ f) = \Phi(g)\Phi(f)$ pour tous $f,g \in \mathrm{GL}(E)$, ce qui s'exprime en disant que $\Phi$ détermine un isomorphisme de groupe de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Le théorème ci-dessus prouve de plus que $f \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $\Phi(f) \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, et donc la restriction de $\Phi$ au sous-groupe $\mathrm{O}(E)$ détermine un isomorphisme de groupes de $\mathrm{O}(E)$ sur $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. □

### 5.2.3 Orientation et produit mixte

**a)** Théorème. *Soit $n$ un entier $\geq 1$ fixé. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$.*

(i) *Si $A$ est une matrice orthogonale, alors son déterminant vaut $+1$ ou $-1$. L'ensemble des matrices orthogonales dont le déterminant vaut $+1$ est un sous-groupe de* $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ *appelé sous-groupe spécial orthogonal, noté* $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$.

(ii) *Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$, alors son déterminant vaut $+1$ ou $-1$. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux dont le déterminant vaut $+1$ est un sous-groupe de* $\mathrm{O}(E)$ *appelé le sous-groupe spécial orthogonal de $E$, noté* $\mathrm{SO}(E)$.

(iii) *L'application qui, à tout endomorphisme de $E$, associe sa matrice dans une base orthonormale définit un isomorphisme de groupes de* $\mathrm{SO}(E)$ *sur* $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$.

*Preuve.* Si $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, on a ${}^tAA = I_n$, donc $\det({}^tAA) = 1$, c'est-à-dire $\det({}^tA)\det A = 1$. Mais $\det({}^tA) = \det A$, d'où $(\det A)^2 = 1$ et finalement $\det A = \pm 1$. Il est clair que $I_n$ est de déterminant $+1$, que le produit de deux matrices de déterminant $+1$ est de déterminant $+1$, et que l'inverse d'une matrice de déterminant $+1$ est de déterminant $+1$ ; on conclut que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe (c'est le noyau du morphisme de groupe $\det : \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$.

Le point (i) étant ainsi montré, le (ii) en découle de façon immédiate avec le théorème d) de 5.2.2 puisque $\det f = \det A$ où $A = \Phi(f)$, et (iii) résulte alors du corollaire e) de 5.2.2. □

**b)** Remarques. On a par définition $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}(E) \cap \mathrm{SL}(E)$. Le groupe $\mathrm{SO}(E)$ est parfois noté $\mathrm{O}^+(E)$, et ses éléments sont parfois appelés *isométries vectorielles directes*, ou *isométries vectorielles positives.*

En notant $\mathrm{O}^-(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux dans $O(E)$ qui sont de déterminant $-1$ (que l'on appelle parfois *isométries vectorielles indirectes* ou *isométries vectorielles négatives*) on a : $\mathrm{O}(E) = \mathrm{O}^+(E) \cup \mathrm{O}^-(E)$, mais attention, $\mathrm{O}^-(E)$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ !

**c)** Proposition (exemple fondamental des symétries orthogonales). *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $p$ dans un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$. Soit $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $F$. Alors :*

$$s \in \mathrm{O}(E), \qquad \det s = (-1)^{n-p}, \qquad s \in \mathrm{SO}(E) \Leftrightarrow (n-p \textit{ est pair}).$$

*Preuve.* Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de $F$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, il existe une base orthonormale $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $F^\perp$ telle que $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $E$. On a $s(e_i) = e_i$ pour tous les $1 \leq i \leq p$ et $s(e_j) = -e_j$ pour tous les $p+1 \leq j \leq n$. La matrice $A$ de $s$ dans la base $\mathscr{B}$ est donc diagonale, avec $p$ termes diagonaux égaux à 1 et $n-p$ termes diagonaux égaux à $-1$. Il en résulte d'une part que ${}^tAA = I_n$, et d'autre part que $\det A = (-1)^{n-p}$, ce qui montre les résultats voulus. □

Ainsi, si $E$ est de dimension 2, toute symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle est une isométrie indirecte. Si $E$ est de dimension 3, toute symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel est une isométrie indirecte, mais toute symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle est une isométrie directe. D'une façon générale, si $E$ est de dimension $n$, toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel est une isométrie indirecte.

**d)** Remarques et définitions (*orientation*). Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales de $E$. On sait qu'il existe un unique automorphisme $f \in \mathrm{GL}(E)$ qui transforme $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$. Parce que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont des bases orthonormales, il résulte du lemme a) de 5.2.1 que l'on a nécessairement $f \in \mathrm{O}(E)$. On peut alors définir :

> Deux bases orthonormales $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont dites *de même orientation* lorsque l'unique isométrie vectorielle $f \in O(E)$ qui transforme $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$ est une isométrie directe [c'est-à-dire $f \in \mathrm{O}^+(E)$].
>
> Sinon [c'est-à-dire $f \in \mathrm{O}^-(E)$], on dira que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont d'orientations opposées.

*Orienter l'espace vectoriel euclidien $E$* consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de référence $\mathscr{B}$ ; toute base orthonormale $\mathscr{B}'$ ayant la même orientation que $\mathscr{B}$ sera dite *directe*, toute base orthonormale $\mathscr{B}'$ ayant l'orientation opposée à celle de $\mathscr{B}$ sera dite *indirecte*.

Il résulte immédiatement de ces définitions que :

- Deux bases orthonormales sont de même orientation si et seulement si la matrice de passage de l'une à l'autre est de déterminant $+1$.
- Une isométrie est directe si et seulement si elle conserve l'orientation (ie. elle transforme toute base orthonormale directe en une base orthonormale directe).

orientation canonique en dimension 2

orientation canonique en dimension 3

**e)** Proposition et définition (*produit mixte*). *Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n$. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des vecteurs de $E$. Pour toute base orthonormale directe $\mathscr{B}$ de $E$, le réel*

$$[u_1, u_2, \ldots, u_n] := \det \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

*est indépendant de la base orthonormale $\mathscr{B}$ choisie. On l'appelle le produit mixte des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

*Preuve.* Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales directes de $E$. La matrice de passage $P$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est donc orthogonale, et directe ($\det P = 1$). Soit $X = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$ ; notons $M$ la matrice de la famille $X$ dans la base $\mathscr{B}$, et $M'$ sa matrice dans la base $\mathscr{B}'$. Alors $M = PM'$, d'où $\det M = \det P \det M' = \det M'$. □

**f)** Proposition et définition (*produit vectoriel en dimension 3*). *Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Quels que soient deux vecteurs $u$ et $v$ de $E$, il existe un unique vecteur, noté $u \wedge v$ et appelé le produit vectoriel de $u$ par $v$, tel que :*

$$[u, v, w] = \langle u \wedge v \,|\, w \rangle \qquad \textit{pour tout } w \in E.$$

*Preuve.* Fixons $u, v \in E$ quelconques. Il est clair, parce que le déterminant est linéaire par rapport à sa troisième variable, que l'application $f : w \mapsto [u, v, w]$ définit une application $E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire. En d'autres termes, $f$ est une forme linéaire. En appliquant la proposition b) de 5.1.3, il existe donc un unique vecteur $a \in E$ tel que $f = \varphi_a$, c'est-à-dire tel que $\langle a \,|\, w \rangle = [u, v, w]$ pour tout $w \in E$. Ce vecteur unique $a$ dépend bien sûr des vecteurs $u$ et $v$ de départ, et l'on note donc $a = u \wedge v$. □

On trouvera ci-dessous à l'exercice 7 des propriétés classiques du produit vectoriel.

### 5.2.4 Exercices.

Exercice 1 (*un résultat souvent utile*). Soient $E$ un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, on a $f(F)^\perp = f(F^\perp)$, en déduire qu'en particulier, si $F$ est un sous-espace vectoriel stable par $f$, alors $F^\perp$ aussi.

Exercice 2 (*valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal*). Soient $E$ un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que les sous-espaces $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $E_{-1} = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux. Montrer que les seules v.p. réelles possibles pour $f$ sont 1 et $-1$.

Exercice 3 (*caractérisations des symétries orthogonales*). Soient $E$ un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est une symétrie orthogonale ; (ii) $f \circ f = \mathrm{id}_E$ ; (iii) $f$ est diagonalisable.

Exercice 4 (*un exemple concret en dimension 3*). Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormale $\mathscr{B}$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $f$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace que l'on déterminera.

Exercice 5 (*un exemple concret en dimension 3*). Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormale $\mathscr{B}$. Pour tous réels $a, b, c$, on considère l'endomorphisme $f_{a,b,c}$ de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de $a, b, c$ pour lesquelles $f_{a,b,c} \in \mathrm{O(E)}$. On suppose désormais que $f_{a,b,c} \in \mathrm{O(E)}$. Déterminer les valeurs propres réelles de $f_{a,b,c}$ et les sous-espaces propres associés. Est-ce que $f_{a,b,c}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?

Exercice 6 (*un exemple concret en dimension 3*). Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormale $\mathscr{B}$. Pour tout couple de réel $a, b$, on considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+b & -4a & 0 \\ -4a & -3a+b & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ pour lesquelles $f_{a,b} \in \mathrm{GL}(E)$. Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ pour lesquelles $f_{a,b} \in \mathrm{O(E)}$. Si $a = \frac{1}{5}$ et $b = 0$, montrer que $f_{1/5,0}$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ que l'on déterminera.

Exercice 7. (*produit vectoriel en dimension 3*). Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

– En utilisant les propriétés du déterminant, montrer que, pour tous $u, v, w \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$u \wedge u = 0_E, \quad v \wedge u = -u \wedge v, \quad (\alpha u + \beta v) \wedge w = au \wedge w + \beta v \wedge w.$$

$u \perp (u \wedge v)$ et $v \perp (u \wedge v)$.

$u$ et $v$ colinéaires si et seulement si $u \wedge v = 0_E$.

si $u$ et $v$ non colinéaires, $(u, v, u \wedge v)$ est libre.

– Montrer que, si $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$ sont les composantes respectives de deux vecteurs $u, v \in E$ dans une base orthonormale directe, alors les composantes dans cette même base de $u \wedge v$ sont : $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

– Montrer que, si $(u, v)$ est une famille orthonormale de deux vecteurs de $E$, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormale directe de $E$.

– Montrer que, quels que soient $u, v, w \in E$, on a : $u \wedge (v \wedge w) = \langle u \mid w \rangle v - \langle u \mid v \rangle w$.

Exercice 8 (*matrices de permutation*). On fixe un entier $n \geq 2$, et on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Pour toute permutation $\sigma$ dans le groupe symétrique $S_n$, on désigne par $f_\sigma$ l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformant un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $f_\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. On note $M_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de $f_\sigma$ par rapport à la base canonique.

Montrer que $f_\sigma$ appartient au groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$. Montrer qu'il existe une valeur propre réelle commune à tous $f_\sigma$, pour $\sigma$ décrivant $S_n$. Montrer qu'il existe un hyperplan $H$ de $\mathbb{R}^n$ stable par $f_\sigma$ pour tout $\sigma \in S_n$.

Exercice 9 (*matrices de Householder et symétries orthogonales*). On fixe un entier $n \geq 2$, et on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur non-nul $u$ de $\mathbb{R}^n$, on note $U$ la matrice colonne des composantes de $u$ dans la base $\mathscr{B}$ et on introduit l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice par rapport à $\mathscr{B}$ est : $H_u = I_n - \frac{2}{\|u\|^2} U^t U$.

Montrer que la matrice $H_u$ est symétrique et orthogonale. Montrer que $h_u$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}u)^\perp$.

## 5.3 Endomorphismes symétriques

### 5.3.1 Transposition

On se place dans un espace vectoriel euclidien $E$.

**a)** Lemme. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$. Une base $\mathscr{B}'$ de $E$ est orthonormale si et seulement la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est une matrice orthogonale. En particulier, toute matrice de passage entre deux bases orthonormales de $E$ est une matrice orthogonale.*

*Preuve.* La matrice de passage $P$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ donne en colonnes les composantes des vecteurs de $\mathscr{B}'$ quand on les exprime dans la base $\mathscr{B}$. En d'autres termes, c'est aussi la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme $f$ de $E$ qui envoie la base $\mathscr{B}$ sur la base $\mathscr{B}'$. Le lemme résulte donc de l'application immédiate du théorème d) de 5.2.2. □

**b)** Corollaire. *Soit $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ une matrice orthogonale. La famille des vecteurs colonnes de $A$ constitue une base orthonormale de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.*

*Preuve.* Evident. □

**c)** Proposition et définition. *Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, il existe un unique endomorphisme de $E$, noté ${}^t f$, appelé le transposé de $f$, vérifiant :*

$$\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, {}^t f(y) \,\rangle \qquad \textit{pour tous } x, y \in E.$$

*Pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de $E$, la matrice de ${}^t f$ dans la base $\mathscr{B}$ est la transposée de la matrice de $f$ dans cette même base $\mathscr{B}$ :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}({}^t f) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f),$$

*et l'on a : ${}^t({}^t f) = f$.*

*Preuve.* Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$. Soient $f$ un endomorphisme de $E$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$. Appelons $g$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^t A = (a_{ji})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Prenons deux vecteurs quelconques $x$ et $y$ de $E$. Notons $X$ et $Y$ les matrices colonnes de leurs composantes respectives dans la base $\mathscr{B}$. Notons $X'$ et $Y'$ les matrices colonnes des composantes respectives des vecteurs $f(x)$ et $g(y)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Parce que $\mathscr{B}$ est orthonormale, l'expression du produit scalaire donne $\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = {}^t X' Y$. Comme $X' = AX$ et $Y' = {}^t A Y$, on en déduit que :

$$\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = {}^t(AX)Y = {}^t X {}^t A\, Y = {}^t X\, Y' = \langle\, x \,|\, g(y) \,\rangle.$$

L'endomorphisme $g$ choisi est donc une solution du problème considéré ; les mêmes calculs montrent que c'est l'unique solution, et l'on peut donc poser $g = {}^t f$.

Enfin, si $\mathscr{B}'$ est une autre base orthonormale, et si l'on note $A'$ la matrice de $f$ dans cette nouvelle base $\mathscr{B}'$, on sait que $A' = P^{-1}AP$ où $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Comme on l'a vu au lemme a) ci-dessus, on a ${}^t P = P^{-1}$. La matrice $A''$ de l'endomorphisme ${}^t f$ dans la base $\mathscr{B}'$ est de même $A'' = P^{-1}({}^t A)P$. On a $A'' = ({}^t P)({}^t A){}^t(P^{-1}) = {}^t(P^{-1}AP) = {}^t A'$, ce qui achève la preuve. □

Il est facile de vérifier (le faire en exercice) que ${}^t({}^t f) = f$ pour tout endomorphisme $f$ de $E$.

### 5.3.2 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

On se place dans un espace vectoriel euclidien $E$. On note $n$ sa dimension.

**a)** Définition. Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit *symétrique* lorsque ${}^tf = f$ dans $\operatorname{End} E$, ce qui est équivalent à :

$$\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, f(y) \,\rangle \qquad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Une matrice $A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* lorsque $A = {}^tA$.

Il est clair d'après la proposition c) de 5.3.1 que $f$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de $E$ est une matrice symétrique.

**b)** Exemples. Les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques.

*En effet.* Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, $p$ la projection orthogonale sur $F$ et $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $F$. Soient $x, y$ deux vecteurs quelconques de $E$, décomposés en $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$ avec $x', y' \in F$ et $x'', y'' \in F^\perp$.

$\langle p(x) \,|\, y\rangle = \langle x' \,|\, y' + y''\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle + \langle x' \,|\, y''\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle$,

$\langle x \,|\, p(y)\rangle = \langle x' + x'' \,|\, y'\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle + \langle x'' \,|\, y'\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle$.

$\langle s(x) \,|\, y\rangle = \langle x' - x'' \,|\, y' + y''\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle - \langle x'' \,|\, y'\rangle + \langle x' \,|\, y''\rangle - \langle x'' \,|\, y''\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle - \langle x'' \,|\, y''\rangle$,

$\langle x \,|\, s(y)\rangle = \langle x' + x'' \,|\, y' - y''\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle + \langle x'' \,|\, y'\rangle - \langle x' \,|\, y''\rangle - \langle x'' \,|\, y''\rangle = \langle x' \,|\, y'\rangle - \langle x'' \,|\, y''\rangle$,

ce qui montre bien que $p$ et $s$ sont symétriques.

Mais on a mieux : on a vu à l'exemple c) de 4.1.2 que $p$ et $s$ sont diagonalisables. Dans le cas de $p$, on a $E = E_0 \oplus E_1$ avec $E_0 = \operatorname{Ker} p = F^\perp$ et $E_1 = \operatorname{Im} p = F$. Dans le cas de $s$, on a $E = E_{-1} \oplus E_1$ avec $E_{-1} = F^\perp$ et $E_1 = F$. Dans les deux cas, les sous-espaces propres sont donc orthogonaux !

Cette dernière observation est un cas particulier du théorème suivant, qui est l'un des plus important de la théorie. On établit d'abord quelques résultats intermédiaires.

**c)** Lemme. *Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux valeurs propres réelles distinctes d'un endomorphisme symétrique, alors les sous-espaces propres associés $E_\lambda$ et $E_\mu$ sont orthogonaux.*

*Preuve.* Soit $f$ un endomorphisme symétrique de $E$. Supposons que $\lambda$ et $\mu$ sont deux v.p. distinctes de $f$. Soient $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$. Donc $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$. L'hypothèse $f$ symétrique se traduit par $\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, f(y) \,\rangle$, donc $\langle\, \lambda x \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, \mu y \,\rangle$, ou encore $\lambda\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \mu\langle\, x \,|\, y \,\rangle$. Comme $\lambda \neq \mu$, on déduit que $\langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0$, c'est-à-dire $x \perp y$. □

**d)** Lemme. *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique se décompose complètement dans $\mathbb{R}$ en produit de polynômes de degré 1.*

*Preuve.* Notons $\dim E = n$. Soient $f$ un endomorphisme symétrique de $E$, et $A$ sa matrice dans une base orthonormale de $E$. En particulier $A$ est une matrice symétrique dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $P_f = P_A$ le polynôme caractéristique de $f$ ou $A$. C'est un polynôme à coefficients réels, et on peut donc le considérer aussi comme polynôme à coefficients complexes. A ce titre, on sait que, dans $\mathbb{C}[x]$, il se décompose sous la forme $P_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n)$ avec les $\lambda_i$ dans $\mathbb{C}$ (pas forcément deux à deux distincts). Notre but est de montrer que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

La matrice $A$ peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme $g$ de $\mathbb{C}^n$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Prenons l'un des $\lambda_i$ en le notant simplement $\lambda$ ; c'est un zéro dans $\mathbb{C}$ de $P_A$, donc une v.p. de $g$, et l'on peut considérer un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à la v.p. $\lambda$. On a $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ et $g(x) = \lambda x$. Notons $X$ la matrice colonne des composantes de $x$ dans la base $\mathscr{B}$, de sorte que : $AX = \lambda X$. En prenant les conjugués de tous les coefficients dans cette égalité, on a $\overline{A}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. Mais $\overline{A} = A$ puisque $A$ est à coefficients réels. Donc $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. Si l'on écrit en ligne cette égalité de colonnes (en transposant), on obtient ${}^t\overline{X}{}^tA = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}$, c'est-à-dire ${}^t\overline{X}A = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$, puisque $A$ est symétrique.

En combinant les égalités $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X} = {}^t\overline{X}A$ et $AX = \lambda X$, on obtient $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}\,X = {}^t\overline{X}AX = \lambda\,{}^t\overline{X}\,X$. Or ${}^t\overline{X}\,X$ est un réel strictement positif (c'est la somme des carrés des modules des composantes dans $\mathbb{C}$ du vecteur non-nul $x$). On conclut que $\overline{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$. □

**e)** Théorème fondamental. *Tout endomorphisme <u>symétrique</u> $f$ d'un espace vectoriel euclidien $E$ est diagonalisable. Plus précisément, il existe des bases <u>orthogonales</u> de $E$ constituées de vecteurs propres de $f$.*

*Preuve.* On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Prenons $n \geq 2$, supposons par hypothèse de récurrence le résultat vrai pour tout espace vectoriel euclidien de dimension $n-1$, et considérons un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$. Soit $f$ un endomorphisme symétrique de $E$. D'après le lemme d), il admet des v.p. réelles ; soit $\lambda$ l'une d'elle. Considérons $u_n$ un vecteur propre associé à $\lambda$. Quitte à multiplier $u_n$ par le réel $\|u_n\|^{-1}$, on peut sans restriction choisir $u_n$ de norme 1. Soit $H$ l'hyperplan vectoriel orthogonal à la droite vectorielle $F = \mathbb{R}u_n$ engendrée par $u_n$ (voir exercice 3 de 5.1.5). Pour tout $x \in H$, on a : $\langle f(x) \,|\, u_n\rangle = \langle x \,|\, f(u_n)\rangle$ puisque $f$ est symétrique, d'où en utilisant le fait que $f(u_n) = \lambda u_n$ l'on déduit que : $\langle f(x) \,|\, u_n\rangle = \langle x \,|\, \lambda u_n\rangle = \lambda\langle x \,|\, u_n\rangle = 0$. Ceci prouve que pour tout $x \in H$, le vecteur $f(x)$ est orthogonal à $u_n$ donc appartient à $H$ ; en d'autres termes $H$ est stable par $f$. Donc la restriction de $f$ à $H$ détermine un endomorphisme $f'$ de $H$, qui reste bien sûr symétrique. Par hypothèse de récurrence appliquée à $f'$, il existe une base orthonormale $\mathscr{B}' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ de $H$ constituée de vecteurs propres de $f'$ donc de $f$. En adjoignant $u_n$, on obtient une famille $\mathscr{B}' = (u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ constituée de vecteurs propres de $f$ qui est une base orthonormale de $E$ (car $F \oplus H = E$ avec $F \perp H$). □

**f)** Corollaire fondamental. *Toute matrice <u>symétrique</u> $A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Plus précisément, il existe une matrice diagonale $D$ à coefficients réels et une matrice <u>orthogonale</u> $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.*

*Preuve.* Soit $A$ une matrice symétrique dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) telle que $A$ soit la matrice de $f$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ (qui est bien sûr orthonormale). Comme on l'a vu à la définition a), $f$ est un endomorphisme symétrique. En appliquant le théorème e) ci-dessus, il existe une base orthonormale $\mathscr{B}'$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$ soit une matrice diagonale $D$. On a donc $A = PDP^{-1}$ où $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Il résulte enfin du lemme a) de 5.3.1 que $P$ est orthogonale, ce qui achève la preuve. □

### 5.3.3 Exercices

Exercice 1. Montrer que le sous-ensemble $\mathscr{S}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En définissant une matrice antisymétrique comme une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$, montrer que le sous-ensemble $\mathscr{A}$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S} \oplus \mathscr{A}$. Déterminer les dimensions respectives $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$.

Exercice 2. Soit $E$ un espace euclidien. Soit $u$ un endomorphisme de $E$.

– Montrer que $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} {}^t u)^\perp$ et $\operatorname{Ker} {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$. En déduire que, si $u$ est symétrique, le noyau et l'image de $u$ sont supplémentaires et orthogonaux.

– Montrer que si $u$ est symétrique et $u(x) \perp x$ pour tout $x \in E$, alors $u$ est nul.

– On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel $M$ de $E$ tel que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in M$, et $u(x) = 0_E$ pour tout $x \in M^\perp$. Montrer que $\operatorname{Ker} u = M^\perp$.

Exercice 3 (*exemples de diagonalisation de matrices symétriques*). Reprendre l'exemple b) du paragraphe 4.1.5 et vérifier que les sous-espaces propres sont orthogonaux (ou encore que la matrice de passage est orthogonale).

Faire de même pour les matrices $B, C, E$ de l'exercice 1 de 4.2.4, et pour la matrice $A$ de l'exercice 2. Faire de même pour les matrices $A_\alpha$ de l'exercice 6 de 4.3.4.

Exercice 4 (*exemple de diagonalisation d'une matrice symétrique*). On considère dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme $u$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

– Montrer que $u$ est diagonalisable de quatre façons différentes : (1) sans aucun calcul ; (2) en calculant le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres ; (3) en utilisant le théorème du rang ; (4) en calculant $A^2$.

– Déterminer une base orthonormale de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.

Exercice 5 (*exemple de diagonalisation d'une matrice symétrique*). On considère dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ l'endomorphisme $u$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & dc \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b, c, d \text{ sont des réels non tous nuls.}$$

Montrer que $u$ est symétrique. Montrer que 0 est valeur propre triple de $u$ et déterminer le sous-espace propre associé. Soit $\lambda$ l'autre valeur propre de $u$ ; déterminer le sous-espace propre associé, et calculer $\lambda$.

## 5.4 Applications géométriques

### 5.4.1 Description des isométries vectorielles en dimension 2

On fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $E$ de dimension 2. On va ci-dessous décrire explicitement le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$, c'est-à-dire tous les endomorphismes orthogonaux de $E$. Conformément à l'usage le plus répandu en géométrie, on dira ici "isométrie vectorielle" plutôt que "endomorphisme orthogonal" (rappelons que les deux termes sont strictement synonymes).

**a)** Réflexion. Soit $D$ est une droite vectorielle dans $E$ ; rappelons que la symétrie orthogonale par rapport à $D$ est l'application $s_D : E \to E$ qui, à tout vecteur $u \in E$ décomposé de façon unique en $v + w$ avec $v \in D$ et $w \in D^\perp$, associe $s_D(u) = v - w$. Une telle symétrie orthogonale par rapport à une droite $D$ est appelée *réflexion d'axe $D$* (voir aussi exercice 5 de 5.1.5). Au vu des propriétés démontrées précédemment sur les symétries, on a :

Réflexion

Proposition. *Toute réflexion vectorielle est une isométrie vectorielle. La bijection réciproque de la réflexion $s_D$ est $s_D^{-1} = s_D$. L'ensemble $E_1$ des vecteurs fixés par $s_D$ est égal à la droite $D$.*

**b)** Rotation. On appelle *rotation* vectorielle de $E$ toute composée de deux réflexions vectorielles.

Rotation

Une rotation $r$ est donc de la forme $r = s_D \circ s_{D'}$. Attention, il n'y a pas unicité de $D$ et $D'$ (cf. exercice 2 de 5.4.4).

Remarquons que $r = \mathrm{id}_E$ si et seulement si $D = D'$.

On a pour les rotations un résulat comparable à celui formulé ci-dessus pour les réflexions :

Proposition. *Toute rotation vectorielle est une isométrie vectorielle. La bijection réciproque de la rotation $r = s_{D'} \circ s_D$ est la rotation $r^{-1} = s_D \circ s_{D'}$. L'ensemble $E_1$ des vecteurs fixés par $r$ est réduit à $\{0_E\}$ dès lors que $D \neq D'$.*

*Preuve.* Soient $D$ et $D'$ deux droites de $E$, et $r$ la rotation $s_D \circ s_{D'}$. Il est clair que $r$ est une isométrie comme composée de deux isométries, et que $r^{-1} = (s_D \circ s_{D'})^{-1} = s_{D'}^{-1} \circ s_D^{-1} = s_{D'} \circ s_D$. Soit maintenant $u \in E$ tel que $r(u) = u$. On a donc $s_D(u) = s_{D'}(u)$. En décomposant $u = v + w = v' + w'$ avec $v \in D$, $w \in D^\perp$, $v' \in D'$, $w' \in D'^\perp$ on a $v - w = v' - w'$. En sommant membre à membre les deux égalités, il vient $v = v'$, qui est donc un vecteur de $D$ et de $D'$. Comme on a supposé que $D \neq D'$, on a $D \cap D' = \{0_E\}$. Il s'ensuit que $v = v' = 0_E$. Donc $u = w = w'$. Mais alors $u \in D^\perp \cap D'^\perp$, et comme on a aussi $D^\perp \cap D'^\perp = \{0_E\}$, on conclut que $u = 0_E$. □

**c)** Proposition (*matrice d'une réflexion ou d'une rotation dans une base orthonormale*). *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $E$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $E$. Alors :*

(i) *$f$ est une réflexion vectorielle si et seulement s'il existe deux réels $a$ et $b$ vérifiant $a^2+b^2 = 1$ tels que la matrice de $f$ relativement à la base $\mathscr{B}$ soit égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$*

(ii) *$f$ est une rotation vectorielle si et seulement s'il existe deux réels $a$ et $b$ vérifiant $a^2+b^2 = 1$ tels que la matrice de $f$ relativement à la base $\mathscr{B}$ soit égale à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$*

*Preuve.* Soit $f$ une réflexion. Soit $D$ son axe. Soit $v$ un vecteur unitaire de $D$ ; notons $(\alpha, \beta)$ les composantes de $v$ dans la base $\mathscr{B}$. Comme $f$ est une isométrie, on a $\|f(v)\| = \|v\| = 1$, donc $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Soit $w$ le vecteur de composantes $(-\beta, \alpha)$. Il est unitaire et orthogonal à $v$, donc $w \in D^\perp$. Ainsi $\mathscr{B}' = (v, w)$ est une base orthonormale de $E$, et il est clair que la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$ est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^2-\beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & -\alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

de la forme voulue avec $a := \alpha^2 - \beta^2$ et $b := 2\alpha\beta$, qui vérifient bien $a^2 + b^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 = 1$.

• Supposons maintenant qu'il existe deux réels $a$ et $b$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ tels que la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Elle est orthogonale (il suffit de calculer ${}^tAA$ et d'utiliser le fait que $a^2 + b^2 = 1$). Elle est symétrique, donc diagonalisable d'après les résultats de 5.3.2. L'exercice 3 de 5.2.4 implique alors que $f$ est une symétrie orthogonale. Comme il est clair que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, on conclut que $f$est une réflexion par rapport à une droite.

• Supposons que $f$ est une rotation. C'est la composée de deux réflexions. Il en résulte avec le point (i) qu'il existe des réels $a, b, c, d$ vérifiant $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = ac + bd$ et $\beta = ad - bc$, qui vérifient bien $\alpha^2 + \beta^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1$.

• Supposons enfin qu'il existe deux réels $a$ et $b$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ tels que la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ce qui, avec le point (i), montre que $f$ est la composée de deux réflexions, et donc que $f$ est une rotation. □

**d)** Théorème. *Lorsque $E$ est un espace vectoriel euclidien de dimension 2, le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ est constitué des rotations et des réflexions.*
*Plus précisément, les isométries directes du plan vectoriel $E$ sont les rotations vectorielles, et les isométries indirectes du plan vectoriel $E$ sont les réflexions vectorielles.*

*Preuve.* Il résulte de la proposition précédente que, dans une base orthonormale quelconque, toute rotation est de déterminant 1 et toute réflexion est de déterminant $-1$. Réciproquement, soit $f$ une isométrie quelconque de $E$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $E$. D'après le théorème d) de 5.2.2, $M$ est une matrice orthogonale. Donc $\det M = ad - bc = \varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = M^{-1} = {}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, d'où $d = \varepsilon a$, $c = -\varepsilon b$, et $a^2 + b^2 = 1$. Il suffit donc d'appliquer la proposition précédente pour conclure que $f$ est une rotation si $\varepsilon = 1$ et une réflexion si $\varepsilon = -1$. □

**e)** Remarque. Il résulte du théorème que la composée d'un nombre pair de réflexions est une rotation, la composée d'un nombre impair de réflexions est une réflexion, la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion, et la composée d'un nombre quelconque de rotations est une rotation.

**f)** Remarque. Le sous-groupe $\mathrm{O}^+(E)$ est abélien, ce qui signifie que, quelles que soient $f, g$ deux rotations de $E$, on a : $g \circ f = f \circ g$.

*En effet.* Il est clair que, pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

### 5.4.2 Angles

$E$ désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension deux orienté.

**a)** Théorème. *Soit $r \in O^+(E)$ une rotation de $E$.*

(i) *Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de $r$ dans toute base orthonormale directe de $E$ soit*
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) *La matrice de $r$ dans toute base orthonormale indirecte de $E$ est alors égale à $R_{-\theta}$.*

*Preuve.* Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale directe de $E$. Comme on l'a vu à la proposition c) de 5.4.1, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $a^2 + b^2 = 1$ tel que la matrice de $r$ dans $\mathscr{B}$ soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. D'après un résultat d'analyse bien connu (mais non trivial !) l'égalité $a^2+b^2 = 1$ implique qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, non unique (défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$), tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Donc la matrice de $r$ par rapport à la base $\mathscr{B}$ est $R_\theta$.

Considérons maintenant une autre base orthonormale $\mathscr{B}'$ de $E$, notons $f$ l'isométrie transformant $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$, $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (qui n'est autre que la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$), et $M'$ la matrice de $r$ par rapport à $\mathscr{B}'$. Donc $M' = P^{-1}R_\theta P$.

Supposons d'abord que $\mathscr{B}'$ est directe ; alors $f \in O^+(E)$, et comme $O^+(E)$ est abélien [remarque f) de 5.4.1], l'égalité $M' = P^{-1}R_\theta P$ devient $M' = R_\theta$. Ceci achève de prouver (i).

Pour (ii), supposons maintenant que $\mathscr{B}'$ est indirecte. On a $f \in O^-(E)$, donc $r \circ f \in O^-(E)$, d'où $r \circ f \circ r \circ f = \mathrm{id}$ et $f^2 = \mathrm{id}$ puisque $r \circ f$ et $f$ sont des réflexions vectorielles [voir théorème d) de 5.4.1]. Il en résulte que $f^{-1} \circ r \circ f = f \circ r \circ f = r^{-1}$, ce qui se traduit matriciellement par $M' = P^{-1}R_\theta P = R_\theta^{-1}$. Il est évident de vérifier que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. □

**b)** Définition. Pour tout réel $\theta$, notons $r_\theta$ l'unique rotation dont la matrice par rapport à toute base orthonormale directe est la matrice $R_\theta$. On l'appelle la *rotation d'angle $\theta$*.

Remarque : on devrait plus rigoureusement, conformément à ce qui suit, l'appeler la rotation dont l'angle a pour mesure $\theta$.

**c)** Proposition. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(i) *Pour tous* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, *on a :* $(r_\theta = r_{\theta'}) \Leftrightarrow (R_\theta = R_{\theta'}) \Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta' = \theta + 2k\pi)$.

(ii) *En particulier :* $r_0 = \mathrm{id}_E$ *et* $r_\pi = r_{-\pi} = -\mathrm{id}_E$.

(iii) *Pour tous* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, *on a :* $R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ *et* $r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'}$

*Preuve.* Les points (i) et (ii) sont clairs. Pour (iii), considérons deux réels quelconque $\theta$ et $\theta'$, et les deux rotations $r_\theta$ et $r_{\theta'}$ de matrices respectives $R_\theta$ et $R_{\theta'}$ par rapport à une même base orthonormale. La matrice de $r_\theta \circ r_{\theta'}$ dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}, \text{ d'où le résultat.} \qquad \square$$

Algébriquement, on traduit ces propriétés en disant que l'application $r : \mathbb{R} \to O^+(E)$ définie par $\theta \mapsto r_\theta$ est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
A noter que, comme $\theta + \theta' = \theta' + \theta$, on retrouve le fait déjà observé à la remarque f) de 5.4.1 que les rotations commutent entre elles pour la loi $\circ$.

Géométriquement, le lemme suivant va permettre de passer de la notion d'angle d'une rotation à celle d'angle de vecteurs.

**d)** Lemme. *Soient $u$ et $v$ deux vecteurs non-nuls de même norme. Il existe une unique rotation vectorielle $r$ de $E$ telle que $r(u) = v$.*

*1. Preuve géométrique.* Parce que $||u|| = ||v||$, les vecteurs $u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux. Il en résulte que, si l'on appelle $s$ la réflexion vectorielle d'axe dirigé par $u+v$, on a $s(u) = v$. Donc, en notant $s'$ la réflexion d'axe dirigé par $u$, la rotation $r = s \circ s'$ vérifie $r(u) = s(s'(u)) = s(u) = v$.

Figure

Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux rotations $r$ et $r'$ telles que $r(u) = v = r'(u)$. Posons $r'' = r^{-1} \circ r'$. C'est une rotation (composée de deux rotations), qui vérifie $r''(u) = u$ par construction et fixe donc un vecteur non-nul de $E$. On en déduit (proposition b de 5.4.1) que $r'' = \mathrm{id}_E$, donc $r = r'$. $\square$

*2. Preuve analytique.* Plaçons-nous dans une base orthonormale $\mathscr{B}$. Soient $(x, y)$ les composantes de $u$, et $(x', y')$ celles de $v$. On cherche à déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $a^2 + b^2 = 1$. Or le système $\begin{cases} xa - yb = x' \\ ya + xb = y' \end{cases}$ a pour déterminant $x^2 + y^2 \neq 0$, donc il admet une unique solution donnée par les formules de Cramer :

$$a = \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}, \quad \text{d'où} \quad a^2 + b^2 = \frac{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}{(x^2+y^2)^2} = 1.$$

D'où l'existence et l'unicité de la solution cherchée. $\square$

**e)** DÉFINITIONS. On se place toujours dans un plan vectoriel euclidien orienté $E$.

• Soient deux vecteurs non-nuls $u$ et $v$ dans $E$. On peut toujours se ramener à des vecteurs de même norme en considérant les vecteurs *unitaires*

$$u_1 = \frac{1}{\|u\|}u \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{1}{\|v\|}v,$$

et il existe d'après le lemme ci-dessus une unique rotation $r$ telle quel $r(u_1) = v_1$.

• Soient quatre vecteurs non-nuls $u, v, u', v'$ dans $E$. On dit que $(u, v)$ et $(u', v')$ déterminent le même *angle* lorsque l'unique rotation $r$ telle que $r(u_1) = v_1$ vérifie aussi $r(u'_1) = v'_1$. On note alors :

$$\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$$

Plus formellement, on définit une relation entre couples de vecteurs non-nuls traduisant le fait que l'unique rotation $r$ telle que $r(u_1) = v_1$ est celle qui vérifie aussi $r(u'_1) = v'_1$ ; on montre que cette relation est une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples de vecteurs non-nuls de $E$, et un angle est une classe d'équivalence pour cette relation.
A ce niveau, il ne serait pas nécessaire de supposer $E$ orienté pour définir la notion d'angle de vecteurs ; cela est en revanche nécessaire pour parler de mesure d'angle.

• On appelle *mesure* d'un angle de vecteurs $\widehat{(u,v)}$ tout réel $\theta$ tel que l'unique rotation qui envoie $u_1$ sur $v_1$ soit la rotation $r_\theta$ définie en c) ci-dessus.

$$[\ \theta \text{ est une mesure de } \widehat{(u,v)}\ ] \Leftrightarrow [\ r_\theta(u_1) = v_1\ ].$$

La mesure d'un angle n'est pas unique, mais définie modulo $2\pi$ : *si $\theta$ est une mesure de $\widehat{(u,v)}$, ses autres mesures sont les réels $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*

*Exemples :*

1. l'angle nul est l'angle égal à $\widehat{(u,u)}$ pour tout vecteur non-nul $u \in E$ ; la rotation correspondante est $\mathrm{id}_E = r_0$ ; ses mesures sont tous les $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. l'angle plat est l'angle égal à $\widehat{(u,-u)}$ pour tout vecteur non-nul $u \in E$ ; la rotation correspondante est $-\mathrm{id}_E = r_\pi$ ; ses mesures sont tous les $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. deux vecteurs non-nuls $u, v \in E$ forment une base orthonormale directe de $E$ si et seulement si une mesure de $\widehat{(u,v)}$ est $\frac{\pi}{2}$

• Soient $u, v, u', v'$ quatre vecteurs non-nuls de $E$. On peut toujours choisir un vecteur $w$ tel que $\widehat{(u',v')} = \widehat{(v,w)}$, et l'on définit alors par une forme de relation de Chasles la *somme des deux angles :*

$$\widehat{(u,v)} + \widehat{(u',v')} = \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)} = \widehat{(u,w)}.$$

La somme de deux angles étant ainsi définie par la composition des deux rotations correspondantes, il résulte directement de cette définition que,

*si $\theta$ est une mesure de $\widehat{(u,v)}$ et $\theta'$ est une mesure de $\widehat{(u',v')}$, alors une mesure de $\widehat{(u,v)} + \widehat{(u',v')}$ est $\theta + \theta'$.*

Somme de deux angles

Remarque. C'est ce principe qui est à la base des systèmes pratiques de mesure des angles. Comme il établit que la mesure de la somme de deux angles est la somme de leurs mesures respectives, il permet de définir à partir d'une valeur arbitraire d'un angle donné (généralement l'angle plat) de calculer la mesure des différentes fractions de cet angle (suivant l'unité choisie : $\pi$ en radians, 180 en degrés, 200 en grades).

• L'*opposé* d'un angle $\widehat{(u,v)}$ est l'angle $\widehat{(v,u)}$, et ceci indépendamment du couple de vecteurs non-nuls choisis.
La somme d'un angle et de son opposé est l'angle nul puisque $\widehat{(u,v)} + \widehat{(v,u)} = \widehat{(u,u)}$.

Opposé d'un angle

• Comme les différentes mesure d'un même angle diffèrent d'un multiple entier de $2\pi$, on peut sans ambiguïté définir *le cosinus et le sinus d'un angle* comme le cosinus et le sinus de l'une quelconque de ses mesures. On note :

$$\cos\widehat{(u,v)} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin\widehat{(u,v)} = \sin\theta, \quad \text{où } \theta \text{ est une mesure de l'angle } \widehat{(u,v)}.$$

**f)** Théorème. *Pour tout couple $(u,v)$ de vecteurs non-nuls d'un plan vectoriel eucliden orienté $E$, on a :*

$$\cos\widehat{(u,v)} = \frac{\langle u \mid v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \qquad \text{et} \qquad \sin\widehat{(u,v)} = \frac{[u,v]}{\|u\|\,\|v\|}.$$

*Preuve.* Définissons $u_1, v_1$ unitaires par : $u_1 = \frac{1}{\|u\|}u$ et $v_1 = \frac{1}{\|v\|}v$. Soit $\theta$ une mesure de $\widehat{(u_1,v_1)} = \widehat{(u,v)}$.

Ainsi : $r_\theta(u_1) = v_1$.

Soit $w_1$ le vecteur unitaire orthogonal à $u_1$ tel que la base othonormale $\mathscr{B}_1 = \{u_1, w_1\}$ soit directe.

Dans la base $\mathscr{B}_1$, les composantes de $u_1$ sont $(1,0)$.

Dans la base $\mathscr{B}_1$, les composantes de $v_1$ forment la première colonne de $R_\theta$ (puisque $v_1 = r_\theta(u_1)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(r_\theta) = R_\theta$) et sont donc égales à $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Donc $\langle u_1 \mid v_1\rangle = \cos\theta$ et $[u_1, v_1] = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u_1, v_1) = \sin\theta$. D'où le résultat. □

Figure

Dans la preuve ci-dessus, on travaille dans la base orthonormale directe $\mathscr{B}_1$ adaptée à la donnée de $u$ et $v$. Si maintenant on prend une base orthonormale directe $\mathscr{B}$ quelconque, et si l'on note $(x,y)$ et $(x',y')$ les composantes respectives de $u$ et $v$ dans la base $\mathscr{B}$, on retrouve les formules déjà démontrées dans la preuve du lemme d) lorsque $u$ et $v$ sont de même norme :

$$\cos\widehat{(u,v)} = \frac{xx' + yy'}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \sin\widehat{(u,v)} = \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2},$$

### 5.4.3 Description des isométries vectorielles en dimension 3

Dans toute ce paragraphe, $E$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

**a)** Proposition et définition. *Soit $u \in E$ un vecteur non-nul. Soit $\theta$ un réel. Il existe une isométrie directe $f$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans toute base orthonormale directe $\mathscr{B}$ de $E$ admettant $u_1 = \frac{1}{\|u\|}u$ comme premier vecteur est :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

*Cette isométrie est appelé la rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par $u$, et d'angle $\theta$.*

*Preuve.* Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soient $u \in E$ non-nul, et $u_1 = \frac{1}{\|u\|}u$. Soient $u_2, u_3$ deux vecteurs tels que $(u_1, u_2, u_3)$ constitue une base orthonormale directe $\mathscr{B}$ de $E$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que : ${}^tA_\theta A_\theta = I_3$ et $\det A_\theta = +1$, et donc $f \in \mathrm{O}^+(E)$.

Si $\mathscr{B}'$ est une autre base orthonormale directe de la forme $(u_1, v_2, v_3)$, la matrice de passage $P$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}^+(2, \mathbb{R})$.

Parce que $\mathrm{O}^+(2, \mathbb{R})$ est abélien (voir remarque 5.4.1.f), on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}A_\theta P = A_\theta$. $\square$

**b)** Description géométrique.

Considérons $D$ la droite de base $u_1$ et $H$ le plan de base $(u_2, u_3)$, qui sont deux sous-espaces orthogonaux.

- La restriction de $f$ à la droite $D$ est $\mathrm{id}_D$.
- La restriction de $f$ au plan $H = D^\perp$ est la rotation vectorielle plane d'angle $\theta$, de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans la base $(u_2, u_3)$.

Rotation en dimension 3

**c)** Théorème. *Les isométries directes de $E$ sont les rotations vectorielles.*

*Preuve.* Soit $f \in \mathrm{O}^+(E)$. En particulier, $\det f = 1$. Son polynôme caractéristique détermine une fonction polynomiale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $P_f(x) = -x^3 + \cdots + \det f = -x^3 + \cdots + 1$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$, et prend la valeur positive $+1$ en $x = 0$ : il résulte alors du théorème des valeurs intermédiaire qu'il existe $\lambda \in ]0, +\infty[$ tel que $P_f(\lambda) = 0$. Donc $\lambda$ est une valeur propre de $f$, qui vérifie $\lambda > 0$. Or on a vu à l'ex. 2 de 5.2.4 que les seules v.p. possibles d'une isométrie sont 1 et $-1$. Donc ici $\lambda = 1$.

On vient d'établir qu'il existe $u \in E$ non-nul tel que $f(u) = u$. Normalisons-le en $u_1 = \frac{1}{\|u\|}u$, et choisissons deux vecteurs $u_2, u_3$ de $E$ tel que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base orthonormale directe de $E$. Appelons $D$ la droite de base $u_1$ dans $E$, et $H$ le plan $D^\perp$, dont une base orthonormale est $(u_2, u_3)$. Parce que $D$ est évidemment stable par $f$, il en est de même de son orthogonal $H$ (d'après l'ex. 1 de 5.2.4). Donc la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$. On conclut en écrivant que $A$ est orthogonale et de déterminant $+1$. $\square$

On peut de même obtenir une description concrète des isométries indirectes en dimension 3. Sans développer ici la démonstration, citons pour mémoire le résultat.

**d)** Théorème. *Les isométries indirectes de $E$ sont :*

(i) *l'application* $-\mathrm{id}_E$,

(ii) *les symétries orthogonales par rapport à un plan $H$ (ou réflexions par rapport à $H$),*

(iii) *les composées d'une réflexion par rapport à un plan $H$ avec une rotation d'axe $H^\perp$ et d'angle dans* $]0, \pi[$.

### 5.4.4 Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, on considère une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme $f$ d'un plan vectoriel euclidien orienté $E$ qui admet $M$ pour matrice dans une base orthonormale directe de $\mathscr{E}$. Dans chaque cas, montrer que $M$ est une matrice orthogonale, préciser si elle est directe ou indirecte, et décrire géométriquement $f$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (*non-unicité de l'écriture d'une rotation comme composée de deux réflexions*). Soit $E$ un plan vectoriel euclidien. Soit $r$ est une rotation vectorielle de $E$. Montrer que, pour toute droite $D$, il existe une droite $D'$ telle que $r = s_D \circ s_{D'}$ et une droite $D''$ telle que $r = s_{D''} \circ s_D$ [*indication* : utiliser la remarque f) de 5.4.1 pour introduire $D'$ comme axe de la réflexion $s_D \circ r$]. Faire une figure.

Exercice 3. Montrer que, de façon similaire au lemme d) de 5.4.2, on a aussi : si $u$ et $v$ sont deux vecteurs non-nuls de même norme d'un plan vectoriel euclidien $E$, il existe une unique réflexion $s$ de $E$ telle que $s(u) = v$.

Exercice 4. Montrer que, dans un plan vectoriel euclidien orienté $E$, toute réflexion transforme un angle orienté en son opposé [*indication :* pour une réflexion $s_D$ d'axe $D$, et deux vecteurs non-nuls quelconque $u, v \in E$, considérer la rotation $s_D \circ s_{D'}$ où $D' = (u - v)^\perp$].

Exercice 5. Soient $u, v, u', v'$ quatre vecteurs de même normes dans un plan vectoriel euclidien orienté $E$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : (i) l'unique rotation qui envoie $u$ sur $u'$ est égale à l'unique rotation qui envoie $v$ sur $v'$ ; (ii) l'unique rotation qui envoie $u$ sur $v$ est égale à l'unique rotation qui envoie $u'$ sur $v'$. En déduire que :

$$\widehat{(u, v)} = \widehat{(u', v')} \;\Leftrightarrow\; \widehat{(u, u')} = \widehat{(v, v')}.$$

Exercice 6 *(Isométries vectorielles en dimension 3).* Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe d'un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension 3. Donner la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe dirigé en orienté par $e_1 + e_2 + e_3$, et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 7 *(Isométries vectorielles en dimension 3).* Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 est $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 *(Isométries vectorielles en dimension 3).* Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormale $\mathscr{B}$. Pour tous réel $a, b, c$, on note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice par rapport à la base $\mathscr{B}$ est : $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

– Montrer que $f_{a,b,c} \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $|a + b + c| = 1$ et $ab + bc + ca = 0$.

– Montrer qu'un $f_{a,b,c} \in \mathrm{O(E)}$ est involutif si et seulement si $b = c$.

– Montrer que l'ensemble $G$ des endomorphismes $f_{a,b,c}$ qui appartiennent à O(E) et qui sont involutifs est un groupe fini, dont on déterminera explicitement tous les éléments, et dont on dressera la table pour la loi $\circ$.

– Décrire géométriquement chacun des éléments de $G$, en indiquant s'il s'agit d'un élément de $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ ou de $\mathrm{O}^-(\mathrm{E})$, et en précisant le sous-espace des vecteurs invariants.

Exercice 9 *(Engendrement du groupe orthogonal par les symétries hyperplanes).* Démontrer que toute isométrie vectorielle $f$ d'un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n = 2$ ou 3 s'écrit sous forme d'un produit de symétries hyperplanes. [C'est une propriété que l'on peut démontrer en fait pour tout $n \geq 2$].

Exercice 10 *(Conservation des droites et centre du groupe orthogonal).* Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$.

– Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$. On note $s_H$ la symétrie orthogonale de $E$ par rapport à $H$. Soit $f \in$ O(E) quelconque ; posons $h = f \circ s_H \circ f^{-1}$. Montrer que $h(u) = u$ pour tout $u \in f(H)$ et que $h(u) = -u$ pour tout $u \in f(H^\perp)$. En déduire que $h = s_{f(H)}$. Conclure que :

$$\text{pour tout } f \in \mathrm{O}(E),\ [\ f \circ s_H = s_H \circ f\ ] \Leftrightarrow [\ f(H) = H\ ].$$

– Montrer que si $f \in$ O(E) vérifie $f(\Delta) = \Delta$ pour toute droite $\Delta$ de $E$, alors $f = \pm\,\mathrm{id}_E$.

– Déduire que si $\dim E \geq 3$ et si $f$ vérifie $f(\Pi) = \Pi$ pour tout plan $\Pi$ de $E$, alors $f = \pm\,\mathrm{id}_E$.

On appelle centre de O(E) l'ensemble $Z$ de tous les $f \in$ O(E) qui commutent pour la loi $\circ$ avec tous les éléments de O(E) :

$$Z = \{f \in \mathrm{O}(E)\,;\, g \circ f = f \circ g \text{ pour tout } g \in \mathrm{O}(E)\}.$$

On définit de même le centre $Z^+$ de $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$. A l'aide des questions précédentes, déterminer quels sont les éléments de $Z$. Déterminer de même les éléments de $Z^+$ (on pourra distinguer trois cas suivant que $\dim E$ est impaire, ou paire et au moins égale à 4, ou égale à 2).

---

REMARQUE : conformément à ce que prévoit le programme, ces exercices seront complétés en cours par des applications des espaces vectoriels euclidiens à des questions de géométrie affine en dimension 2 et 3 (plans et droites affines, distances, perpendicularité, isométries affines...), comprenant des synthèses de résultats déjà connus en la matière et des développements fondés sur l'algèbre linéaire et bilinéaire.

---

# Annexe 3 : une fiche de synthèse

Groupes d'automorphismes linéaires,
Groupes de matrices carrées

Une fiche de synthèse en complément du chapitre 5

## Groupes d'automorphismes linéaires - groupes de matrices carrées

---

**I.1 -** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle **groupe linéaire** de $E$, noté $\mathrm{GL}(E)$, l'ensemble de tous les endormorphismes de $E$ qui sont bijectifs, c'est-à-dire de toutes les applications linéaires de $E$ dans $E$ qui sont bijectives, c'est-à-dire encore de tous les automorphismes de l'espace vectoriel $E$.

$$\boxed{\mathrm{GL}(E) := \{f : E \to E \,/\, f \text{ linéaire et bijective}\}}$$

Rappelons que dire que $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe signifie que, pour la loi $\circ$, on a :

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pour tous $f, g, h \in \mathrm{GL}(E)$ (associativité)
- $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$ pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$ (élément neutre)
- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$ (existence d'un inverse pour tout élément)

---

**I.2 -** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
On appelle **groupe spécial linéaire** de $E$, noté $\mathrm{SL}(E)$, l'ensemble de tous les endomorphismes de $E$ dont le déterminant vaut 1. Ils sont forcément bijectifs (leur déterminant est non-nul) et on montre que $\mathrm{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

$$\boxed{\mathrm{SL}(E) := \{f : E \to E \,/\, f \text{ linéaire telle que } \det f = 1\},\ \text{sous-groupe de } \mathrm{GL}(E)}$$

Rappelons que dire que $\mathrm{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ signifie que :

- $\mathrm{SL}(E)$ est non-vide ; en particulier il contient l'élément neutre $\mathrm{id}_E$
- pour tous $f, g \in \mathrm{SL}(E)$, on a $f \circ g \in \mathrm{SL}(E)$ (stabilité pour le produit)
- pour tout $f \in \mathrm{SL}(E)$, on a $f^{-1} \in \mathrm{SL}(E)$ (stabilité par passage à l'inverse)

---

**I.3 -** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
On appelle **groupe orthogonal** de $E$, noté $\mathrm{O}(E)$, l'ensemble de tous les endomorphismes de $E$ qui sont des endomorphismes orthogonaux (on dit encore des isométries vectorielles). On a vu en cours différentes définitions équivalentes de la notion d'endomorphisme orthogonal (conserver le produit scalaire, conserver la norme, transformer une base orthonormale en une base orthonormale). On a aussi montré qu'un endomorphisme orthogonal est forcément bijectif et que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

$$\boxed{\mathrm{O}(E) := \{f : E \to E \,/\, f \text{ endomorphisme orthogonal }\},\ \text{sous-groupe de } \mathrm{GL}(E)}$$

---

**I.4 -** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
On appelle **groupe spécial orthogonal** de $E$, noté $\mathrm{SO}(E)$ ou $\mathrm{O}^+(E)$, l'ensemble de tous les endomorphismes orthogonaux de $E$ qui sont de déterminant 1.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{SO}(E) := \{f : E \to E \,/\, f \text{ endomorphisme orthogonal tel que } \det f = 1\} \\ \mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}(E) \cap \mathrm{SL}(E),\ \text{sous-groupe de } \mathrm{O}(E) \text{ et sous-groupe de } \mathrm{SL}(E) \end{array}}$$

**II.1 -** Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle **groupe linéaire** sur les matrices carrées réelles d'ordre $n$, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, l'ensemble de toutes les matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A \text{ inversible}\}}$$

Rappelons que dire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe signifie que, pour le produit matriciel, on a :

- $(A.B).C = A.(B.C)$ pour toutes $A, B, C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (associativité)
- $A.I_n = I_n.A = A$ pour toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (élément neutre)
- $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ pour toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (existence d'un inverse pour tout élément)

---

**II.2 -** Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle **groupe spécial linéaire** sur les matrices carrées réelles d'ordre $n$, noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, l'ensemble de toutes les matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont de déterminant égal à 1. Elles sont forcément inversibles (puisque leur déterminant est non-nul) et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \det A = 1\},\ \text{sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

Rappelons que dire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ signifie que :

- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est non-vide ; en particulier il contient l'élément neutre $I_n$
- pour toutes $A, B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on a $A.B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (stabilité pour le produit)
- pour toute $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on a $A^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (stabilité par passage à l'inverse)

---

**II.3 -** Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle **groupe orthogonal** sur les matrices carrées réelles d'ordre $n$, noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, l'ensemble de toutes les matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales, ce qui signifie par définition qu'elles sont inversibles et que leur inverse est égal à leur transposée. On a montré qu'elles forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A.{}^tA = {}^tA.A = I_n\},\ \text{sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

---

**II.4 -** Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle **groupe spécial orthogonal** sur les matrices carrées réelles d'ordre $n$, noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, ou $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}^+(n,\mathbb{R})$, l'ensemble de toutes les matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et de déterminant 1.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A.{}^tA = {}^tA.A = I_n \text{ et } \det A = 1\} \\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ \text{sous-groupe de } \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et sous-groupe de } \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\end{array}}$$

---

### Lien entre les deux notions (où $n = \dim E$)

| | | |
|---|---|---|
| $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$,<br>$\mathscr{B}$ base de $E$ | $f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ | $f \in \mathrm{SL}(E) \Leftrightarrow A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ |
| $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$,<br>$\mathscr{B}$ base orthonormale de $E$ | $f \in \mathrm{O}(E) \Leftrightarrow A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ | $f \in \mathrm{SO}(E) \Leftrightarrow A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ |

# Annexe 4 : archives de sujets de devoirs, chapitres 4 et 5

Réduction des endomorphismes,
Espaces vectoriels euclidiens

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 12 septembre 2012

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 1**

**Durée : deux heures.** *Sans documents.*

---

## Exercice 1

Soient $a, b, c, d, e, f$ des réels. On considère dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = A - I_4, \qquad C = A + I_4.$$

**1)** Déterminer, suivant les valeurs des paramètres $a, b, c, d, e, f$, le rang de la matrice $B$.

**2)** Déterminer, suivant les valeurs des paramètres $a, b, c, d, e, f$, le rang de la matrice $C$.

**3)** Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$.

**4)** Déduire des trois questions précédentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les paramètres $a, b, c, d, e, f$, pour que $A$ soit diagonalisable.

## Exercice 2

Soient $q$ un réel. On considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3-q & q-5 & q \\ -q & q-2 & q \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

**1)** Calculer le polynôme caractéristique de $A$.

**2)** Pour quelle(s) valeur(s) de $q$ la matrice $A$ est-elle inversible ?

**3)** Montrer qu'il existe une unique valeur $q_0$ de $q$, que l'on déterminera, pour laquelle $A$ est diagonalisable.

**4)** On prend ici $q = q_0$. Diagonaliser $A$. Calculer explicitement $A^n$ pour tout entier $n \geq 0$. La formule trouvée ci-dessus est-elle encore valable pour $n = -1$ ?

*suite au verso...*

## Exercice 3

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes valeurs propres.

*Indications.* Soit $\lambda$ une valeur propre de $f \circ g$.
Supposer d'abord que $\lambda = 0$ ; montrer que $f \circ g$ n'est pas bijective, en déduire qu'il en est de même pour $g \circ f$, et conclure que 0 est aussi valeur propre de $g \circ f$.
Supposer ensuite que $\lambda \neq 0$ ; prendre un vecteur propre $x$ de $f \circ g$ associé à la valeur propre $\lambda$, et considérer le vecteur $g(x)$.

## Exercice 4

On rappelle que $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9 sur $\mathbb{R}$, dont la base canonique est $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33})$, où $E_{ij}$ désigne la matrice "élémentaire" dont le coefficient de la $i$-ième ligne et $j$-ième colonne est 1, et tous les autres sont 0.

**1)** Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A$, c'est-à-dire telles que $AM = MA$. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**2)** On considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **a)** Démontrer qu'il existe dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible $P$ telle que $A = PDP^{-1}$ (on n'aura pas besoin dans la suite du calcul explicite de $P$).

- **b)** Montrer que l'application $\phi : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = P^{-1}MP$ pour tout $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est un endomorphisme (c'est-à-dire est linéaire).

- **c)** Démontrer que, pour toute $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on a $M \in \mathscr{C}(A)$ si et seulement si $\phi(M) \in \mathscr{C}(D)$.

- **d)** Démontrer que $\phi$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{C}(A)$ sur $\mathscr{C}(D)$.

**3)** Montrer qu'une matrice quelconque $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{C}(D)$ si et seulement si elle est de la forme $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & j & k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire une base et la dimension de $\mathscr{C}(D)$.

**4)** Déduire des questions 2.d) et 3) la dimension de $\mathscr{C}(A)$, et une méthode pour en trouver une base.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 18 septembre 2013

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 1**

**Durée : deux heures.** *Sans documents.*

---

## Exercice 1

Déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) - z(t) \\ z'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

## Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1)** Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où l'on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

**2)** Diagonaliser $A$.

**3)** En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ et des valeurs initiales $u_0, u_1, u_2$. (*Indication :* on pourra calculer les coefficients de la première ligne de $A^n$).

## Exercice 3

On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $E$.
Pour tout polynôme $P$ de $E$, on note $f(P)$ le polynôme $f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.

**1)** Montrer que $f$ ainsi défini est un endomorphisme de $E$.

**2)** Ecrire la matrice $A$ de $f$ par rapport à la base $\mathscr{B}$. Déterminer ses valeurs propres. $f$ est-il diagonalisable ?

.../...

## Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $A_n$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général est, sur la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne, $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

**1)** Ecrire les matrices $A_1, A_2, A_3, A_4$.

**2)** Calculer le rang de $A_n$ pour tout $n \geq 1$ ; en déduire que 0 est valeur propre de $A_n$ et déterminer sa multiplicité.

**3)** Utiliser la trace pour montrer que $A_n$ admet une unique valeur propre non-nulle et déterminer sa multiplicité

**4)** Conclure que, pour tout $n \geq 1$, la matrice $A_n$ est diagonalisable.

## Exercice 5

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A_\alpha = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6\alpha+1 & 2\alpha-1 & -\sqrt{2}(2\alpha-1) \\ 2\alpha-1 & 6\alpha+1 & \sqrt{2}(2\alpha-1) \\ -\sqrt{2}(2\alpha-1) & \sqrt{2}(2\alpha-1) & 4\alpha+2 \end{pmatrix}.$$

On note $\phi_\alpha$ l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A_\alpha$.

**1)** Pour $\alpha = 1$, déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $A_1$.

**2)** Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice de $\phi_\alpha$ dans la base $\mathscr{B}'$ ci-dessus est une matrice diagonale $D_\alpha$.

**3)** En déduire, par un calcul simple, que $A_\alpha A_\beta = A_{2\alpha\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et que $A_{\frac{1}{2}} = I_3$.

**4)** En utilisant la question précédente, déterminer pour quelles valeurs de $\alpha$ la matrice $A_\alpha$ est inversible.

**5)** En déduire que l'ensemble $G = \{A_\alpha \,;\, \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 5 novembre 2014

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 4**

**Durée : deux heures.** *Sans documents, sans calculatrice.*

---

Exercice 1 (*diagonalisabilité*)

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}, \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel fixé.}$$

**1)** Déterminer, en discutant suivant les valeurs de $m$, les valeurs propres de $f$ et leur ordre de multiplicité.

**2)** En déduire pour quelle(s) valeur(s) de $m$ l'endomorphisme $f$ est bijectif, et calculer le rang de $f$ suivant les valeurs de $m$.

**3)** Pour quelle(s) valeur(s) de $m$ l'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

Exercice 2 (*une application de la diagonalisation*)

On considère trois suites réelles $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par leur premier termes $u_0$, $v_0$ et $w_0$, et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = 2v_n - w_n, \quad v_{n+1} = 3u_n - 2v_n, \quad w_{n+1} = -2u_n + 2v_n + w_n, \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

**1)** Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 0$.

**2)** Montrer que $A$ admet trois valeurs propres simples. Diagonaliser $A$.

**3)** Calculer $A^n$ pour tout $n \geq 0$.

**4)** En déduire le calcul de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$, $u_0$, $v_0$ et $w_0$ (on pourra laisser le résultat sous forme matricielle).

.../...

Exercice 3 (*une application de la notion de valeur propre*)

On fixe $n \geq 2$ et deux matrices $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de montrer que $A$ est nilpotente (ce qui signifie qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $A^p = O_n$, où $O_n$ désigne la matrice nulle).

**1)** Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a : $A^k B - BA^k = kA^k$.

**2)** On note $E$ l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Rappeler quelle est la dimension de $E$. Montrer que l'application $\phi : E \to E$ définie par $\phi(M) = MB - BM$ pour toute $M \in E$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$.

**3)** Déduire que tout entier $k \geq 0$ tel que $A^k \neq O_n$ est une valeur propre de $\phi$.

**4)** Conclure qu'il existe nécessairement un entier $p \geq 0$ tel que $A^p = O_n$.

Exercice 4 (*une série de questions brèves pour réfléchir*)

**1)** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, que l'on suppose bijectif (on dit alors que $f$ est un automorphisme). Montrer que, si $\lambda$ est une valeur propre de $E$, alors $\lambda \neq 0$, et $\lambda^{-1}$ est une valeur propre de l'automorphisme réciproque $f^{-1}$.

**2)** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n \geq 1$. Combien $f$ peut-il admettre de valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ si $n$ est pair ? si $n$ est impair ?

**3)** Expliquer sans calculs pourquoi la matrice $\begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} & \mathrm{e} \\ 0 & \pi & -11 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ ne peut pas être diagonalisable ?

**4)** Soit $A$ une matrice que l'on suppose diagonalisable. Exprimer son rang en fonction des valeurs propres de $A$ et de leur multiplicité.

**5)** Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$, en montrant au préalable que $A$ est diagonalisable.

**6)** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension fini $n$, que l'on suppose de rang égal à 1. Montrer qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $f \circ f = \lambda f$, et que ce réel est une valeur propre de $f$.

[*Indication :* fixer un vecteur $u \in E$ tel que $u \notin \operatorname{Ker} f$, noter $F$ la droite de base $u$, montrer que $E = F \oplus \operatorname{Ker} f$, en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) - \lambda u \in \operatorname{Ker} f$, et conclure].

**7)** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension fini $n$. Montrer qu'il existe toujours dans $E$ au moins une droite stable[1] par $f$ ou un plan stable par $f$.

[*Indication :* on pourra distinguer suivant que $f$ admet au moins une valeur propre réelle, ou n'admet aucune valeur propre réelle].

1. Rappel : un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est dit stable par $f$ lorsque $f(v) \in F$ quel que soit $v \in F$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

vendredi 13 novembre 2015

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 4**

**Durée : deux heures.** *Sans documents, sans calculatrice.*

---

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer son rang et sa trace. En déduire que $A$ admet une valeur propre triple et une valeur propre simple, que l'on déterminera. Est-ce que $A$ est diagonalisable ?

EXERCICE 2

Soit $q$ un réel quelconque fixé. On considère la matrice :

$$A_q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & q+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

**1)** Déterminer, en discutant suivant les valeurs du paramètre $q$, les valeurs propres de $A_q$ et leur multiplicité.

**2)** Quelles sont les valeurs de $q$ pour lesquelles $A_q$ est diagonalisable ?

EXERCICE 3

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**1)** En déterminant le sous-espace $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$, montrer que 1 est valeur propre de $f$.

**2)** En déterminant le sous-espace $E_2 = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$, montrer que 2 est valeur propre de $f$.

**3)** On considère le vecteur $u = (3, -2, -8, 0)$. Vérifier que $u \in E_2$, puis déterminer deux vecteurs $v$ et $w$ dont la deuxième coordonnée est nulle et qui vérifient :

$$f(v) = 2v + u \quad \text{et} \quad f(w) = 2w + v.$$

**4)** Choisir un vecteur non-nul quelconque $e \in E_1$ et montrer que la famille $\mathscr{B}' = (e, u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Ecrire la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$.

**5)** En utilisant $A'$, calculer le polynôme caractéristique $P_f$ de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

.../...

Exercice 4 (*Symétries et projections*)

A. Question de cours. – Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F$ et $H$ deux sous-espaces vectoriels non-nuls de $E$ tels que $E = F \oplus H$. On note $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $H$, et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $H$.

**1)** Rappeler (sans démonstration) : la définition de $p$, à quoi est égal $p \circ p$, quelles sont les valeurs propres de $p$ et les sous-espaces propres associés.

**2)** Rappeler (sans démonstration) : la définition de $s$, à quoi est égal $s \circ s$, quelles sont les valeurs propres de $s$ et les sous-espaces propres associés.

B. Exemple d'application. – Pour tout couple de réels $(a, b)$, on considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+b & -4a & 0 \\ -4a & -3a+b & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** Déterminer l'ensemble des couples $(a, b)$ pour lesquels $M_{a,b}$ est inversible.

**2)** Montrer que $M_{a,b}$ admet pour valeurs propres $\lambda = b + 5a$, $\mu = b - 5a$ et $\gamma = 1$. Vérifier que ce résultat est cohérent avec celui de la question 1).

**3)** Calculer le carré : $M_{a,b} \times M_{a,b}$.

**4)** En utilisant la question 3), montrer qu'il existe un unique couple $(a, b)$ pour lequel $f_{a,b}$ est une projection (sur un sous-espace vectoriel $F$, parallèlement à un sous-espace vectoriel $H$, que l'on déterminera). Vérifier que ce résultat est cohérent avec celui de la question 2).

**5)** En utilisant la question 3), montrer qu'il existe exactement trois couples $(a, b)$ pour lesquels $f_{a,b}$ est une symétrie (par rapport à un sous-espace vectoriel $F$, parallèlement à un sous-espace vectoriel $H$, que l'on déterminera). Vérifier que le résultat trouvé est cohérent avec celui de la question 2).

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 25 novembre 2015

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 5**

**Durée : deux heures.** *Sans documents, sans calculatrice.*

---

EXERCICE 1 (*Système différentiel linéaire*)

Déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) &= -3x - 2y - 2z \\ y'(t) &= 2x + y + 2z \\ z'(t) &= 3x + 3y + 2z \end{cases}$$

EXERCICE 2 (*Trigonalisation*)

Soit $f$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 \\ -4 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

**1)** Montrer que $f$ admet une valeur propre simple $\lambda_0$ et une valeur propre double $\lambda_1$, que l'on déterminera.

**2)** Montrer que le sous-espace propre $E_{\lambda_0}$ est une droite. On appelle $u$ le vecteur de base dont la troisième coordonnée vaut 1.

**3)** On introduit l'endomorphisme $g = f - \lambda_1 \operatorname{id}_E$ et $B$ sa matrice dans la base canonique.

**a)** Montrer que le sous-espace propre $E_{\lambda_1} = \operatorname{Ker} g$ est une droite.

**b)** Calculer $B^2$.

**c)** On note $F = \operatorname{Ker} g^2$. Montrer que $F$ est un plan contenant $E_{\lambda_1}$. Montrer que le vecteur $w = (1, 0, 0)$ appartient à $F$. Montrer que le vecteur $v = g(w)$ appartient à $E_{\lambda_1}$ et vérifier que $(v, w)$ est une base de $F$.

**d)** Calculer $f(w)$ en fonction de $v$ et $w$.

**4)** Montrer que $(u, v, w)$ est une base de $E$ et déterminer la matrice de passage $P$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

**5)** Déterminer (de la façon la plus simple possible) la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\mathscr{C}$.

**6)** Conclure qu'il existe une matrice $D$ diagonale et une matrice $N$ nilpotente telles que :

$$A' = D + N \text{ avec } DN = ND.$$

.../...

Exercice 3 (*Diagonalisation et suite récurrente*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 1+q \end{pmatrix}$, où $q$ est un réel fixé <u>différent de 1</u>.

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$.

**1)** Montrer que $A$ est diagonalisable.

**2)** En déduire le calcul de $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**3)** Vérifier qu'il existe deux suites réelles $(a_n)$ et $(b_n)$, que l'on exprimera explicitement en fonction de $n$ et $q$, telles que :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}.$$

**4)** Pour quelles valeurs de $q$ les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont-elles convergentes ?

**5)** On note $E$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = (1+q)u_{n+1} - qu_n \qquad (\star).$$

En utilisant la question 3), montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les suites réelles, dont on déterminera une base.

**6)** On suppose maintenant dans cette dernière question que $q = 1$.

**a)** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

**b)** Déterminer une base $\mathscr{C} = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{C}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**c)** Calculer $A^n$.

Exercice 4 (*Théorème de Cayley-Hamilton*)

Soit $f$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** Déterminer le polynôme caractéristique $P_f(x)$.

**2)** Montrer que $f^3$ est l'endomorphisme nul et que $f^2$ n'est pas l'endomorphisme nul.

**3)** Soit $u$ un vecteur de $E$ tel que $f^2(u) \neq 0_E$.

**a)** Déduire de la question 2) que les vecteurs $f^2(u), f(u), u$ forment une famille libre.

**b)** Vérifier que $\mathscr{C} = (f^2(u), f(u), u)$ est une base de $E$ et déterminer la matrice $N$ de $f$ dans la base $\mathscr{C}$.

Université Blaise Pascal, mercredi 19 novembre 2014
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 5**

**Durée : deux heures.** *Sans documents, sans calculatrice.*

---

EXERCICE 1 (*systèmes différentiels linéaires*)

**1)** Déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases}.$$

**2)** On considère le système différentiel :

$$(S')\ \begin{cases} x'(t) = 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

**a)** Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les réels $a, b, c, d, e, f$ pour que le triplet de fonctions :

$$x_2(t) = (at+b)\mathrm{e}^{2t}, \quad y_2(t) = (ct+d)\mathrm{e}^{2t}, \quad z_2(t) = (et+f)\mathrm{e}^{2t}$$

soit solution de $(S')$.

**b)** Déterminer tous les triplets de fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de $(S')$.

EXERCICE 2 (*théorème de Cayley-Hamilton*)

**1)** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le polynôme $F(x) = 2x^8 - 3x^5 + x^4 + x^2 - 4$.

**a)** Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de $A$.

**b)** Calculer la matrice $F(A)$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ fixée quelconque. Soit $P_A(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{C}[x]$ son polynôme caractéristique.

**a)** Rappeler ce que valent, en fonction de $A$, les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

**b)** En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que, si $A$ est de trace non-nulle, alors toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2M = MA^2$ vérifie aussi $AM = MA$.

## Exercice 3 (*projections et symétries orthogonales*)

On se place dans l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $E$. On considère le plan vectoriel $F$ de base $\{u, v\}$ où $u = (1, 0, 1)$ et $v = (1, -1, 2)$.

**1)** Déterminer une équation de $F$.

**2)** Déterminer une base de $F^{\perp}$.

**3)** Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale $p$ sur $F$.

**4)** Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la symétrie orthogonale $s$ par rapport à $F$.

**5)** Quel est le rang de $p$ ? le rang de $s$ ? Quelle est l'application $p \circ s$ ? l'application $s \circ p$ ?

## Exercice 4 (*produit scalaire et diagonalisation*)

Fixons $a$ un réel quelconque et $b$ un réel <u>non-nul</u>. On considère dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

**1)** Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ la matrice $A_{a,b}$ est-elle inversible. Calculer le rang de $A_{a,b}$ en discutant suivant les valeurs de $a$ et $b$.

**2)** On se place dans l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $E$. On considère la forme bilinéaire symétrique sur $E$ définie en posant pour tous $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ de $E$ :

$$\langle u \,|\, v \rangle = (x, y, z, t) \times A_{a,b} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

On ne demande pas de redémontrer ici que l'on obtient bien ainsi une forme bilinéaire symétrique.

**a)** Montrer que $\langle u \,|\, u \rangle = ax^2 + ay^2 + az^2 + at^2 + 2bxz + 2byt$, pour tout $u = (x, y, z, t) \in E$.

**b)** Si $a = 0$, $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est-il un produit scalaire ?

**c)** Si $a < 0$, $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est-il un produit scalaire ?

**d)** Si $a > 0$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ et $b$ pour que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ soit un produit scalaire.

**3)** On considère dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**a)** Calculer le produit de $P$ par sa transposée ${}^tP$. Que peut-on en déduire ?

**b)** En utilisant $P$, montrer que $A_{a,b}$ admet deux valeurs propres distinctes $\lambda$ et $\mu$ et que les deux sous-espaces propres $E_\lambda$ et $E_\mu$ sont supplémentaires et orthogonaux (pour le produit scalaire canonique) ; donner une base $\mathscr{B}'$ de $E$ formée de vecteurs propres de $A_{a,b}$ et orthonormale (pour le produit scalaire canonique).

**c)** Par changement de base dans la formule définissant $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$, exprimer la valeur de $\langle u \,|\, v \rangle$ en fonction des coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ de deux vecteurs quelconques $u$ et $v$ de $E$. Retrouver ainsi de façon immédiate les résultats de la question 2).

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 26 septembre 2012

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 2**

**Durée : deux heures.** *Sans documents.*

---

## Exercice 1

On considère l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $E$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 1$, on considère l'endomorphisme $f_a$ de $E$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M_a = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & a-1 & a-1 \\ a-1 & a+2 & a-1 \\ a-1 & a-1 & a+2 \end{pmatrix}$$

**1)** Montrer que l'ensemble des vecteurs $u$ de $E$ qui vérifient $f_a(u) = u$ est un plan $P$ de $E$.

**2)** Montrer que $a$ est valeur propre simple de $f_a$. Déterminer le sous-espace propre associé $D$.

**3)** En déduire que $M_a$ admet deux valeurs propres distinctes et que les sous-espaces propres associés sont orthogonaux.

**4)** Donner une base de $E$ qui soit constituée de vecteurs propres de $M_a$ et qui soit orthogonale. En déduire une base $\mathscr{B}'$ de $E$ qui soit constituée de vecteurs propres de $M_a$ et qui soit orthonormale.

**5)** Soit $Q$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Calculer le produit de $Q$ par sa transposée. Que peut-on en déduire pour $Q$ ? Donner la matrice $\Delta_a$ de $f_a$ dans la base $\mathscr{B}'$.

**6)** En déduire que, pour $a = 0$, $f_a$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ que l'on déterminera.

**7)** Montrer que, pour $a = -1$, $f_a$ est la symétrie orthogonale par rapport à $F$.

*suite au verso...*

## Exercice 2

On se place dans un espace vectoriel euclidien. On note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $n = \dim E$.

**I.** On fixe un vecteur $a$ dans $E$ tel que $\|a\| = 1$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'application $f_\alpha : E \to E$ définie par :

$$f_\alpha(x) = x + \alpha\langle a|x\rangle\, a \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

**1)** Propriétés des applications $f_\alpha$.

- **a)** Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $f_\alpha$ est linéaire.
- **b)** Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\gamma$ que l'on exprimera en fonction de $\alpha$ et $\beta$, tel que $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha = f_\gamma$.
- **c)** Montrer qu'il existe une unique valeur $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ telle que $f_{\alpha_0} = \mathrm{id}_E$.
- **d)** Pour quelles valeurs de $\alpha$ l'endomorphisme $f_\alpha$ est-il bijectif ? Montrer qu'alors l'endomorphisme réciproque $f_\alpha^{-1}$ est de la forme $f_{\alpha'}$ pour une valeur de $\alpha'$ que l'on exprimera en fonction de $\alpha$.
- **e)** En résumant les questions précédentes, que peut-on dire de $G = \{f_\alpha \,;\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1\}$ ?

**2)** Valeurs propres des endomorphismes $f_\alpha$. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **a)** Montrer que tout vecteur non-nul de $E$ qui est orthogonal à $a$ est un vecteur propre de $f_\alpha$ associé à une valeur propre que l'on précisera.
- **b)** Montrer que tout vecteur non-nul de $E$ qui est colinéaire à $a$ est un vecteur propre de $f_\alpha$ associé à une valeur propre que l'on précisera.
- **c)** En déduire toutes les valeurs propres de $f_\alpha$ et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme $f_\alpha$ est-il diagonalisable ?

**II.** On fixe deux vecteurs $a$ et $b$ dans $E$ tel que $\|a\| = \|b\| = 1$. On considère l'application $g : E \to E$ définie par :

$$g(x) = x - \langle a|x\rangle b \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

**1)** Vérifier que $\langle a \,|\, b\rangle = 1$ si et seulement si $a = b$.
► *Indication :* penser au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**2)** Montrer que $g$ est linéaire. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs $a$ et $b$ pour que $g$ soit bijective.
► *Indication :* calculer $\langle a \,|\, x\rangle$ pour $x \in \operatorname{Ker} g$.

Lorsque cette condition est satisfaite, donner pour tout $y \in E$ une expression explicite de $g^{-1}(y)$ en fonction de $y$, $a$ et $b$.

**3)** Déterminer que les seules valeurs propres possibles de $g$ sont 1 et $1 - \langle a \,|\, b\rangle$.
► *Indication :* montrer que, si $x$ est un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda$ de $g$, alors

$$\langle a \,|\, x\rangle\langle a \,|\, b\rangle = (1-\lambda)\langle a \,|\, x\rangle.$$

En déduire que $g$ est diagonalisable si et seulement si les vecteurs $a$ et $b$ ne sont pas orthogonaux.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 2 octobre 2013

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 2**

**Durée : deux heures.** *Sans documents.*

---

## EXERCICE 1

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Sans aucun calcul, montrer que $A$ est diagonalisable.

2) En déduire qu'il existe deux plans $F$ et $H$ dans $\mathbb{R}^4$, supplémentaires et orthogonaux, tels que, si l'on appelle $p$ la projection orthogonale sur $F$ et $q$ la projection orthogonale sur $H$, alors on a :
$$f = 5p - q, \qquad p + q = \mathrm{id}_E, \qquad p \circ q = O.$$

## EXERCICE 2

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, on note $s_F$ la symétrie orthogonales par rapport à $F$ dans $E$.

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $F \perp G$.

1) Soient $y \in F$ et $z \in G$. Calculer $s_F(y)$, $s_F(z)$, $s_G(y)$ et $s_G(z)$.

2) En déduire que $s_F \circ s_G = s_{H^\perp}$ où l'on a posé $H = F + G$.

## EXERCICE 3

On considère dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ l'endomorphisme $f$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & dc \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b, c, d \text{ sont des réels non tous nuls.}$$

1) Calculer le rang de $A$.

2) Sans aucun calcul, montrer que $A$ est diagonalisable.

3) A l'aide des deux questions précédentes, déduire avec le moins de calculs possible les valeurs propres et sous-espaces propres de $A$.

## Exercice 4

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit *anti-symétrique* lorsque son endomorphisme transposé est égal à $-f$, ce qui équivaut à dire que :

$$\langle f(x) \,|\, y\rangle = -\langle x \,|\, f(y)\rangle \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

**1)** Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que $f$ est antisymétrique si et seulement si on a : $f(x) \perp x$ pour tout $x \in E$.

**2)** Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$. Montrer que $f$ est antisymétrique si et seulement si $A$ est antisymétrique (au sens où ${}^tA = -A$).

**3)** Soit $f$ un endomorphisme antisymétrique de $E$. Quelle est la seule valeur propre réelle possible de $f$ ?

**4)** Soient $f$ un endomorphisme antisymétrique de $E$ et $A$ sa matrice dans une base orthonormée.

- **a)** Montrer que, si $n$ est impair, alors $A$ n'est pas inversible et $f$ n'est pas bijectif.
- **b)** Montrer que, si $n$ est pair, alors $\det f = \det A \geq 0$. [*Indication :* on pourra introduire le polynôme caractéristique de $P_f = P_A$ et utiliser la question 3)].

**5)** Soit $f$ un endomorphisme antisymétrique de $E$.

- **a)** Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont suplémentaires orthogonaux.
- **b)** Notons $F = \operatorname{Im} f$ et $g$ la restiction de $f$ à $F$. Montrer que $g$ est un automorphisme de $F$ et que $g$ est antisymétrique.
- **c)** En déduire que $f$ est de rang pair. [*Indication :* on pourra appliquer à $F$ la question 4.a)].

**6)** Soit $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$. Montrer que $f$ est antisymétrique si et seulement $f \circ f = -\operatorname{id}_E$.

**7)** (*Transformation de Cayley*) Soit $\mathscr{A}$ le sous-ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.
- **b)** Montrer que, pour toute $A \in \mathscr{A}$, la matrice $A + I_n$ est inversible [*Indication :* on pourra utiliser la question 3)].
- **c)** En posant $\varphi(A) = (I_n - A) \times (I_n + A)^{-1}$ pour toute $A \in \mathscr{A}$, montrer que $\varphi$ définit une bijection de $\mathscr{A}$ sur l'ensemble $\Omega$ formé des matrices orthogonales n'admettant pas $-1$ pour valeur propre.

**8)** (*Cas de la dimension 3)*. On suppose ici que l'espace vectoriel $E$ est de dimension 3.

- **a)** Montrer que, pour tout $u \in E$, l'application $f : E \to E$ défini par $f(x) = u \wedge x$ pour tout $x \in E$ est un endomorphisme antisymétrique de $E$.
- **b)** Montrer réciproquement que, pour tout endomorphisme antisymétrique $f$ de $E$, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $f(x) = u \wedge x$ pour tout $x \in E$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 26 novembre 2014

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 6**

**Durée : deux heures.** *Sans documents, sans calculatrice.*

---

EXERCICE 1 (*Notion de produit scalaire et inégalité de Cauchy-Schwarz* )

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. On note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ son produit scalaire. On fixe $a \in E$ un vecteur *unitaire* (c'est-à-dire $\|a\| = 1$). Soit $k$ un réel. On définit une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x, y) = \langle x \mid y\rangle + k\langle x \mid a\rangle\langle y \mid a\rangle \quad \text{pour tous } x, y \in E$$

**1)** Montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique pour tout $k \in \mathbb{R}$.

**2)** Montrer que, si $\varphi$ est un produit scalaire, alors $k + 1 > 0$.

**3)** Montrer que, si $k \geq 0$, alors $\varphi$ est un produit scalaire.

**4)** On suppose ici que $-1 < k < 0$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\varphi(x, x) > 0$ pour tout vecteur *non-nul* $x$ de $E$.

**5)** Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante portant sur $k$ pour que $\varphi$ soit un produit scalaire sur $E$.

EXERCICE 2 (*Norme euclidienne et inégalité de Cauchy-Schwarz* )

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. On note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. On note $S$ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ unitaires (c'est-à-dire tels que $\|x\| = 1$).

On fixe deux vecteurs $x$ et $y$ quelconques *distincts* dans $S$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le vecteur $z_\lambda = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

**1)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|z_\lambda\|^2$ sous la forme $a\lambda^2 + b\lambda + c$ où $a, b, c$ sont trois réels que l'on calculera en fonction de $\langle x \mid y\rangle$.

**2)** Montrer que $a > 0$.

**3)** En déduire que, pour tout $\lambda$ différent de 0 et de 1, on a $z_\lambda \notin S$.

EXERCICE 3 (*Hyperplans et formes linéaires*)

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n \geq 3$. On fixe deux vecteurs *unitaires* $a$ et $b$ (c'est-à-dire $\|a\| = \|b\| = 1$), que l'on suppose *non colinéaires*. On appelle $H_a$ l'hyperplan de $E$ dont $a$ est un vecteur normal, et $H_b$ l'hyperplan de $E$ dont $b$ est un vecteur normal.

**1)** Montrer que $H_a \neq H_b$ et calculer la dimension du sous-espace vectoriel $H_a \cap H_b$.

**2)** Montrer que l'application $g : E \to E$ définie par :

$$g(x) = \langle x|b\rangle\, a + \langle x|a\rangle\, b \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

est linéaire et déterminer son noyau $\operatorname{Ker} g$. En déduire que $g$ est de rang 2.

Exercice 4 (*Symétries et projection orthogonales*)

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Pour tout couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+b & -4a & 0 \\ -4a & -3a+b & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** Déterminer l'ensemble des couples $(a, b)$ pour lesquels $M_{a,b}$ est inversible.

**2)** Montrer que $M_{a,b}$ admet pour valeurs propres $\lambda = b + 5a$, $\mu = b - 5a$ et $\gamma = 1$. Vérifier que ce résultat est cohérent avec celui de la question 1).

**3)** Calculer le carré : $M_{a,b} \times M_{a,b}$.

**4)** En utilisant la question 3), déterminer les couples $(a, b)$ tels que $f_{a,b}$ est une symétrie. Vérifier que le résultat trouvé est cohérent avec celui de la question 2).

Montrer qu'il existe exactement deux couples $(a, b)$ pour lesquels $f_{a,b}$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel $F$ que l'on déterminera.

**5)** En utilisant la question 3), montrer qu'il existe un unique couple $(a, b)$ pour lequel $f_{a,b}$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel $H$ que l'on déterminera. Vérifier que ce résultat est cohérent avec celui de la question 2).

Exercice 5 (*Produit scalaire sur des espaces de polynômes*)

On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. On note $F$ le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[x]$ de $E$ constitué des polynômes de degré au plus 1. On note $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $E$. On munit $E$ du produit scalaire :

$$\langle s \,|\, t \rangle = \int_0^1 s(x)t(x)\,dx \qquad \text{pour tous } s, t \in E$$

(on ne demande pas de revérifier que c'est effectivement un produit scalaire).
Enfin, on note $f$ la projection orthogonale sur $F$.

**1)** Calculer $\langle 1 \,|\, x \rangle$, $\langle 1 \,|\, x^2 \rangle$, $\langle x \,|\, x^2 \rangle$. Calculer aussi $\langle 1 \,|\, 1 \rangle$, $\langle x \,|\, x \rangle$, $\langle x^2 \,|\, x^2 \rangle$.

**2)** Construire à partir de $\mathscr{B}$ une base $\mathscr{B}_0 = (p_0, q_0, r_0)$ de $E$ orthogonale pour ce produit scalaire, et en déduire une base orthonormale $\mathscr{B}' = (p, q, r)$ de $E$.

**3)** Déterminer le projeté orthogonal $f(x^2)$ de $x^2$ sur $F$.

**4)** Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ l'intégrale $I_{a,b} = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ est-elle minimale ?

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 10 octobre 2012

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 3**

**Durée : deux heures.** *Sans documents.*

---

## EXERCICE 1

On se place dans un espace vectoriel euclidien orienté $E$ de dimension 3. On fixe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de $E$. On fixe trois réels $a, b, c$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On note $u$ le vecteur de $E$ de composantes $(a, b, c)$ dans la base $\mathscr{B}$, qui est donc unitaire.

**1)** Montrer que l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice par rapport à la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$$

est une isométrie vectorielle [c'est-à-dire un élément de $\mathrm{O}(E)$].

**2)** Montrer que l'application $g : E \to E$ définie par :

$$g(x) = \langle x|u \rangle \, u \quad \text{pour tout } x \in E.$$

est linéaire. Ecrire sa matrice $B$ dans la base $\mathscr{B}$.

**3)** Montrer que l'application $h : E \to E$ définie par :

$$h(x) = u \wedge x \quad \text{pour tout } x \in E.$$

est linéaire. Ecrire sa matrice $C$ dans la base $\mathscr{B}$.

**4)** Déduire des questions précédentes que :

$$f(x) = \langle x|u \rangle u + u \wedge x \text{ pour tout } x \in E.$$

**5)** Calculer $f(u)$. Montrer que l'on peut choisir $v, w$ dans $E$ tels que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ soit une base orthonormale directe de $E$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$. Conclure que $f$ est une rotation d'axe dirigé et orienté par $u$, et dont on déterminera l'angle.

*suite au verso...*

## Exercice 2

On se place dans un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n \geq 3$. On fixe deux vecteurs unitaires $a$ et $b$, que l'on suppose non colinéaires. On appelle $H_a$ l'hyperplan de $E$ dont $a$ est un vecteur normal, et $H_b$ l'hyperplan de $E$ dont $b$ est un vecteur normal.

**1)** Montrer que $H_a \neq H_b$ et calculer la dimension du sous-espace vectoriel $H_a \cap H_b$.

**2)** Montrer que l'application $f : E \to E$ définie par :

$$f(x) = \langle x|b \rangle \, a \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

est linéaire. Montrer que l'endomorphisme transposé ${}^t f$ vérifie :

$${}^t f(y) = \langle y|a \rangle \, b \qquad \text{pour tout } y \in E.$$

**3)** On introduit l'endomorphisme $g = f + {}^t f$ de $E$.

**a)** Calculer $\operatorname{Ker} g$. En déduire que 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-2$ de $g$.

**b)** Calculer $g(a+b)$ et $g(a-b)$ ; en déduire que $g$ admet deux valeurs propres $\lambda$ et $\mu$, non-nulles et distinctes, que l'on déterminera explicitement.

**c)** Conclure que $g$ est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont deux à deux othogonaux.

**d)** Le résultat du c) était-il prévisible sans aucun calcul ?

## Exercice 3

On se place dans un espace vectoriel euclidien orienté $E$ de dimension 3. On fixe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de $E$. Pour tous réel $p, q, r$, on note $f_{p,q,r}$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice par rapport à la base $\mathscr{B}$ est :

$$M_{p,q,r} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}.$$

**1)** Montrer que $f_{p,q,r} \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $|p+q+r| = 1$ et $pq + qr + rp = 0$.

**2)** On dit que $f_{p,q,r}$ est involutif si et seulement si $f_{p,q,r} \circ f_{p,q,r} = \mathrm{id}_E$. Montrer qu'un endomorphisme $f_{p,q,r}$ qui appartient à O(E) est involutif si et seulement si $q = r$.

**3)** On note $G$ l'ensemble des endomorphismes $f_{p,q,r}$ qui appartiennent à O(E) et qui sont involutifs.

**a)** Montrer que $G$ est formé de quatre éléments, dont une symétrie orthogonale $s$ par rapport à un plan $P$ que l'on déterminera, et une rotation $r$ dont l'axe est la droite $D = P^{\perp}$.

**b)** Ecrire sous forme d'une table à quatre lignes et quatre colonnes tous les produits deux à deux (pour la loi $\circ$) des éléments de $G$. Que peut-on dire de $G$ ?

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mardi 8 octobre 2013

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

**Complément au devoir surveillé n° 2**

**Durée : 45 minutes.** *Sans documents.*

---

## Question de cours

1) Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien $E$. Rappeler trois façons équivalentes de caractériser le fait $f$ est un endomorphisme orthogonal.

2) Soit $A$ une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Rappeler trois façons équivalentes de caractériser le fait $A$ est une matrice orthogonale.

3) Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien $E$. Rappeler deux façons équivalentes de caractériser le fait $f$ est un endomorphisme symétrique.

## Exercice

Soit $a$ un réel quelconque fixé.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A$ est diagonalisable pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que le vecteur $w(1,1,1,1)$ est un vecteur propre de $A$ pour une valeur propre $\lambda_1$ que l'on déterminera.

3) Déterminer (par une ou des équations, et par une base) le sous-espace propre $E_1$ associé à cette valeur propre $\lambda_1$.

4) Déterminer (par une ou des équations, et par une base) le supplémentaire orthogonal $E_1^\perp$.

5) Montrer que $A$ admet une valeur propre $\lambda_2 \neq \lambda_1$ que l'on déterminera, telle que le sous-espace propre associé $E_2$ est égal à $E_1^\perp$.

6) Déterminer une matrice orthogonale $P$ dans $\mathrm{O}(4,\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 16 octobre 2013

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Extrait du devoir surveillé n° 3**

**Durée : 30 minutes.** *Sans documents.*

---

## EXERCICE 3

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de $E$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

**1)** Montrer que $f$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Est-elle directe ou indirecte ?

**2)** Montrer que 1 est valeur propre de $f$ et déterminer le sous-espace propre associé.

**3)** Décrire géométriquement $f$.

**4)** En déduire la description géométrique de $f^2 = f \circ f$, de $f^3$ et de $f^{-1}$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 10 décembre 2014

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 7**

**Durée : deux heures.** *Sans documents, sans calculatrice.*

---

EXERCICE 1 (*des exemples concrets en dimension 3*)

On considère $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de $E$.

**1)** Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Montrer que $f$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel $F$ que l'on déterminera.

**2)** Soit $g$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

**a)** Montrer que $g$ est un endomorphisme orthogonal de $E$.

**b)** Soit $H$ le plan d'équation $x + z = 0$ dans la base $\mathscr{B}$. Donner une base orthonormée directe $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ de $E$ tels que $v$ et $w$ appartiennent à $H$.

**c)** Montrer que $H$ est stable par $g$ et que la restriction de $g$ à $H$ est une rotation de $H$.

**d)** Déterminer la matrice $A'$ de $g$ dans la base $\mathscr{B}'$ et décrire géométriquement $g$.

**3)** Soit $h$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $C = PD\,{}^tP$.

**4)** Soit $s$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $S = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,

où $a$ et $b$ sont deux réels quelconques fixés.

**a)** Montrer qu'il existe exactement 4 couples $(a, b)$, que l'on déterminera explicitement, pour lesquels $s$ est un endomorphisme orthogonal.

**b)** Décrire géométriquement $s$ dans chacun des quatre cas.

.../...

Exercice 2 (*endomorphismes concervant l'orthogonalité*)

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ vérifiant la propriété suivante :

$$\text{pour tous vecteurs } x, y \in E, \text{ si } x \perp y, \text{ alors } f(x) \perp f(y).$$

**1)** Soient $u, v \in E$ deux vecteurs *unitaires*. Calculer $\langle u+v \,|\, u-v \rangle$, calculer $\langle f(u+v) \,|\, f(u-v) \rangle$, et comparer $\|f(u)\|$ et $\|f(v)\|$.

**2)** Déduire qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

**3)** Conclure qu'il existe $g \in \mathrm{O}(E)$ tel que $f = \alpha g$.

Exercice 3 (*endomorphismes antisymétriques*)

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ son produit scalaire. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $E$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$.

**1)** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\langle f(x) \,|\, y \rangle = -\langle x \,|\, f(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.

(ii) $\langle f(x) \,|\, x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

(iii) $A$ est une matrice antisymétrique.

**2)** On suppose que $f$ vérifie l'une des conditions équivalentes ci-dessus.

**a)** Quelle est la seule valeur propre réelle possible pour $f$ ?

**b)** Montrer que si $n$ est impair, alors $f$ n'est pas bijectif.

**c)** On suppose maintenant que $n$ est pair.
Montrer que si $f$ admet une valeur propre réelle, alors $f$ n'est pas bijectif.
Montrer que si $f$ n'admet pas de valeur propre réelle, alors $\det f > 0$.

**d)** Déduire de a) que la matrice $A + I_n$ est inversible.

**e)** Montrer que la matrice $B = (I_n - A) \times (I_n + A)^{-1}$ est une matrice orthogonale.

Exercice 4 (*à n'aborder qu'après les trois premiers exercices*)

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ que l'on suppose *symétrique*. On note :

$$H_f = \{x \in E \,;\, \langle f(x) \,|\, x \rangle = 1\}.$$

**1)** Montrer qu'il existe un entier $1 \leq s \leq n$ et des réels deux à deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ qui sont valeurs propres de $f$. On note $\lambda^+$ et $\lambda^-$ le maximum et le minimum des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.

**2)** Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de $E$ formée par des vecteurs propres de $f$.

**3)** En déduire que, pour tout $x \in E$, on a : $\lambda^+ \|x\|^2 \leq \langle f(x) \,|\, x \rangle \leq \lambda^- \|x\|^2$.

**4)** Fixons dans $\mathscr{B}'$ un vecteur propre $e^+$ associé à la valeur propre $\lambda^+$, et un vecteur propre $e^-$ associé à la valeur propre $\lambda^-$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons $u_t = (\cos t) e^- + (\sin t) e^+$ et $\varphi(t) = \langle f(u_t) \,|\, u_t \rangle$. Montrer que $e_t$ est unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**5)** Déduire de 3) et 4) que $H_f$ contient un vecteur unitaire si et seulement si $\lambda^- \leq 1 \leq \lambda^+$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 16 décembre 2015

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

**Devoir surveillé n° 6**

**Durée : deux heures.** *Sans documents, sans calculatrice.*

---

QUESTION DE COURS (*Différentes traductions de la notion de matrice orthogonale*)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, $\mathscr{C}$ la famille des vecteurs colonnes de $A$, et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A$. Que signifie que $A$ une matrice orthogonale : pour la matrice $A$ elle-même ? pour la famille $\mathscr{C}$ ? pour l'endomorphisme $f$ ?

EXERCICE 1 (*Endomorphisme symétrique*)

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3. On considère dans $E$ le produit scalaire défini par :

$$\langle p \,|\, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \quad \text{pour toutes } p, q \in E. \qquad (\star)$$

On ne demande pas de redémontrer que c'est effectivement un produit scalaire, ce qui a été vérifié en cours. On définit l'application $f : E \to E$ qui, à toute fonction $p \in E$ associe la fonction :

$$f(p) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1-x^2)p''(x) - 2xp'(x) \end{array}. \qquad (\star\star)$$

**1)** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

**2)** Déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, x, x^2, x^3)$ de $E$.

**3)** Déterminer les valeurs propres de $f$.

**4)** Déterminer $u, v \in E$ tels que $\mathscr{B}' = (1, x, u, v)$ soit une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.

**5)** Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base orthogonale de $E$.

**6)** Conclure que $f$ est symétrique.

**7)** On se place dans cette dernière question dans un contexte plus général en désignant par $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, toujours muni du produit scalaire $(\star)$, et l'endomorphisme $f$ défini par $(\star\star)$.

- **a)** Pour toute fonction $p \in E$, exprimer $f(p)$ comme la dérivée d'une certaine fonction de $E$.
- **b)** A l'aide de deux intégrations par parties successives, en déduire que $\langle f(p) \,|\, q \rangle = \langle p \,|\, f(q) \rangle$ pour toutes $p, q \in E$.
- **c)** Comparer avec la question 6) et faire un commentaire pertinent.

.../...

## Exercice 2 (*"Division vectorielle"*)

Soit $E$ l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$. Le but de l'exercice est de déterminer, lorsque $a$ et $b$ sont deux vecteurs non-nuls de $E$, tous les vecteurs $x$ de $E$ vérifiant $x \wedge a = b$.

**1)** Question préliminaire : montrer la formule suivante, dite du "double produit vectoriel" :

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u \mid w \rangle \, v - \langle v \mid w \rangle \, u \quad \text{pour tous } u, v, w \in E.$$

**2)** Soient $a$ et $b$ deux vecteurs non-nuls de $E$, que l'on suppose non orthogonaux. Déterminer l'ensemble de tous les vecteurs $x$ de $E$ tels que $x \wedge a = b$.

**3)** Soient $a$ et $b$ deux vecteurs non-nuls de $E$, que l'on suppose orthogonaux.

**a)** Montrer que le vecteur $x_0 = \frac{1}{\|a\|^2} \, a \wedge b$ vérifie $x_0 \wedge a = b$.

**b)** Déterminer l'ensemble de tous les vecteurs $x$ de $E$ vérifiant $x \wedge a = 0_E$.

**c)** Déduire de a) et b) l'ensemble de tous les vecteurs $x$ de $E$ vérifiant $x \wedge a = b$.

*Indication :* on pourra pour les questions 3.a) et 3.b) utiliser la question 1).

## Exercice 3 (*Endomorphismes orthogonaux*)

On note $E$ l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}$. Pour tous réels non-nuls $a, b, c$, on considère la matrice :

$$M_{a,b,c} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2a}{c} & -\frac{2a}{b} \\ -\frac{2c}{a} & 1 & -\frac{2c}{a} \\ -\frac{2b}{a} & -\frac{2a}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** Montrer que, si $a = b = c$, alors $M_{a,b,c} = S$ est la matrice d'une symétrie orthogonale $s$ de $E$ par rapport à un plan $P$ que l'on déterminera.

**2)** Montrer que, si $a = b = -c$, alors $M_{a,b,c} = T$ est la matrice d'une symétrie orthogonale $t$ de $E$ par rapport à un plan $Q$ que l'on déterminera.

**3)** On revient au cas où $a, b, c$ sont quelconques non-nuls dans $\mathbb{R}$.

**a)** Calculer le déterminant de $M_{a,b,c}$ et montrer qu'il ne dépend pas de $c$.

**b)** Déterminer toutes les valeurs de $a, b, c$ pour lesquelles la matrice $M_{a,b,c}$ est orthogonale.

**c)** En déduire que $M_{a,b,c}$ ne peut pas être la matrice d'un endomorphisme orthogonal direct dans $E$ ; comparer avec les résultats des questions précédentes et faire un commentaire pertinent.

**4)** Si la matrice $M_{a,b,c}$ est orthogonale, est-elle nécessairement symétrique ? Si la matrice $M_{a,b,c}$ est symétrique, est-elle nécessairement orthogonale ?