Université Blaise Pascal
U.F.R. Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Licence Sciences - Langues

Deuxième année

MATHÉMATIQUES

Notes de cours (première partie)

2015-2016

François Dumas

Université Blaise Pascal
U.F.R. Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Licence Sciences - Langues

Deuxième année

MATHÉMATIQUES

Notes de cours (première partie)

2015-2016

François Dumas

Ces notes sont organisées en cinq chapitres (trois en analyse consacrés aux séries, deux relevant de l'algèbre linéaire et s'appliquant en géométrie), incluant de nombreux exercices d'application, complétés par des sujets de devoirs des années antérieures.

Elles correspondent à un contenu, un niveau et un mode d'exposition propres au programme et aux objectifs de la formation concernée.

Le fait de les mettre à la disposition des étudiants comme support à leur travail personnel ne signifie pas qu'il s'agisse d'un document parfaitement finalisé, dans sa conception comme dans sa rédaction. Je suis donc par avance reconnaissant à toutes celles et tous ceux qui me signaleront les erreurs, manques, imperfections, coquilles,... qu'il contient immanquablement.

version du 16 décembre 2015 Francois.Dumas@univ-bpclermont.fr

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

Conformément à ce que prévoit le programme, ce chapitre est plus précisément consacré à l'étude des séries *à termes réels ou complexes.*

La question de départ (qui remonte aux mathématiques grecques, comme le fameux paradoxe d'Achille et la tortue) est celui du comportement d'une somme de N nombres u_n qui deviennent de plus en plus petits. Quand n croît (voire tend vers l'infini), chaque terme u_n décroît (voire tend vers 0) mais le nombre N de termes dans la somme augmente (voire tend vers l'infini). Qu'en est-il alors de la valeur de la somme ? tend-elle vers l'infini ? ou vers une valeur finie ? Prenons dans un premier temps tous les termes positifs pour simplifier (il ne peut alors pas y avoir dans la somme de compensation entre des positifs et des négatifs). La petite exploration numérique suivante semble montrer que les situations peuvent être variées...

N	valeur de $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$	valeur de $T_N = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{N^2}$
1	1	1
2	3/2 = 1.5	5/4 = 1.25
3	11/6 $\simeq$ 1.83333333333333	49/36 $\simeq$ 1.36111111
4	25/12 $\simeq$ 2.08333333333333	205/144 $\simeq$ 1.42361111
5	137/60 $\simeq$ 2.28333333333333	5269/3600 $\simeq$ 1.46361111
6	49/20 $\simeq$ 2.45000000000000	5369/3600 $\simeq$ 1.491388888
7	363/140 $\simeq$ 2.59285714285714	266681/176400 $\simeq$ 1.51179705215420
8	761/280 $\simeq$ 2.71785714285714	1077749/705600 $\simeq$ 1.52742205215420
9	7129/2520 $\simeq$ 2.82896825396825	9778141/6350400 $\simeq$ 1.53976773116654
10	7381/2520 $\simeq$ 2.92896825396825	1968329/1270080 $\simeq$ 1.54976773116654
20	$\simeq$ 3.59773965714368	$\simeq$ 1.59616324391302
30	$\simeq$ 3.99498713092039	$\simeq$ 1.61215011760160
100	$\simeq$ 5.18737751763962	$\simeq$ 1.63498390018489
200	$\simeq$ 5.87803094812144	$\simeq$ 1.63994654601500
300	$\simeq$ 6.28266388029950	$\simeq$ 1.64160628289762
400	$\simeq$ 6.56992969117651	$\simeq$ 1.64243718924406
500	$\simeq$ 6.79282342999052	$\simeq$ 1.64293606551489
1000	$\simeq$ 7.48547086055035	$\simeq$ 1.64393456668156
2000	$\simeq$ 8.17836810361028	$\simeq$ 1.64443419182739
3000	$\simeq$ 8.58374988995919	$\simeq$ 1.64460078906428
4000	$\simeq$ 8.87139029979523	$\simeq$ 1.64468409809562
5000	$\simeq$ 9.09450885298444	$\simeq$ 1.64473408684689
10 000	$\simeq$ 9.78760603604438	$\simeq$ 1.64483407184806
100 000	$\simeq$ 12.0901461298634	$\simeq$ 1.64492406689823
200 000	$\simeq$ 12.7832908104296	$\simeq$ 1.64492906686073

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $|.|$ désigne respectivement la valeur absolue ou le module.

1.1 Notion de série

1.1.1 Terminologie des séries

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite déléments de $\mathbb{K}$. Posons pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \ \in \ \mathbb{K}.$$

S_N s'appelle la *N-ième somme partielle* associée à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. On introduit ainsi une nouvelle suite $(S_N)_{N\geq 0}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, dite *suite des sommes partielles* associée à $(u_n)_{n\geq 0}$.

On appelle *série numérique* la donnée d'un couple formé par une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ et la suite de ses sommes partielles. On note cette série : $\sum_{n\geq 0} u_n$, ou plus simplement $\sum u_n$. L'élément u_n s'appelle n-ième terme, ou *terme général* de la série. Une série dont le terme général est dans $\mathbb{R}$ s'appelle une *série réelle*.

Ce vocabulaire reste valable pour une suite $(u_n)_{n\geq p}$ définie à partir d'un certain rang p ; on note $\sum_{n\geq p} u_n$ la série associée.

1.1.2 Convergence d'une série

a) Définitions. On dit qu'une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge* lorsque la suite (S_N) de ses sommes partielles converge dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, la limite de la suite (S_N) s'appelle la *somme* de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. On la note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Donc :

$$\text{pour une série convergente } \sum_{n\geq 0} u_n, \text{ on a : } \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n \ \in \mathbb{K}.$$

On dit qu'une série numérique *diverge* lorsqu'elle ne converge pas. On dit que deux séries numériques sont *de même nature* lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Le lemme suivant exprime que : *la nature d'une série n'est pas modifiée lorsque l'on change l'indice de départ ; mais quand il y a convergence, la valeur de la somme peut être modifiée.*

b) Lemme (*Changement d'indice de départ*). *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique, et $p \in \mathbb{N}$. Alors, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq p} u_n$ sont de même nature. De plus, si elles convergent, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{p-1} u_n.$$

Preuve. Cela résulte directement de l'égalité (pour $N \geq p$) : $\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=p}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{p-1} u_n$ □

c) Proposition (*Condition nécessaire de convergence*). *Si une série numérique converge, alors son terme général tend vers 0. Plus précisément, si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.*

Preuve. Soit $\sum u_n$ une série convergente ; notons S sa somme. Si (S_n) désigne la suite des sommes partielles, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Comme (S_n) converge vers S, il est clair que $(S_n - S_{n-1})$ converge vers 0. □

Cette proposition indique qu'une série numérique $\sum u_n$ telle que la suite (u_n) ne converge pas vers 0 est nécessairement divergente. On dit alors qu'elle est *grossièrement divergente*.

Attention ! Cette condition du c) est nécessaire mais non suffisante. Il existe des suites (u_n) tendant vers 0 telles que la série $\sum u_n$ diverge. (cf. exemples ci-dessous)

d) Remarque (*critère de Cauchy*). On sait que, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente. Donc une série $\sum u_n$ numérique converge si et seulement si la suite des sommes partielles est de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ \forall\, p \geq 1,\quad |\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}| < \varepsilon,$$

en remarquant que $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=0}^{n+p} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k$.

e) Remarque (*partie réelle et partie imaginaire*). On sait qu'une suite de nombres complexes (u_n) converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles $(\operatorname{Re} u_n)$ et $(\operatorname{Im} u_n)$ convergent dans $\mathbb{R}$, et que dans ce cas $\lim u_n = \lim \operatorname{Re} u_n + i \lim \operatorname{Im} u_n$. En appliquant cela à la suite des sommes partielles d'une série de nombres complexes, on déduit que :

Soit $\sum u_n$ une série complexe. Pour tout $n \geq 0$, notons $u_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. La série complexe $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n.$$

1.1.3 Exemples classiques

a) Série géométrique. Fixons $z \in \mathbb{K}$, et posons $u_n = z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ ainsi définie s'appelle la *série géométrique* de raison z.

Elle est convergente si et seulement si $|z| < 1$, et dans ce cas sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

> *En effet :* si $|z| \geq 1$, le terme général $u_n = z^n$ ne tend pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente. Si $|z| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$, donc $\lim\limits_{N} S_N = \frac{1}{1-z}$, donc $\sum_{n \geq 0} z^n$ est convergente de somme $\frac{1}{1-z}$.

b) Série harmonique. Posons $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ainsi définie s'appelle la *série harmonique*. Elle est divergente (bien que son terme général tende vers 0).

> *En effet :* Pour tout $N \geq 1$, on a la minoration $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq \sum\limits_{k=1}^{N} \ln(1 + \frac{1}{k})$.
> Or, $\sum\limits_{k=1}^{N} \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{N} \ln(\frac{k+1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{N} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(1+N)$. Donc $S_N \geq \ln(1+N)$.
> Comme $\ln(1+N)$ tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite $(S_N)_N$ diverge vers $+\infty$, et donc la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.

c) Série harmonique alternée. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ainsi définie s'appelle la *série harmonique alternée*. Elle est convergente de somme : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

> *En effet :* $-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\, dt = \int_0^1 \sum\limits_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\, dt.$

On scinde cette dernière intégrale en : $\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$.

Or $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$, et par ailleurs $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$.

On conclut que la suite (S_n) des sommes partielles converge vers $\ln 2$. Donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

d) SÉRIES DITES "TÉLÉSCOPIQUES". On désigne par ce terme familier des séries dont le terme général u_n peut s'exprimer sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ pour une certaine suite (v_n). On calcule alors les sommes partielles sous la forme :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}(v_{n+1} - v_n) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \cdots + v_N - v_{N-1} + v_{N+1} - v_N = v_{N+1} - v_0.$$

On en déduit que, si la suite (v_n) converge vers une limite ℓ, alors la suites (S_N) converge vers $\ell - v_0$, et donc la série de terme général u_n est convergente et sa somme est $\ell - v_0$.

Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, de somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

En effet : Posons $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$. On remarque que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Donc, pour $N \geq 1$, on a : $S_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$. La suite $(S_N)_{N\geq 1}$ converge donc vers 1.

e) REMARQUE. Il est rare dans la pratique que l'on puisse ainsi faire un calcul direct de la somme d'une série convergente. La plupart des résultats que l'on va voir dans la suite permettent seulement de déterminer la nature d'une série.

1.1.4 Espace vectoriel des séries convergentes

a) DÉFINITIONS (*somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire*). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Leur somme est la série de terme général $u_n + v_n$. Si de plus $\lambda \in \mathbb{K}$, le produit externe de $\sum u_n$ par λ est la série de terme général λu_n.

b) PROPOSITION. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et sa somme est :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

PREUVE. On applique aux sommes partielles les résultats correspondants sur les suites. □

c) COROLAIRE. *Les séries numériques dans $\mathbb{K}$ forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et les séries convergentes en forment un sous-espace.*

PREUVE. Résulte de la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et du b) ci-dessus. □

1.1.5 Exercices

EXERCICE 1. Montrer que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est nécessairement divergente. Montrer par deux exemples bien choisis que la somme de deux séries divergentes peut être convergente ou divergente.

EXERCICE 2. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer si la série de terme général u_n converge, et si oui calculer sa somme.

a) $u_n = \sin n$, b) $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2})$, c) $u_n = \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$.

EXERCICE 3 (*Série de Tannery*). Soit x un réel différent de 1 et de -1. On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{2x^{2^n}}{x^{2^{n+1}} - 1}.$$

A partir de l'égalité $\frac{t}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t^2-1}$ pour tout réel $t \neq \pm 1$, montrer que les sommes partielles $S_p = \sum_{n=0}^{p} u_n$ vérifient $S_p = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x^{2^{p+1}}-1}$. Conclure que la série $\sum u_n$ est convergente, et calculer sa somme en distinguant suivant que $|x| > 1$ ou que $|x| < 1$

EXERCICE 4 (*Une autre preuve de la divergence de la série harmonique*). Considérons les sommes partielles $S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$, avec $m \geq 1$. Montrer que :

$$|S_{2m} - S_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que la suite (S_n) n'est pas de Cauchy. Conclure que la série harmonique est divergente.

EXERCICE 5 (*Une autre preuve de la divergence de la série harmonique*). Considérons les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, avec $n \geq 1$. Montrer que l'entier $m = E(\frac{\ln n}{\ln 2})$ vérifie $n \geq 2^m$ et $S_n \geq S_{2^m}$.

Montrer que :

$$S_{2^m} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2^{j-1}+1} + \frac{1}{2^{j-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^j}\right) \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

Déduire que $\lim S_{2^m} = +\infty$. Conclure que la série harmonique est divergente.

1.2 Séries à termes réels positifs

1.2.1 Critère de majoration

a) LEMME. *Soient $\sum u_n$ une série réelle telle que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang p. Pour tout $N \geq p$, notons $S_N = \sum_{n=p}^{N} u_n$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_N) est majorée.*

PREUVE. Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq p$, la suite $(S_N)_{N \geq p}$ est croissante. D'après les résultats connus sur les suites réelles *croissantes*, ou bien (S_N) est majorée, et alors elle converge, ou bien elle n'est pas majorée, et alors elle tend vers $+\infty$. D'où le résultat. □

b) THÉORÈME (*fondamental*). *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que, à partir d'un certain rang p, on ait : $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq p$.*

(i) *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et dans ce cas :* $0 \leq \sum_{n=p}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$.

(ii) *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

PREUVE. Pour tout $N \geq p$, notons $S_N = \sum_{n=p}^{N} u_n$ et $T_N = \sum_{n=p}^{N} v_n$.

D'après l'hypothèse, les suites $(S_N)_{N \geq p}$ et $(T_N)_{N \geq p}$ sont *croissantes*, et vérifient $S_N \leq T_N$ pour tout $N \geq p$. Supposons que $\sum v_n$ converge ; d'après le lemme a), la suite (T_N) est majorée, donc (S_N) l'est, et en réappliquant le lemme, on conclut que la série $\sum u_n$ converge. En appliquant le théorème de passage à la limite dans les inégalités, on a $\lim S_N \leq \lim T_N$, ce qui achève de prouver (i). Le point (ii) s'en déduit par contraposition. □

c) Corollaire (*critère de domination*). *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs à partir d'un certain rang. On suppose que $u_n = O(v_n)$ au voisinage de l'infini [rappelons que cela signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $0 \leq u_n \leq \alpha v_n$ pour tout entier $n \geq p$].*

(i) *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

(ii) *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Preuve. Comme le produit d'une série convergente par un scalaire est une série convergente (cf. 1.1.4), on applique le théorème précédent aux séries $\sum u_n$ et $\sum \alpha v_n$. □

d) Corollaire (*critère d'équivalence*). *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs à partir d'un certain rang. Si u_n et v_n sont équivalents au voisinage de ∞, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Preuve. Par hypothèse, on a à partir d'un certain rang : $u_n = v_n(1 + r_n)$, avec (r_n) suite tendant vers 0. Traduisons cette limite pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a : $-\frac{1}{2} < r_n < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} < 1 + r_n < \frac{3}{2}$. Donc, à partir d'un certain rang, on a : $0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n = v_n(1 + r_n) \leq \frac{3}{2} v_n$. Ceci prouve que $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. On applique alors le corollaire précédent. □

Donnons tout de suite un exemple très important d'application de ces théorèmes.

1.2.2 Séries de Riemann

a) Définition. On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel fixé.

b) Théorème. *La série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. On raisonne en deux cas :

• Si $\alpha \leq 1$, alors $n^\alpha \leq n$, donc $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$. Comme la série harmonique diverge comme on l'a vu au b) de 1.1.3, on applique 1.2.1.b.(ii) pour conclure que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

• Si $\alpha > 1$, posons $\beta = \alpha - 1 > 0$; définissons $a_n = \frac{1}{n^\beta}$ et $b_n = a_n - a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\beta > 0$, on a : $a_{n+1} < a_n$ donc $b_n > 0$. Formons pour $N \geq 1$ la somme partielle $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_N - a_{N+1} = 1 - \frac{1}{(N+1)^\beta}$. Comme $\beta > 0$, la suite (S_N) converge vers 1. Ainsi, la série $\sum b_n$ converge (et sa somme est 1).

Or $\frac{1}{n^{\beta+1}}$ est équivalent à $\frac{1}{\beta} b_n$ au voisinage de ∞.

en effet : $b_n = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta}\left[1 - (\frac{n}{n+1})^\beta\right] = \frac{1}{n^\beta}\left[1 - (1 + \frac{1}{n})^{-\beta}\right]$

On utilise le d.l. : $(1 + \frac{1}{n})^{-\beta} = 1 - \beta\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$ avec $\lim_n \varepsilon_n = 0$.

Donc : $b_n = \frac{1}{n^\beta}\left[\beta\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\varepsilon_n\right] = \frac{\beta}{n^{\beta+1}}\left[1 - \frac{1}{\beta}\varepsilon_n\right]$

Ainsi $\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\beta+1}}$ est équivalent à $\beta^{-1} b_n$. Comme la série $\sum b_n$ converge, il en est de même de $\sum \beta^{-1} b_n$; il s'agit d'une série à terme réels positifs. On applique le d) de 1.2.1 pour conclure que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge dans ce cas. □

c) Corollaire (Règle de comparaison avec une série de Riemann). *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.*

(i) *S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_n n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

(ii) *S'il existe un réel $0 < \alpha \leq 1$ tel que $\lim_n n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

PREUVE. Traduisons d'abord $\lim_n n^\alpha u_n = 0$ pour $\varepsilon = 1$; il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geq N_1, \text{ on a : } 0 \leq n^\alpha u_n < 1, \text{ donc } 0 \leq u_n < \tfrac{1}{n^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge d'après le b) ci-dessus, d'où $\sum u_n$ converge d'après 1.2.1.b.

Traduisons maintenant $\lim_n n^\alpha u_n = +\infty$ pour $\varepsilon = 1$; il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geq N_2, \text{ on a : } n^\alpha u_n > 1, \text{ donc } u_n > \tfrac{1}{n^\alpha}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le b) ci-dessus, d'où $\sum u_n$ diverge d'après 1.2.1.b.

□

d) EXEMPLE. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. La série $\sum \exp[-(\ln n)^a]$ converge si et seulement si $a > 1$.

En effet : En effet, posons $u_n = \exp[-(\ln n)^a]$. Si $a = 1$, alors $u_n = \frac{1}{n}$, donc $\sum u_n$ est la série harmonique ; on sait qu'elle diverge. On suppose donc maintenant $a \neq 1$. En vue d'utiliser le corollaire ci-dessus, on forme : $n^\alpha u_n = \exp(\alpha \ln n - (\ln n)^a)$ pour un $\alpha > 0$. Or :

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha \ln n - (\ln n)^a) = \lim_{n\to+\infty}(\ln n)(\alpha - (\ln n)^{a-1}) = \begin{cases} -\infty \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } a < 1 \end{cases}$$

Si $a > 1$, alors $\lim_n n^\alpha u_n = 0$ pour tout $\alpha > 0$. On applique à $\alpha = 2$ pour conclure avec le point (i) du corollaire précédent que $\sum u_n$ converge.

Si $a < 1$, alors $\lim_n n^\alpha u_n = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$. On applique à $\alpha = 1$ pour conclure avec le point (ii) du corollaire précédent que $\sum u_n$ diverge.

e) REMARQUE. Il est clair que, dans le point (i) de l'énoncé c), on peut remplacer la condition $\lim_n n^\alpha u_n = 0$ pour un $\alpha > 1$ par la condition plus faible : il existe $\alpha > 1$ telle que la suite de réels positifs $(n^\alpha u_n)$ soit majorée.

1.2.3 Règle de d'Alembert

a) PROPOSITION. *On considère une série réelle $\sum u_n$ telle que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.*

(i) *Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

(ii) *Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

PREUVE. Supposons d'abord $\ell < 1$. Choisissons un réel λ tel que $\ell < \lambda < 1$. Traduisons $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$ pour $\varepsilon = \lambda - \ell > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geq N, \text{ on a } u_n > 0 \text{ et } \ell - \varepsilon < \tfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon = \lambda.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda$. On déduit : $\frac{u_{N+1}}{u_N} \times \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} < \lambda^{n-N}$, d'où $\frac{u_n}{u_N} < \lambda^{n-N}$. Par suite, pour tout $n \geq N$, on a $u_n < (u_N \lambda^{-N})\lambda^n$, et donc $u_n = O(\lambda^n)$ Or, comme $0 < \lambda < 1$, la série géométrique $\sum \lambda^n$ converge (cf. a) du 1.1.3) ; on applique d) de 1.2.1 pour conclure que $\sum u_n$ converge.

• Pour montrer (ii), supposons $\ell > 1$. Choisissons un réel ε tel que $0 < \varepsilon < \ell - 1$. Traduisons $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$ pour ce ε ; il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geq N_0, \text{ on a : } u_n > 0 \text{ et } 1 < \ell - \varepsilon < \tfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon,$$

et donc $u_{n+1} > u_n$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante à partir du rang N_0. Elle est donc minorée par $u_{N_0} > 0$. Elle ne peut donc pas converger vers 0. D'après la proposition c) de 1.1.2, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. □

b) Exemple : La série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge.

> *En effet,* on a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, et : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ qui tend vers $\exp(-1)$ quand $n \to +\infty$. Comme $e^{-1} < 1$, on conclut que la série $\sum u_n$ converge.

c) Remarque. Si $\lim_n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$, il se peut que $\sum u_n$ converge ou qu'elle diverge (prendre par exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$). De même lorsque $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ n'admet pas de limite.

Si $\lim_n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = +\infty$, on a $u_{n+1} > u_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente (comme à la fin de la preuve du cas (ii) du théorème a).

1.2.4 Règle de Cauchy

a) Proposition. *On considère une série réelle $\sum u_n$ telle que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $(u_n^{\frac{1}{n}})$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.*

(i) *Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

(ii) *Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

> Preuve. On raisonne comme dans la preuve de 1.2.3
>
> • Supposons d'abord $\ell < 1$. Choisissons un réel λ tel que $\ell < \lambda < 1$. Comme dans la preuve du a) de 1.2.3, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a : $0 < (u_n)^{\frac{1}{n}} < \lambda$, donc $0 < u_n < \lambda^n$. La série géométrique $\sum \lambda^n$ converge puisque $\lambda < 1$, donc $\sum u_n$ converge d'après 1.2.1.b.(i).
>
> • Supposons maintenant $\ell > 1$. Comme dans la preuve du a) de 1.2.3, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a : $(u_n)^{\frac{1}{n}} > 1$ donc $u_n > 1$. Dès lors, la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0. D'après la proposition c) de 1.1.2, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. □

b) Exemple : la série $\sum\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ converge, car $\lim_n\left(\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$.

c) Remarques. On peut montrer que si la règle de d'Alembert s'applique, alors la règle de Cauchy aussi, c'est-à-dire que si $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+$, alors $\lim_n u_n^{1/n} = \ell$. Néanmoins, il est souvent plus commode d'étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ que la suite $(u_n^{1/n})$.

Réciproquement, on peut avoir $\lim_n(u_n)^{\frac{1}{n}} = l \in \mathbb{R}_+$ sans que $\lim_n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ existe.

> *Contre-exemple :* soit (u_n) définie par $u_{2p} = u_{2p+1} = 2^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
>
> D'une part $\lim_p(u_{2p})^{\frac{1}{2p}} = \lim_p(u_{2p+1})^{\frac{1}{2p+1}} = \sqrt{2}$, ce qui est suffisant pour conclure que $\lim_n(u_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$ (résultat classique d'analyse réelle ou complexe, voir aussi chapitre 3 de ce cours). D'autre part, la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ vaut alternativement 1 et 2, donc ne converge pas.

Pour conclure : on dispose ainsi de nombreux résultats techniques pour étudier les séries à termes réels positifs. L'un de leurs intérêts réside dans le théorème 1.3.1.b de la section suivante.

1.2.5 Exercices

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de termes général u_n défini par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}, \quad u_n = \frac{2n}{n+2^n}, \quad u_n = \frac{n!}{n^n}, \quad u_n = \frac{1}{n \times n^{1/n}}$$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries de termes général u_n défini par :

$$u_n = \frac{2+\cos n}{n^p} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \text{ fixé}, \qquad u_n = \frac{5^n+1}{2^n-1}, \qquad u_n = \frac{(n^4+1)^{1/3}}{n(n-1)^{1/2}}.$$

Exercice 3. Déterminer la nature des séries de termes général u_n défini par :

$$u_n = \frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}\alpha \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad u_n = a^n \sin^2(n\alpha) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1.$$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{(an+b)^\alpha}$.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature des séries de termes général u_n défini par :

$$u_n = \frac{a^n}{n!}, \qquad u_n = n!\, a^n, \qquad u_n = na^n, \qquad u_n = \frac{a^n}{n^n}.$$

Exercice 6. Déterminer la nature des séries de termes général u_n défini par :

$$u_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}, \qquad u_n = (1+\frac{1}{n})^{-n\sqrt{n}}.$$

Exercice 7. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $a \geq b \geq 0$. Déterminer la nature des séries de termes général :

$$u_n = \frac{n^\alpha}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \qquad \text{et} \qquad u_n = (\sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1})^n.$$

Exercice 8 (*Règle de Raabe et Duhamel*). Soit (u_n) une suite de réels positifs à partir d'un certain rang. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = \lambda$ existe (finie ou non).

Montrer que, si $\lambda > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge, et que si $\lambda < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Appliquer au séries de terme général :

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}, \qquad u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)},$$

$$u_n = \frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad u_n = (n!)\prod_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k}).$$

Exercice 9. Soient α, β deux réels tels que $0 < \beta < 1 < \alpha$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$, $u_n = \frac{1}{n^\beta}$ si n est une puissance de 2, et $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ sinon. Montrer que la série $\sum u_n$ converge, mais que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ n'est pas bornée et n'admet pas de limite.

Exercice 10. Déterminer la nature des séries de termes général u_n défini par :

$$u_n = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\left[1 - \cos\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)\right].$$

1.3 Séries numériques à termes quelconques

On se place de nouveau dans le cadre général de séries de terme général dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (pas nécessairement dans $\mathbb{R}_+$).

1.3.1 Convergence absolue

a) Définition. Une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite *absolument convergente* lorsque la série à termes réels positifs $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

b) Théorème. *Soit $\sum_{0\geq 0} u_n$ une série numérique. Si elle est absolument convergente, alors elle est convergente. De plus, on a dans ce cas* $|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

> Preuve. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $S_p = \sum_{n=0}^{p} u_n$ et $T_p = \sum_{n=0}^{p} |u_n|$. Fixons $\varepsilon > 0$ quelconque. Par hypothèse, $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge, donc la suite $(T_p)_{p\geq 0}$ convergente. Il en résulte en particulier qu'elle est de Cauchy : il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
>
> $$\text{pour tous } q > p \geq N_0, \text{ on a } |T_q - T_p| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire } \sum_{n=p+1}^{q} |u_n| < \varepsilon.$$
>
> Or, par inégalité triangulaire, $|\sum_{n=p+1}^{q} u_n| \leq \sum_{n=p+1}^{q} |u_n| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|S_q - S_p| < \varepsilon$. Ceci prouve que la suite $(S_p)_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Or on sait que, dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets). Donc la suite $(S_p)_{p\geq 0}$ converge, ce qui signifie que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
>
> Dès lors, on passe à la limite en q dans l'inégalité (triangulaire) $|\sum_{n=0}^{q} u_n| \leq \sum_{n=0}^{q} |u_n|$ pour obtenir l'inégalité voulue sur les sommes. □

c) Remarque et définition. La réciproque est fausse !

> *Contre-exemple.* La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (voir 1.1.3). Comme $|u_n| = \frac{1}{n}$, la série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est la série harmonique, qui elle est divergente.
>
> Donc la série harmonique alternée est convergente mais non absolument convergente.

Une série numérique qui est convergente mais qui n'est pas absolument convergente est dite parfois *semi-convergente*.

d) Proposition. *Les séries absolument convergentes forment un sous-espace de l'espace vectoriel des séries convergentes.*

> Preuve. L'inclusion découle du b) ci-dessus. Pour la stabilité par combinaison linéaire, considérons $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes, et deux scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a : $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|$. Or par hypothèse, $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, donc $|\lambda| \sum |u_n| + |\mu| \sum |v_n|$ aussi d'après 1.1.4.b. L'inégalité $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|$ implique donc, avec le théorème de majoration 1.2.1.b, que la série $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ est convergente. Ceci signifie que la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente,ie. $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$ est absolument convergente. □

Le théorème suivant est un résultat pratique donnant des conditions suffisantes de convergence pour certains types particuliers de séries dont le terme général est un réel changeant de signe suivant la parité de n. Ce résultat, appelé règle des séries alternées, et en fait un cas particulier d'un résultat plus général (qui n'est pas au programme de ce cours) appelé la règle d'Abel.

1.3.2 Séries (réelles) alternées

a) Définition. Une série réelle $\sum u_n$ est dite *alternée* lorsque son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, ou bien de la forme $u_n = (-1)^{n+1}\alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

b) Théorème (*règle des séries alternées*). *Soit (α_n) une suite de réels positifs. Si (α_n) est décroissante et convergente vers 0, alors la série alternée $\sum(-1)^n\alpha_n$ est convergente.*

> Preuve. Posons $S_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\alpha_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. L'hypothèse que la suite (α_n) est décroissante implique que, pour tout entier $p \geq 0$, on a $S_{2p+2} - S_{2p} = \alpha_{2p+2} - \alpha_{2p+1} \leq 0$ et $S_{2p+3} - S_{2p+1} = -\alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+2} \geq 0$. Donc la suite $(S_{2p})_{p\geq 0}$ est décroissante et la suite $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ est croissante. De plus $S_{2p+1} - S_{2p} = -\alpha_{2p+1}$, et l'hypothèse que la suite (α_n) converge vers 0 implique alors que $\lim(S_{2p+1} - S_{2p}) = 0$. En d'autres termes, les suites $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite S.
>
> Ainsi, la suite (S_n) est telle que les deux suites extraites $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ convergent vers la même limite S. On sait (voir résultats de première année) qu'alors la suite (S_n) converge vers S. $\square$

c) Exemple (*série de Riemann alternée*). Il s'agit de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

- Si $\alpha \leq 0$, elle diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 1$, elle est absolument convergente car $\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (cf. 1.2.2.b).
- Dans le cas $0 < \alpha \leq 1$, $\sum |u_n|$ diverge (cf. 1.2.2.b) donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. Néanmoins, $\sum u_n$ converge par application du théorème b) ci-dessus (car la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ décroît vers 0.) Dans ce cas, $\sum u_n$ est semi-convergente.

La *série harmonique alternée* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, qui est semi-convergente comme on l'a vu au c) de 1.3.1, correspond au cas $\alpha = 1$.

d) Une précision parfois utile (*majoration du reste dans la règle des séries alternées*). Comme dans le théorème ci-dessus, considérons (α_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergente vers 0. Reprenons toutes les notations introduites dans la preuve du théorème. Introduisons de plus la notation :

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n\alpha_n \qquad \text{pour tout } N \geq 0.$$

On a vu que la suite $(S_{2p})_{p\geq 0}$ converge vers S en décroissant et la suite $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ converge vers S en croissant ; il en résulte que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$, donc $S_{2p+1} - S_{2p} \leq S - S_{2p} \leq 0$, c'est-à-dire $-\alpha_{2p+1} \leq R_{2p} \leq 0$,

$S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p+2}$, donc $0 \leq S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1}$, c'est-à-dire $0 \leq R_{2p+1} \leq \alpha_{2p+2}$.

On retiendra que :

lorsque la règle des séries altenées s'applique, on a de plus : $|R_n| \leq \alpha_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On verra plus loin des situation où cette majoration est utile [par exemple 2.2.2.e.(iii) ou exercice 3 de 2.2.3].

1.3.3 Exercices

EXERCICE 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}\sin n\theta$. Déterminer la nature de la série $\sum |u_n|$, puis de la série $\sum u_n$.

EXERCICE 2. Soit a un réel positif fixé. On pose $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ et $v_n = \dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$. Montrer que $u_n = (-1)^n \sin v_n$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

EXERCICE 3. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n\, n^{\frac{1}{n}} \sin\dfrac{1}{n}$.

EXERCICE 4. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.

EXERCICE 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$.
Montrer que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{-1}{n^\alpha(n^\alpha+(-1)^n)}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

EXERCICE 6. En utilisant des développements limités appropriés, étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - (n^2+1)^{\frac{1}{2}}, \qquad u_n = (-1)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right].$$

$$u_n = \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad u_n = e^{-\frac{c}{n}} - a - \frac{b}{n} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

1.4 Résultats complémentaires

1.4.1 Produit de deux séries

a) DÉFINITION. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques. On appelle *série produit* (ou *produit de Cauchy*) de ces deux séries la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ de terme général :

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0 = \sum_{p=0}^{n} u_pv_{n-p} = \sum_{p+q=n} u_pv_q.$$

b) LEMME. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries réelles à termes positifs. Si les deux convergent, alors leur série produit $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge, et sa somme vaut :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

PREUVE. Notons dans $\mathbb{R}_+$ les sommes partielles : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.
Par hypothèse, la suite (U_n), (qui est croissante puisque chaque u_k est positif), converge vers une limite $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}_+$. De même la suite (V_n) converge en croissant vers $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \in \mathbb{R}_+$. Il en résulte que la suite (U_nV_n) converge en croissant vers UV.

Remarquons que $U_nV_n = \sum_{0\leq p,q\leq n} u_pv_q$. Par ailleurs, $W_n = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p+q=k} u_pv_k\Big) = \sum_{p+q\leq n} u_pv_q$.

D'une part : $(p+q \leq n) \Longrightarrow (p \leq n$ et $q \leq n)$, donc chaque terme de la somme W_n figure dans la somme U_nV_n ; comme tous les termes sont positifs, on conclut que $W_n \leq U_nV_n$.

D'autre part : $(p \leq n$ et $q \leq n) \Longrightarrow (p+q \leq 2n)$, donc de la même façon : $U_nV_n \leq W_{2n}$.

En résumé : $\quad W_n \leq U_nV_n \leq W_{2n} \qquad (\star)$

Puisque la suite (U_nV_n) est majorée par UV, il résulte de $(\star)$ que la suite (W_n) est majorée. Mais la suite (W_n) est aussi croissante (car chaque w_k est positif). On conclut que (W_n) converge. Soit W sa limite dans $\mathbb{R}_+$. La suite (W_{2n}), qui est une suite extraite de (W_n) converge donc aussi vers W. On déduit alors de $(\star)$ que $W = UV$. □

c) Théorème. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques. Si les deux sont absolument convergentes, alors leur série produit $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente, et sa somme vaut :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\big)\big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\big).$$

Preuve. On raisonne en deux étapes.

• Notons $\sum_{n\geq 0} w_n$ la série produit de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, définie par $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_pv_q$. Notons $\sum_{n\geq 0} x_n$ la série produit de $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geq 0} |v_n|$, définie par $x_n = \sum\limits_{p+q=n} |u_pv_q|$. Par l'inégalité triangulaire : $|w_n| = \big|\sum\limits_{p+q=n} u_pv_q\big| \leq \sum\limits_{p+q=n} |u_p||v_q| = x_n,$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, comme par hypothèse les séries positives $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geq 0} |v_n|$ convergent, le lemme précédent implique que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge. On peut donc appliquer le critère de majoration 1.2.1.b pour conclure que la série $\sum_{n\geq 0} |w_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente.

• On introduit pour les sommes partielles les notations suivantes :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \qquad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\big(\sum_{p+q=k} u_pv_q\big) = \sum_{p+q\leq n} u_pv_q.$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{p+q\leq n} |u_p||v_q|.$$

En particulier le lemme b) se traduit par : $\lim(A_nB_n - C_n) = 0$. On calcule :

$$U_nV_n - W_n = \sum_{0\leq p,q\leq n} u_pv_q - \sum_{p+q\leq n} u_pv_q = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} u_pv_q$$

où l'on a noté $\Delta_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2\,;\, 0 \leq p \leq n,\ 0 \leq q \leq n,\ p+q > n\}$. De la même façon :

$$A_nB_n - C_n = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} |u_p||v_q|.$$

Par inégalité triangulaire : $|U_nV_n - W_n| = \big|\sum\limits_{(p,q)\in\Delta_n} u_pv_q\big| \leq \sum\limits_{(p,q)\in\Delta_n} |u_p||v_q| = A_nB_n - C_n$.

Or $\lim(A_nB_n - C_n) = 0$, donc $\lim(U_nV_n - W_n) = 0$, donc $\lim W_n = (\lim U_n)(\lim V_n)$, c'est-à-dire : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\big)\big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\big)$. □

d) Exemple important (*exponentielle*). Pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente (c'est clair par la règle de d'Alembert). Donc elle converge ; notons sa somme :

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pour deux nombres complexes x et y, la série produit de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!}$ a pour terme général :

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \frac{y^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

D'après le théorème précédent, cette série produit est absolument convergente, et on a :

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = (\exp x)(\exp y)$$

e) Remarque. On peut améliorer le théorème c) en montrant que la série produit reste convergente si l'on suppose seulement que l'une des deux séries données est absolument convergente, l'autre étant simplement supposée convergente (théorème de Mertens).

1.4.2 Le problème de la sommation par paquets

a) Exemple introductif. La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ est divergente (grossièrement). Mais en regroupant les termes deux par deux :

$$\underbrace{1+(-1)}_{0} + \underbrace{1+(-1)}_{0} + \underbrace{1+(-1)}_{0} + \cdots + \underbrace{(-1)^{2p}+(-1)^{2p+1}}_{0} + \cdots$$

la série $\sum_{p\geq 0}((-1)^{2p}+(-1)^{2p+1})$ est de terme général nul, donc convergente.

b) Notations. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique. Regroupons ses termes par paquets sous la forme : $v_0 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{\phi(0)}$, $\quad v_1 = u_{\phi(0)+1} + u_{\phi(0)+2} + \cdots + u_{\phi(1)}$, $\quad$ et plus généralement :

$$v_n = \sum_{k=\phi(n-1)+1}^{\phi(n)} u_k, \quad \text{avec } \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante.} \quad \text{On a alors :}$$

c) Proposition. *Avec les données et notations ci-dessus :*

(i) *Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge ; dans ce cas, les deux séries ont la même somme.*

(ii) *Si de plus tous les u_n sont des réels positifs, la réciproque est vraie aussi.*

Preuve. Considérons les sommes partielles :

$$U_n = \sum_{j=0}^{n} u_j \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{j=0}^{n} v_j = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=\phi(j-1)+1}^{\phi(j)} u_k\Big) = \sum_{j=0}^{\phi(n)} u_j = U_{\phi(n)}.$$

Si l'on suppose que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, en notant U sa somme, on a $\lim U_n = U$. Comme ϕ est strictement croissante, $\lim \phi(n) = +\infty$, donc $\lim V_n = \lim U_{\phi(n)} = \lim U_n = U$, ce qui prouve le point (i).

Pour prouver (ii), supposons que chaque u_n est un réel positif. Il est clair que les suites réelles (U_n) et (V_n) sont alors croissantes. Si on suppose que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la suite (V_n) est majorée (car toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$). Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\phi(n) \geq n$ (c'est une conséquence facile du fait que ϕ est strictement croissante) donc : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k = U_{\phi(n)} = V_n$. On déduit que la suite (U_n) est majorée. Comme elle est croissante, elle converge. $\square$

1.4.3 Le problème de l'ordre des termes

a) Exemple introductif. Considérons la série réelle $\sum_{n\geq 1} u_n$, pour $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. D'après 1.3.2.c, elle est convergente (mais non absolument convergente)

Changeons l'ordre des termes en renumérotant :

$$\sum_{n\geq 1} u_{\sigma(n)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

où σ est la bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\sigma(3p) = 2p, \quad \sigma(3p-1) = 4p-1, \quad \sigma(3p-2) = 4p-3 \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

Dans $\sum\limits_{n\geq 1} u_{\sigma(n)}$, regroupons ensuite par paquets en : $\sum\limits_{p\geq 1} \big(u_{\sigma(3p-2)} + u_{\sigma(3p-1)} + u_{\sigma(3p)}\big)$.

Posons $a_n = u_{\sigma(3n-2)} + u_{\sigma(3n-1)} + u_{\sigma(3n)} = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$, qui est positif.

On vérifie que a_n est équivalente à $\big(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\big)\frac{1}{\sqrt{n}}$ au voisinage de $+\infty$.

En effet : $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{3}{4n}\big)^{-1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{1}{4n}\big)^{-1/2} - 1\Big)$

$= \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\frac{3}{8n}+\frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})\big) + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\frac{1}{8n}+\frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})\big) - 1\Big) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\big(1+\varepsilon'(\frac{1}{n})\big)\Big).$

D'après 1.2.2, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{2n}}$ diverge, donc d'après 1.2.1.d, il est de même de $\sum a_n$. En appliquant 1.4.3.c.(i), on conclut que $\sum_{n\geq 1} u_{\sigma(n)}$ diverge.

b) Définition. Une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite *commutativement convergente* lorsque, pour tout bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est convergente.

c) Théorème. *Toute série numérique absolument convergente est commutativement convergente, et sa somme reste inchangée quand on modifie l'ordre des termes.*

Preuve. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ absolument convergente, et σ bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

• *Première étape :* on montre que $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, introduisons $\phi(n) = \max\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. Comme $\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$ est formé de $n+1$ entiers ≥ 0 qui sont deux à deux distincts, on a :

$$\phi(n) \geq n. \qquad (1)$$

De plus, $\phi(n)$ majore $\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$, donc :

$$\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \subset \{0, 1, 2, \ldots, \phi(n)\}. \qquad (2)$$

Notons $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_{\sigma(k)}|$. On tire de (2) que $X_n = |u_{\sigma(0)}| + |u_{\sigma(1)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}| \leq \sum\limits_{k=0}^{\phi(n)} |u_k|$.

Comme par hypothèse, la série $\sum_{k\geq 0} |u_k|$ converge, on en déduit que : $X_n \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k|$. La suite (X_n), qui est croissante, est donc majorée ; ceci prouve que la suite (X_n) converge, c'est-à-dire que la série $\sum u_\sigma(n)$ est absolument convergente. On a en outre montré que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_{\sigma(n)}| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. En échangeant le rôle des deux séries, (c'est-à-dire en remplaçant σ par la bijection réciproque σ^{-1}), on conclut que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{\sigma(n)}| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad (3).$$

• *Seconde étape :* les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ étant convergentes (car absolument convergentes), il reste à montrer que leurs sommes respectives S et S' sont égales.

Pour cela, posons $L_n = \{0, 1, 2, \ldots, \phi(n)\} \setminus \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$, de sorte que :

$$\Big|\sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\Big| = \Big|\sum_{k\in L_n} u_k\Big| \leq \sum_{k\in L_n} |u_k|.$$

En remodifiant le second membre, on obtient finalement :

$$\Big|\sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\Big| \leq \sum_{k=0}^{\phi(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^{n} |u_{\sigma(k)}|. \qquad (4)$$

D'après (1), $\lim \phi(n) = +\infty$, donc (3) implique que le second membre de (4) tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Comme le premier membre de (4) tend vers $|S' - S|$, on conclut que $S' = S$. $\square$

d) Remarques. Soit $\sum u_n$ une série convergente mais non absolument convergente. On a vu à l'exemple a) que l'on peut avoir $\sum u_{\sigma(n)}$ qui est divergente. Il se peut aussi que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge, mais que sa somme soit différente de celle de $\sum u_n$. (cf. exercice ci-dessous).
On peut montrer (on ne le fera pas ici) que, la réciproque du théorème c) est en fait vraie aussi, c'est-à-dire qu'une série numérique semi-convergente n'est jamais commutativement convergente.

Exercice. Considérons la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Elle est convergente et non absolument convergente (d'après 1.3.1.c ou 1.3.2.c). Vérifier qu'en posant :

$$\sigma(3q) = 4q,\ \sigma(3q-1) = 2(2q-1),\ \sigma(3q-2) = 2q-1 \text{ pour tout } q \geq 1,$$

on définit une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Montrer qu'alors la série :

$$\sum_{n\geq 1} u_{\sigma(n)} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \cdots + \tfrac{1}{2q-1} - \tfrac{1}{2(2q-1)} - \tfrac{1}{4q} + \cdots$$

converge, mais que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

(*Indication* : faire des sommations par paquets de 3, puis de 2.)

1.4.4 Comparaison entre séries et intégrales

a) Proposition. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série de terme général $a_n \in \mathbb{K}$. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{K}$ définie par $f(t) = a_n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [n, n+1[$. Alors :*

(i) *La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.*

(ii) *De plus, dans le cas de convergence, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.*

Preuve. f est bien définie car tout $t \geq 0$ appartient à un intervalle $[n, n+1[$ et un seul. Par construction, f est constante sur chaque $[n, n+1[$, donc continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $I = [0, +\infty[$. Par définition, cela signifie que $f \in \mathscr{CM}(I, \mathbb{K})$.

Figure 1

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = \int_0^{N+1} f(t)\, dt.$$

• Supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\, dt = L \in \mathbb{K}$. Alors on a : $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} f(t)\, dt = L$ ce qui prouve que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

• Réciproquement, supposons que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, c'est-à-dire $\lim_{N\to+\infty} S_N = L \in \mathbb{K}$. Pour tout réel $x \geq 0$, notons $E(x)$ sa partie entière ; on a :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{E(x)} f(t)\,dt + \int_{E(x)}^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{E(x)-1} \int_n^{n+1} f(t)\,dt + \int_{E(x)}^x f(t)\,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{E(x)-1} a_n + (x - E(x))a_{E(x)} = S_{E(x)-1} + (x - E(x))a_{E(x)}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} S_{E(x)-1} = L$. On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} a_{E(x)} = \lim\limits_{n} a_n = 0$ (puisque a_n est le terme général d'une série convergente). Comme $0 \leq x - E(x) < 1$, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - E(x))a_{E(x)} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = L$. □

b) THÉORÈME (*Cas des fonctions réelles positives décroissantes*) *Notons* $I = [0, +\infty[$. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux sur* I*, que l'on suppose* <u>*positive*</u> *et* <u>*décroissante*</u> *sur* I*. Alors :*

la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *sont de même nature.*

Preuve. On raisonne en deux étapes. Définissons d'abord pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(t)\,dt.$$

Figure 2

Figure 3

• On va montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente. Pour cela remarquons d'abord que : pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$, on a (car f est décroissante) : $0 \leq f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$, donc :

$$0 \leq f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k). \quad (*)$$

Or $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) - \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\int_k^{k+1} f(t)\,dt\Big) = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt\Big)$ Chaque différence $\alpha_k := f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,d$ est positive d'après (*), et comme $x_{n+1} = x_n + \alpha_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que la suite (x_n) est croissante. Par ailleurs :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt\Big) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(-\int_k^{k+1} f(t)\,dt + f(k+1)\Big) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$$

Chaque différence $\beta_k := f(k+1) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt$ étant négative d'après $(*)$, il vient :

$x_n \leq f(0) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$. Toujours d'après $(*)$, on a aussi : $-\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq -f(n+1)$. Finalement : $x_n \leq f(0) - f(n+1) \leq f(0)$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (x_n) est majorée ; on a déja vu qu'elle est croissante : on conclut qu'elle converge.

Bilan : en posant $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$ et $I_n := \int_0^{n+1} f(t)\,dt$, on a $S_n = x_n + I_n$ avec la suite (x_n) qui converge. Donc la suite (S_n) converge si et seulement la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge.

• Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$, on a (parce que f est positive) :

$$\int_0^{E(x)} f(t)\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^{E(x)+1} f(t)\,dt.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$, on en déduit que : la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite finie si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. En rappelant le bilan ci-dessus, on conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) converge dans $\mathbb{R}$, ce qui équivaut à dire que la série $\sum_{k\geq 0} f(k)$ est convergente. $\square$

c) Corollaire. *Soient $a \geq 0$ et $I = [a, +\infty[$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur I, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(a+n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème à $f(a+t)$ au lieu de $f(t)$. $\square$

d) Remarque. En particulier, pour tout $\alpha \geq 0$, l'application $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ étant positive, continue par morceaux et décroissante sur $I = [a, +\infty[$ (avec $a > 0$ quelconque), on déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+a)^\alpha}$ est convergente, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 1$. On retrouve ainsi via la comparaison à ce type d'intégrale les conditions de convergence des séries de Riemann de 1.2.2.

e) Une application intéressante. *La suite $\big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\big)$ est convergente ; sa limite γ est appelée la constante d'Euler.*

En effet : soit $I = [1, +\infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue positive décroissante sur I définie par $f(t) = \frac{1}{t}$. Comme dans la preuve du théorème b), considérons $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} g(k) - \int_0^{n+1} g(t)\,dt$. où l'on a noté g l'application $[0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $g(t) = f(t+1)$. On a donc :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \int_0^{n+1} \frac{1}{t+1}\,dt = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \int_1^{n+2} \frac{1}{t}\,dt,$$

Ou encore :

$$x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \big(\ln(n+1) - \ln n\big).$$

Comme $\lim\limits_n \big(\ln(n+1) - \ln n\big) = \lim\limits_n \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$, et comme on a vu dans la preuve du théorème b) que la suite (x_n) converge, on conclut que la suite $\big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\big)$ est convergente. $\square$

La constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n) = \lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \ln n)$$

joue un rôle très important dans de nombreux problèmes mathématiques. Une valeur approchée de γ est $0,57722...$. La question de savoir si γ est ou non rationnel est encore ouverte aujourd'hui !

f) Exercice (*séries de Bertrand*). On fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Montrer que :

(i) si $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge pour tout β,

(ii) si $\alpha < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge pour tout β,

(iii) si $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exemples d'application : déterminer la nature des séries de terme général :

$$u_n = n^{(1/n)^\alpha} - 1 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad u_n = \ln n \, \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right].$$

Chapitre 2

Séries de fonctions

Conformément à ce que prévoit le programme, ce chapitre est plus précisément consacré à l'étude des séries de fonctions *d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes.*

Les séries de fonctions sont un cas particulier de suites de fonctions, à savoir les suites de sommes partielles. C'est pourquoi on définit d'abord les notions de base dans le contexte plus général des suites de fonctions, où elles s'expriment plus facilement.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $|\cdot|$ désigne respectivement la valeur absolue ou le module.

2.1 Suites de fonctions

2.1.1 Convergence simple et convergence uniforme

• Rappelons d'abord quelques notations classiques. Si X une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$; c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la somme usuelle des fonctions, et le produit usuel d'une fonction par un scalaire. On note $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ formées des applications qui sont bornées sur X ; c'est un sous-espace vectoriel. De plus, si $f \in \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, on introduit le réel positif $\|f\|_\infty$ défini par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

C'est un simple exercice sur les propriétés de la borne supérieure que de vérifier que l'on a pour toutes $f, g \in \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ et tout réel λ :

$$[\ \|f\|_\infty = 0\ ] \Leftrightarrow [f = 0], \qquad \|\lambda.f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty, \qquad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ces propriétés se traduisent en disant que que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme de l'espace vectoriel $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$. Une étude systématique de telles normes sera détaillée au second semestre.

• Fixons ensuite les donnés. On désigne encore par X une partie non vide de $\mathbb{R}$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications $X \to \mathbb{K}$. Cela signifie que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathscr{F}(X,\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \text{pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in X,\ f_n(x) \in \mathbb{K}.$$

On peut alors donner les deux définitions fondamentales suivantes.

a) DÉFINITION (*convergence simple*). On dit que la suite (f_n) converge *simplement* sur X vers une application $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ lorsque, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $f(x)$. Ceci équivaut à :

$$\forall x \in X, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x),$$

c'est-à-dire à :

$$\forall\, x \in X,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_{\varepsilon,x}\ ,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

b) DÉFINITION (*convergence uniforme*). On dit que la suite (f_n) converge uniformément sur X vers une application $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_\varepsilon\ ,\ \forall\, x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

(on observera avec soin la place des quantificateurs en comparaison de la définition précédente). Ceci équivaut encore à :

$$\begin{cases} \text{les applications } (f_n - f) \text{ sont bornées sur } X \text{ pour } n \text{ assez grand,} \\ \text{et} \\ \lim_{n\to+\infty} \big(\|f_n - f\|_\infty\big) = 0. \end{cases}$$

c) EXEMPLES.

• Soit $I =]0, +\infty[$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$, on pose : $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Il est clair que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur I, mais ne converge pas uniformément sur I car : $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2},\ \forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n = N,\ \exists\, x = \frac{1}{n},\ |f_n(x) - 0| = f_n(\frac{1}{n}) = 1 > \varepsilon.$

• Soit $I = [0, 1]$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$, on pose (*représenter graphiquement f et g*) :

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -x + \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \qquad g_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2nx & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Les suites (f_n) et (g_n) convergent simplement vers la fonction nulle sur I.

> *En effet :* pour tout $x \in]0, 1]$, on a pour n assez grand $x > \frac{1}{n}$ donc $f_n(x) = g_n(x) = 0$. De plus $f_n(0) = g_n(0) = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

La suite (f_n) converge uniformément sur I.

> *En effet :* $\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

La suite (g_n) ne converge pas uniformément sur I,

> *En effet :* $\|g_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in I} |g_n(x)| = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$.

d) PROPOSITION (*relation entre convergences simple et uniforme*). *Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. Si elle converge uniformément sur X vers une application $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, alors elle converge simplement sur X vers f. La réciproque est fausse en général.*

> *Preuve.* L'implication est claire d'après les définitions a) et b) elles-mêmes. On a vu en c) des contre-exemples à la réciproque. □

La proposition suivante peut être parfois utile. Elle repose sur la fait, vu en première année, qu'une suite de Cauchy dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est nécessairement convergente dans $\mathbb{K}$.

e) PROPOSITION (*condition de Cauchy pour la convergence uniforme*). *Une suite (f_n) d'applications de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ converge uniformément sur X si et seulement si elle vérifie la condition de Cauchy uniforme sur X :*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, p, q \geq N_\varepsilon\ ,\ \sup_{x \in X} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

Preuve. Supposons que (f_n) converge uniformément sur X vers une fonction $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. Fixons $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \geq N,\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $p, q \geq N$, alors pour tout $x \in X$, on a : $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc (f_n) vérifie la condition de Cauchy uniforme sur X.

• Supposons réciproquement que (f_n) vérifie la condition de Cauchy uniforme sur X. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p, q \geq N_\varepsilon\ ,\ \sup_{x \in X} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$.

Donc pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$; comme on l'a rappelé ci-dessus, elle converge alors dans $\mathbb{K}$. En d'autres termes, la suite (f_n) converge simplement ; notons $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application limite. Si $p \geq N_\varepsilon$ et $x \in X$, on passe à la limite pour $q \to +\infty$ dans l'inégalité $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$ vraie pour tout $q \geq N_\varepsilon$: on obtient $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

On a ainsi montré qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, p \geq N_\varepsilon\ ,\ \forall\, x \in X,\ |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci étant pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut : (f_n) converge vers f uniformément sur X. $\square$

f) EXERCICE (*des propriétés à connaître*). Montrer que :

1. si (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur X vers f et g respectivement, alors $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur X vers $\lambda f + \mu g$, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
2. si (f_n) converge uniformément sur X vers f, alors $(|f_n|)$ converge uniformément sur X vers $|f|$.

2.1.2 Convergence uniforme et continuité

La question abordée ici est de savoir si, lorsqu'une suite de fonctions (f_n) converge vers une fonction f et que chaque f_n est continue, la fonction limite f est nécessairement continue.

a) EXEMPLES PRÉLIMINAIRES

• Soient $I = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$. La suite (f_n) converge simplement sur I vers f définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. Chaque f_n est continue sur I mais la fonction limite f n'est pas continue sur I (non continue en 1).

• Soient $I = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$. Pour tout $x \in I$ fixé, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$ donc la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction constante valant 1. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x).$$

b) THÉORÈME. *Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite d'applications de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur X vers une application $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.*

(i) *Soit $a \in X$ quelconque ; si chaque f_n est continue en a, alors f est continue en a.*

(ii) *Si chaque f_n est continue sur X, alors f est continue sur X.*

Preuve. Soit $a \in X$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Puisque la suite (f_n) converge vers f uniformément sur X, il existe un entier $N \geq 0$ tel que : $\forall\, n \geq N,\ \forall\, x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pour un tel entier $n \geq N$, la continuité de f_n en a se traduit (pour le réel $\varepsilon > 0$ considéré) par l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que : $\forall\, x \in X,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$. Pour un tel $x \in X$ vérifiant $|x - a| < \eta$, on a donc en combinant les deux assertions et en utilisant l'inégalité triangulaire : $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 3\varepsilon$, ce qui prouve que f est continue en a. Le point (i) étant établi, le point (ii) s'en déduit de façon évidente. □

c) Remarques.

• Par contraposée, ce théorème peut permettre de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme : par exemple, dans le premier exemple préliminaire de a) on peut conclure que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I.

• La convergence uniforme est une condition suffisante mais non nécessaire a priori pour la continuité de f. Il se peut que f soit continue sur I sans que la convergence soit uniforme sur I (comme dans le premier exemple de 2.1.1.c).

d) Complément important sur l'interversion des limites. Le théorème b) ci-dessus consiste à montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

En cela, c'est en fait une conséquence du théorème plus général, dont la preuve est laissée en exercice.

Théorème. *Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{X}$ un point adhérent à X. Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On suppose que d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, et d'autre part que la suite (f_n) converge uniformément sur X vers une application $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. Alors :*

(1) *la suite (ℓ_n) converge dans $\mathbb{K}$,* (2) *f admet une limite en a,* (3) $\lim_a f = \lim_n \ell_n$,

c'est-à-dire que l'on a bien :

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

La même question se pose bien sûr pour des limites du type $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ [voir le second exemple préliminaire du a) ci-dessus]. On peut vérifier que le théorème d'interversion des limites reste vrai :

– lorsque X est un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$ et lorsque $a = +\infty$.

– lorsque X est un intervalle du type $]-\infty, \beta[$ et lorsque $a = -\infty$.

2.1.3 Convergence uniforme sur tout segment

a) Exemple. Reprenons le premier exemple de 2.1.1.c, avec $I =]0; +\infty[$ et $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. La suite (f_n) converge simplement mais non uniformément sur I vers la fonction nulle. Quel que soit $[a, b] \subset I$, on a $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| = \frac{1}{na}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Donc la suite (f_n) converge vers 0 uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ inclus dans I.

b) Remarque. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit f une application $I \to \mathbb{K}$. Soit (f_n) une suite d'applications $I \to \mathbb{K}$. Lorsque (f_n) converge vers f uniformément sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I, on dit parfois que (f_n) converge vers f *localement uniformément*. Dans la pratique, cette propriété peut être suffisante pour obtenir des énoncés intéressants sur la fonction limite, comme dans la situation suivante.

c) Proposition. *Soit (f_n) une suite d'applications $I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $f : I \to \mathbb{K}$ telle que (f_n) converge vers f uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I. Si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.*

Preuve. Soit $x \in I$. Il existe $b > a \in I$ tels que $x \in [a,b] \subseteq I$. La convergence étant uniforme sur $[a,b]$, il résulte du théorème 2.1.2.b que f est continue sur $[a,b]$, donc en x. Et ceci pour tout $x \in I$. Donc f est continue sur I. □

2.1.4 Convergence uniforme, intégration et dérivation.

a) Théorème (*convergence uniforme et intégration sur un segment*). *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, pour des réels fixés $a \leq b$, et (f_n) une suite d'applications de $I \to \mathbb{K}$. On suppose que chaque f_n est continue sur I et que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une application $f : I \to \mathbb{K}$. Alors la suite $(\int_a f_n(t)\,dt)$ converge dans $\mathbb{K}$ et l'on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Preuve. Observons d'abord que, d'après le théorème 2.1.2.b, on sait que f est continue sur $[a,b]$, ce qui justifie l'existence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$. Il résulte des propriétés connues de l'intégrale que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq (b-a) \sup_{a\leq t\leq b} |f_n(t) - f(t)|.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ par l'hypothèse de convergence uniforme, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right) = 0$, d'où le résultat. □

b) Remarques.

• Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue sur $[a,b]$, il se peut que la suite $(\int_a^b f_n(t)\,dt)$ ne converge pas vers $\int_a^b f(t)\,dt$ dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas bien sûr, la convergence n'est pas uniforme.

Par exemple : en posant $f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n^3 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ (-1)^{n+1} n^3 (x - \frac{2}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$ on définit une suite $(f_n)_{n\geq 2}$ d'applications $[0,1] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers la fonction nulle, mais telle que la suite de réels $(\int_0^1 f_n(t)\,dt)_{n\geq 2}$ diverge puisque son terme général vaut $(-1)^n n$.

• Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant simplement mais non uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f continue sur $[a,b]$, il se peut cependant que la suite $(\int_a^b f_n(t)\,dt)$ converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$ dans $\mathbb{K}$.

Par exemple : en posant $f_n(x) = nx^n(1-x)$ pour tout $x \in [0,1]$, on définit une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications $[0,1] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers la fonction nulle, telle que la suite de réels $(\int_a^b f_n(t)\,dt)_{n\geq 0}$ converge puisque son terme général vaut $\frac{n}{(n+1)(n+2)}$, et telle que $(f_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers la fonction nulle uniformément sur $[0,1]$ (car on vérifie par un calcul direct du maximum de f_n sur $[0,1]$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 1/\mathrm{e}$).

• Dans le théorème, on peut supposer f et les f_n seulement continues par morceaux sur I.

c) Corollaire (*convergence uniforme et primitives*). *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (non vide, non réduit à un point). Soit (g_n) une suite d'applications $I \to \mathbb{K}$. On suppose que chaque g_n est continue sur I, et que la suite (g_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une application $g : I \to \mathbb{K}$. Fixons un élément $a \in I$ quelconque et, pour tout $n \geq 0$, notons $h_n : I \to \mathbb{K}$ la primitive de g_n sur I telle que $h_n(a) = 0$.*

Alors la suite (h_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une application $h : I \to \mathbb{K}$; de plus, g est continue sur I et h est la primitive de g sur I telle que $h(a) = 0$.

Preuve. D'après la proposition 2.1.3.c, il résulte des hypothèses faites que g est continue sur I. On peut donc considérer la primitive h de g sur I telle que $h(a) = 0$, c'est-à-dire l'application $h : I \to K$ définie par $h(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ pour tout $x \in I$.

Soit K un segment inclus dans I. Il existe un segment $J = [\alpha, \beta]$ tel que $K \subset J \subset I$ et $a \in J$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$, quitte à changer $[a, x]$ en $[x, a]$, on a :

$$\begin{aligned} |h_n(x) - h(x)| &= \left| \int_a^x g_n(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt \right| = \left| \int_a^x (g_n - g)(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_a^x |g_n(t) - g(t)|\,dt \leq |x - a| \sup_{t \in [a,x]} |g_n(t) - g(t)|. \end{aligned}$$

Mais $[a, x] \subset J = [\alpha, \beta]$, d'où : $|x - a| \leq (\beta - \alpha)$ et $\sup_{[a,x]} |g_n - g| \leq \sup_J |g_n - g|$. On a ainsi montré que :

$$|h_n(x) - h(x)| \leq (\beta - \alpha) \sup_J |g_n - g| \quad \text{pour tous } x \in J,\ n \in \mathbb{N}.$$

On déduit que $\sup_J |h_n - h| \leq (\beta - \alpha) \sup_J |g_n - g|$. Mais puisque par hypothèse (g_n) converge vers g uniformément sur J, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup_J |g_n - g| = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup_J |h_n - h| = 0$. On conclut que (h_n) converge vers h uniformément sur J, et donc sur K. $\square$

Ce corollaire est à la base du prochain théorème. Il existe plusieurs résultats concernant la dérivabilité de la fonction limite d'une suite de fonctions dérivables, sous diverses hypothèses. Conformément au programme, on se limite ici à la situation (la plus simple) de fonctions de classe C^1 sur un intervalle.

d) Théorème (*convergence uniforme et dérivation*). *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (non vide, non réduit à un point). Soit (f_n) une suite d'applications $I \to \mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une application $f : I \to \mathbb{K}$. On suppose que chaque f_n est de classe C^1 sur I. On fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe $g : I \to \mathbb{K}$ telle que la suite (f'_n) converge vers g uniformément sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.*

Alors, la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I ; de plus f est de classe C^1 sur I et $f' = g$. En d'autres termes, on a :

$$\left(\lim_{n \to +\infty} f_n\right)' = \lim_{n \to +\infty} f'_n.$$

Preuve. Soit $a \in I$ quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons : $g_n = f'_n$ et $h_n = f_n - f_n(a)$. On peut appliquer exactement le corollaire précédent : g est continue sur I et, si h désigne la primitive de g sur I telle que $h(a) = 0$, la suite (h_n) converge vers h uniformément sur tout segment inclus dans I. Comme $f_n = h_n + f_n(a)$ et comme $\lim_n f_n(a) = f(a)$, (puisque (f_n) converge simplement sur I vers f), on en déduit que (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers $h + f(a)$. En résumé, $f = h + f(a)$. Donc f est, comme h, de classe C^1 sur I, et l'on a : $f' = h' = g$. $\square$

e) Remarques.

• Une limite uniforme de fonctions dérivables sur I n'est pas forcément dérivable sur I.

> *Contre-exemple :* prenons $I=\mathbb{R}$ et $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$. Chaque f_n est dérivable sur I, la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f définie par $f(x)=|x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, qui n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

• L'hypothèse de convergence uniforme porte sur la suite des dérivées.

> *Contre-exemple :* prenons $I=[0,\frac{\pi}{2}]$ et $f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in I$. La suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (car $\sup_{x\in I}|f_n(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$), qui est dérivable sur I de dérivée la fonction nulle elle-même. Par ailleurs, chaque f_n est dérivable sur I avec $f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx$, mais la suite (f_n') ne converge pas vers la fonction nulle sur I, même simplement, puisque $\lim_n f_n'(0)=\lim_n\sqrt{n}=+\infty$.

• Les énoncés a) et d) restent *a fortiori* vrais lorsqu'on y remplace “converge uniformément sur tout segment inclus dans I” par la condition plus forte “converge uniformément sur I”.

La fin de cette section est consacrée à un analogue du théorème a) ci-dessus mais pour l'intégration sur des intervalles qui ne sont pas nécessairement des segments. Conformément à ce que prévoit le programme, l'énoncé est admis sans détailler de preuve.

f) Complément sur l'interversion de la limite et de l'intégrale. Le théorème a) ci-dessus consiste à montrer que, sous des hypothèses convenables, on peut intervertir le passage à la limite et le signe d'intégration, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,dt=\int_I\lim_{n\to+\infty}f_n(t)\,dt.$$

Lorsque I n'est plus supposé être un segment mais un intervalle quelconque, et/ou lorsque la convergence de la suite de fonctions considérée n'est pas uniforme, on a divers résultats dont le suivant (admis) connu comme théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Théorème. *Soit I un intervalle quelconque (non trivial) de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite d'applications $I\to\mathbb{K}$ continues sur I convergeant simplement sur I vers une application $f:I\to\mathbb{K}$ continue sur I. On suppose qu'il existe une application $g:I\to\mathbb{R}_+$ que l'on suppose intégrable sur I telle que $|f_n(x)|\leq g(x)$ pour tout $x\in I$ et tout $n\in\mathbb{N}$.*

Alors, chaque application f_n est intégrable sur I, l'application f est intégrable sur I, et l'on a :

$$\int_I f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,dt.$$

Exemple. Soit $I=[0,\frac{\pi}{2}]$. Pour tout entier $n\geq 0$, on définit $f_n:I\to\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\sin^n x$ pour tout $x\in I$. Il est clair que (f_n) converge simplement vers la fonction $f:I\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ si $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et $f(\frac{\pi}{2})=1$. Comme chaque f_n est continue sur I et que f ne l'est pas, la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme sur I. On a par ailleurs $|f_n(x)|\leq 1$ pour tous $x\in I,n\in\mathbb{N}$, on peut appliquer le théorème en prenant pour g la fonction constante sur I égale à 1 (qui est bien intégrable sur I). Comme $\int_I f(t)\,dt=0$, on conclut que $\lim\int_I f_n(t)\,dt=0$.

2.1.5 Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'applications de I dans $\mathbb{R}$ converge simplement sur I vers une fonction f à déterminer, et préciser si la convergence est ou non uniforme sur I.

a. $I = \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$, **b.** $I = [0, a],\ f_n(x) = \frac{x}{n+x}$, **c.** $I = \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$.

Exercice 2. Soit a un réel tel que $a > 0$. On considère pour toute entier $n \geq 0$ l'application $f_n : I \to \mathbb{R}$, avec $I =]0, +\infty[$ définie par $f_n(x) = n^a x \mathrm{e}^{-nx}$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur I. Montrer que f_n admet en $\frac{1}{n}$ un maximum que l'on calculera. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur I si et seulement si $a < 1$.

Exercice 3. Montrer que la suite (f_n) d'applications continues sur $I = \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ pour tout $x \in I$ converge simplement mais non uniformément sur I vers une application f non continue sur I.

Montrer que la suite (g_n) d'applications non continues sur $I =]0, 1]$ définies par $g_n(x) = 0$ si $1 \geq x \geq \frac{1}{n}$ et $g_n(x) = 1$ si $0 < x < \frac{1}{n}$ converge simplement mais non uniformément sur I vers une application g continue sur I.

Montrer que la suite (h_n) d'applications non continues sur $I =]0, 1]$ définies par $h_n(x) = 0$ si $1 \geq x \geq \frac{1}{n}$ et $g_n(x) = \frac{1}{n}$ si $0 < x < \frac{1}{n}$ converge uniformément sur I vers une application g continue sur I.

Exercice 4. Pour tout x dans $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f que l'on déterminera. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur I ; [*indication :* considérer $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\, dx$]. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2}$. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application f continue mais non dérivable sur $\mathbb{R}$. De quels théorèmes du cours cet exemple est-il à rapprocher ?

Exercice 6. Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n\, dx$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 0. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^2 x \mathrm{e}^{-nx}$ converge simplement vers la fonction nulle, mais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq 0$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7. Calculer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) considérée :

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + \mathrm{e}^x}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\, dx, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\, dx.$$

2.2 Séries de fonctions et convergence normale

2.2.1 Convergence simple et uniforme d'une série de fonctions

a) Définitions. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications $X \to \mathbb{K}$. On peut former la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles, avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$. Chaque S_n est donc une application $X \to \mathbb{K}$, et tout ce que l'on a développé dans la première partie de ce chapitre s'applique en particulier à la suite (S_n) des sommes partielles.

• On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur X lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur X.

Dans ce cas, l'application limite $S : X \to \mathbb{K}$ définie par $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ est appelée la *somme* de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$, et est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$. En d'autres termes, si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X, alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ est l'application } X \to \mathbb{K} \text{ définie par } \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

• On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur X lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur X. Il résulte en particulier de 2.1.1.d que : *si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors elle converge simplement sur X.*

• On peut de même appliquer à la suite des sommes partielles les notions de condition de Cauchy uniforme (voir 2.1.1.e) ou de convergence uniforme sur tout segment (voir 2.1.3).

b) Formulation pour les séries de fonctions des principaux théorèmes. Les théorèmes de continuité, d'interversion de limites, d'intégration ou de dérivation vus dans la première partie du chapitre sont vrais pour les suites de fonctions. Ils s'appliquent a fortiori aux séries de fonctions, qui en sont un cas particulier. Pour la commodité du lecteur, on les reformule dans ce contexte spécifique des séries. Les preuves des cinq résultats ci-dessous consistent simplement à appliquer directement à la suite des sommes partielles les énoncés 2.1.2.d, 2.1.2.c, 2.1.3.c, 2.1.4.b et 2.1.4.d.

> **[1]** Théorème d'interversion de limites. *Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{X}$ un point adhérent à X. Soit (f_n) une suite d'applications $X \to \mathbb{K}$. On suppose que d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, et d'autre part que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X. Alors : la série $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge dans $\mathbb{K}$, l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a, et l'on a :*
> $$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$
> Ceci traduit bien l'interversion de limites : $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{p} f_n(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{p} f_n(x)$.

> **[2]** Théorème de continuité. *Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série d'applications $X \to \mathbb{K}$. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X. Alors on a :*
> • *si chaque f_n est continue en un même point $a \in X$, alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a ;*
> • *si chaque f_n est continue sur X, alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X.*

[3] Autre théorème de continuité. *Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *une série d'applications* $I \to \mathbb{K}$*, où* I *est un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$*. On suppose que la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément sur tout segment* $[a, b]$ *inclus dans* I*.*
Si chaque f_n *est continue sur* I*, alors l'application* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* I*.*

[4] Théorème d'intégration sur un segment. *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$*, pour des réels fixés* $a \leq b$*, et* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *une série d'applications de* $I \to \mathbb{K}$*. On suppose que chaque* f_n *est continue sur* I *et que la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément sur* I*.*

Alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* I*, la série de réels* $\sum\limits_{n\geq 0} \int_a^b f_n(t)\,dt$ *converge, et l'on a :*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right).$$

[5] Théorème de dérivation. *Soit* I *un intervalle quelconque de* $\mathbb{R}$ *(non vide, non réduit à un point). Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *une série d'applications* $I \to \mathbb{K}$*. On suppose que chaque* f_n *est de classe* C^1 *sur* I*, que la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement sur* I*, et que la série* $\sum_{n\geq 0} f_n'$ *converge uniformément sur tout segment* $[a, b]$ *inclus dans* I*.*

Alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément sur tout segment* $[a, b]$ *inclus dans* I*, l'application* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* C^1 *sur* I*, et l'on a :*

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

On verra en exercice des exemples d'application de ces résultats. Auparavant, on présente une condition suffisante de convergence uniforme spécifique aux séries de fonctions, qui constitue dans la pratique la plus fréquente façon de vérifier qu'une série de fonctions est uniformément convergente.

2.2.2 Convergence normale

a) Definition. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications $X \to \mathbb{K}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge *normalement* sur X lorsque les fonctions f_n sont bornées sur X (à partir d'un certain rang) et que la série de réels positifs $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Cette condition équivaut à l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs telle que :

$$\Big[\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in X,\ |f_n(x)| \leq a_n\ \Big] \quad \text{et} \quad \Big[\text{la série numérique } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ est convergente}\Big].$$

Exercice : Rédiger une preuve détaillée de cette équivalence, qui est très utile dans la pratique.

b) Théorème fondamental. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions* $X \to \mathbb{R}$*. Si elle converge normalement sur* X*, alors elle converge uniformément sur* X*.*

Preuve. On suppose que $\sum f_n$ est normalement convergente sur X. Il résulte de la dernière remarque ci-dessus que, pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ est convergente (car son terme général est majorée par le terme général a_n d'une série convergente), et donc que cette série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. Cela signifie que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X. Notons $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, qui est une application $X \to \mathbb{K}$.

Ceci étant, pour tout entier $N \geq 0$, posons $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ et $R_N = f - S_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} f_n$. Les applications S_N et R_N vérifient donc pour tout $x \in X$:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \quad \text{et} \quad R_N(x) = f(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x).$$

d'où l'on déduit :

$$\|f - S_N\|_\infty = \|R_N\|_\infty = \|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty - \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_\infty$$

en utilisant l'hypothèse, que la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge ; et donc en particulier $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f - S_N\|_\infty = 0$, ce qui démontre le résultat voulu. $\square$

A noter que l'on a sous l'hypothèse du théorème : $\left\|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

A noter aussi que l'implication réciproque du théorème est fausse en général (voir contre-exemples ci-dessous).

c) Remarque. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\geq0}$ une suite d'applications $X \to \mathbb{K}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge *absolument* sur X lorsque la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement sur X. Cela signifie que, pour tout $x \in X$, la série de réels positifs $\sum |f_n(x)|$ est convergente. En d'autres termes, la série de réels $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente (voir 1.3.1.b) pour tout $x \in X$, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur X. On a aussi établi au début de la preuve du théorème ci-dessus que toute série de fonctions normalement convergente sur X est absolument convergente sur X.

d) Synthèse. On peut synthétiser de façon schématique le troisième point de 2.2.1.a, le théorème 2.2.1.b et la remarque 2.2.1.c ci-dessus sous la forme :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{convergence normale}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{convergence uniforme}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{convergence absolue}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{convergence simple}}
\end{tikzcd}$$

e) Exemples et contre-exemples.

► **(i)** On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ de la variable $x \in \mathbb{R}$. Posons $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$. Pour tout x $\in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Donc $|f_n(x)|$ est majoré pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le terme général $\frac{1}{n^2}$ d'une série numérique convergente (série de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$) indépendante de x. On conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori uniformément, absolument et simplement convergente sur X).

► **(ii)** On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x})$ de la variable $x \in [0, +\infty[$. Posons $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, $f_n(x) \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$. Ainsi, pour un $x \geq 0$ fixé quelconque, $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$ pour n au voisinage de l'infini. Donc, pour tout $x \geq 0$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. Ceci traduit le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ (et aussi absolument puisque $f_n(x) \geq 0$).

En vue d'étudier la convergence normale, on étudie les variations de f_n. C'est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$, avec $f_n(0)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\frac{1}{n}$. Donc $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{n}$, ce qui prouve que les f_n sont bornées, mais que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est divergente (série harmonique). On conclut donc que la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $[0,+\infty[$.

Considérons maintenant, pour tout réel $a\geq 0$, l'intervalle $[0,a]$. Si l'on restreint les f_n à $[0,a]$, on a $\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)|=\frac{a}{n^2+na}$, qui est le terme général d'une série numérique convergente (car $\frac{a}{n^2+na}\sim\frac{a}{n^2}$ pour n au voisinage de l'infini). On conclut donc que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente (donc uniformément convergente) sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a\geq 0$.

Comme il est clair que chaque f_n est continue sur $[0,+\infty[$, ce résultat suffit par exemple pour conclure (avec le [3] de 2.2.1.b) que l'application $x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

► **(iii)** On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x\in[0,+\infty[$. Posons $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+x}$. Pour tout $x\geq 0$ fixé, on a $|f_n(x)|=\frac{1}{n+x}$ pour tout $n\geq 0$, qui est le terme général d'une série numérique divergente (car équivalent pour n au voisinage de l'infini au terme général $\frac{1}{n}$ de la série harmonique). Ceci traduit le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $[0,+\infty[$ (et donc ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$).

Pour tout $x\geq 0$ fixé, on a $f_n(x)=(-1)^n\alpha_n$ pour tout $n\geq 0$ avec la notation $\alpha_n=\frac{1}{n+x}$. Comme la suite de réels positifs (α_n) décroît en convergeant vers 0, on peut appliquer la règle des séries alternées 1.3.2.b et en déduire que la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. Ceci traduit le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

La convergence simple que l'on vient de vérifier permet de considérer la fonction somme de la série $f=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$, définie par $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty|$. Notons $S_N=\sum_{n=1}^{N}f_n$ les sommes partielles de la série de fonctions.
On vérifie que, pour tout $x\in[0;+\infty[$ et tout $N\geq 1$, on a en utilisant la remarque d) de 1.3.2 :

$$|f(x)-S_N(x)|=\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}\right|\leq\frac{1}{N+1+x}\leq\frac{1}{N+1}.$$

Il en résulte que $\lim_{N\to+\infty}\|f-S_N\|_\infty=0$, ce qui prouve que la convergence de la suite (S_N) des sommes partielles vers la fonction f est uniforme sur $[0,+\infty[$. Ceci traduit le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

► On peut retenir de ce dernier exemple la méthode suivante :

> *une série de fonctions $\sum_{n\geq 0}f_n$ converge uniformément sur une partie X de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle converge simplement et vérifie de plus* $\lim_{N\to+\infty}\|f-S_N\|_\infty=0$

où l'on a noté $S_N=\sum\limits_{n=0}^{N}f_n$ les sommes partielles, $f=\lim\limits_{N\to+\infty}S_N=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ la fonction somme.

2.2.3 Exercices

Exercice 1. Pour tout entier $n\geq 1$, on considère l'application $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n!}$. Etudier la convergence sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}f_n$.

Exercice 2. Pour tout entier $n\geq 0$, on considère l'application $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'elle converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 0$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (-1)^n \ln(1 + \frac{x}{n(1+x)})$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'elle ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ [*Indication :* on pourra utiliser la remarque d) de 1.3.2].

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 0$. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Déterminer la partie X de $\mathbb{R}$ maximale telle que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur X. Montrer qu'elle converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 0$. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable et décroissante sur $]0, +\infty[$. Montrer que la convergence de la série de fonctions n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan nx$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Etudier la limite en 0 de $f'(x)$.

Exercice 7. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série convergente d'éléments de $\mathbb{K}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n(\frac{x^n}{1+x^n})$ de la variable réelle $x \in [0, +\infty[$. Montrer qu'elle converge normalement sur $[0, \alpha]$ pour tout réel $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'elle converge normalement sur $[\beta, +\infty[$ pour tout réel $\beta > 1$. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\frac{x^n}{1+x^n})$

Exercice 8 (*lemme d'Abel uniforme*). Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit (α_n) une suite d'applications $D \to \mathbb{R}$ convergeant uniformément sur D vers l'application nulle. On suppose de plus que, pour tout $x \in D$, la suite de réels $(\alpha_n(x))$ est décroissante. Soit par ailleurs (f_n) une suite d'applications $D \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe un réel $K \geq 0$ majorant $|\sum_{p=0}^{n} f_p(x)|$ pour tous $n \in \mathbb{N}, x \in D$. Montrer que la série de fonctions $\sum \alpha_n f_n$ converge uniformément sur D.

Exercice 9. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}$, où $I =]0, 2\pi[$. En appliquant l'exercice précédent, montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, 2\pi - a]$ pour tout $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Exercice 10 (*fonction de Weierstraß*). Soient a un entier naturel impair et $0 < b < 1$ un réel tels que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Pour tout $n \geq 0$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x)$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$ (pour cette dernière question point, des indications complémentaires seront détaillées en cours).

2.3 Séries de Fourier

2.3.1 Coefficients de Fourier

a) Définition (*forme réelle, ou trigonométrique, des coefficients*). Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que l'on suppose continue par morceaux, et 2π-périodique, ce qui signifie que $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les *coefficients de Fourier réels* de f par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

▶ Remarques.

1. On a toujours $b_0(f) = 0$.
2. Dans le cas particulier où f est paire, on a $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$.
3. Dans le cas particulier où f est impaire, on a $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$.

b) Définition (*forme complexe, ou exponentielle, des coefficients*). Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le *coefficient de Fourier complexe* de f par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt.$$

▶ Attention ! Les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont définis pour tout entier n positif, alors que les coefficients $c_n(f)$ sont définis pour tout n entier positif ou négatif.

Puisque $\mathrm{e}^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$ et $\mathrm{e}^{-int} = \cos(nt) - i\sin(nt)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}), \end{cases} \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} c_n = c_{-n} = \frac{1}{2}a_n & \text{si } f \text{ est paire,} \\ c_n = -c_{-n} = \frac{1}{2i}b_n & \text{si } f \text{ est impaire.} \end{cases}$$

c) Remarques calculatoires.

1. Les coefficients de Fourier sont linéaires.

   Cela signifie que, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, on a : $a_n(f+g) = a_n(f) + a_n(g)$, $b_n(f+g) = b_n(f) + b_n(g)$, $c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g)$; et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$: $a_n(\lambda.f) = \lambda.a_n(f)$, $b_n(\lambda.f) = \lambda.b_n(f)$, $c_n(\lambda.f) = \lambda.c_n(f)$.

2. En désignant par $\overline{f}$ la conjuguée de f, on a :

$$a_n(\overline{f}) = \overline{a_n(f)}, \quad b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}, \quad c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}.$$

3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux, et 2π-périodique, alors f' peut être prolongée en une fonction continue par morceaux 2π-périodique, dont on peut considérer les coefficients de Fourier. On a alors : $c_n(f') = in\,c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   En effet, $c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt$. Une intégration par parties donne :
   $c_n(f') = \frac{1}{2\pi}[f(t)\mathrm{e}^{-int}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(-in)\mathrm{e}^{-int}\,dt = \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt = in\,c_n(f)$.

d) Définition (*série de Fourier*). Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *série de Fourier* de f en x la série :

$$\mathrm{SF}_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \tfrac{1}{2}\, a_0(f) + \sum_{n\geq 1} \big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \big)$$

e) Exemple (*fonction en créneaux*).

Figure 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire, 2π-périodique, telle que :

$$f(t) = 1 \ \text{ si } 0 < t < \pi, \ \text{ et } \ f(0) = f(\pi) = 0.$$

Il est clair que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Comme f est impaire, $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt$

$\qquad = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$,

donc, [si n est pair, $b_n(f) = 0$] et [si n est impair, $b_n(f) = \frac{4}{n\pi}$]. On conclut que :

$$\mathrm{SF}_f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx) = \sum_{p\geq 0} \tfrac{4}{(2p+1)\pi}\sin(2p+1)x.$$

f) Exemple (*fonction en dents de scie*).

Figure 2

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, 2π-périodique, telle que :

$$g(t) = t \quad \text{si } 0 \leq t \leq \pi.$$

Il est clair que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme g est paire, $b_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

et $a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt$.

Si $n = 0$, $a_0(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \pi$.

Si $n \geq 1$, on intègre par parties :

$$a_n(g) = \tfrac{2}{\pi}\Big(\big[\tfrac{1}{n}t\sin(nt)\big]_0^\pi - \int_0^\pi \tfrac{1}{n}\sin(nt)\,dt \Big) = \tfrac{-2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt = \tfrac{2}{n\pi}\big[\tfrac{1}{n}\cos(nt)\big]_0^\pi = \tfrac{2}{n^2\pi}\big((-1)^n - 1\big)$$

donc, [si n est pair non-nul, $a_n(g) = 0$] et [si n est impair, $a_n(g) = -\frac{4}{n^2\pi}$]. On conclut que :

$$\mathrm{SF}_g(x) = \tfrac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n\geq 1} a_n(g)\cos(nx) = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\tfrac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)x.$$

g) Exemple (*avec coefficients complexes*).

Figure 3

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, 2π-périodique, telle que :

$$h(t) = \mathrm{e}^{-t} \quad \text{si } 0 \leq t \leq \pi.$$

Il est clair que h est continue sur $\mathbb{R}$ (et coïncide avec l'exponentielle sur $[-\pi, 0]$).

$c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt$

$\qquad = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-int}\,dt + \int_0^\pi \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-int}\,dt \Big)$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[\frac{1}{1-in}\mathrm{e}^{(1-in)t}\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[\frac{1}{-1-in}\mathrm{e}^{(-1-in)t}\Big]_{0}^{\pi} \Big) = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{1-in} - \frac{1}{1-in}\mathrm{e}^{-\pi}\mathrm{e}^{in\pi} + \frac{1}{1+in} - \frac{1}{1+in}\mathrm{e}^{-\pi}\mathrm{e}^{-in\pi} \Big).$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{2}{1+n^2} - \mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n\big(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in}\big) \Big) = \frac{1}{(1+n^2)\pi}(1 + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\pi}).$$

On conclut que :

$$\mathrm{SF}_h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(h)\mathrm{e}^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+n^2)\pi}(1 + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\pi})\mathrm{e}^{inx}.$$

Remarque : h est paire, donc $b_n(h) = 0$ et $a_n(h) = 2c_n(h) = \frac{2}{(1+n^2)\pi}(1 + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\pi})$, d'où l'on déduit une autre écriture équivalente de cette série de Fourier :

$$\mathrm{SF}_h(x) = \frac{1}{2}a_0(h) + \sum_{n\geq 1} a_n(h)\cos(nx) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\pi(1+n^2)}(1 + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\pi})\cos(nx).$$

2.3.2 Convergence de la série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a défini la série de Fourier $\mathrm{SF}_f(x)$. La première question qui se pose est de savoir si cette série est convergente, pour certaines valeurs de x, voire pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si c'est le cas, elle définit une nouvelle application $\mathrm{SF}_f : x \mapsto \mathrm{SF}_f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et la seconde question qui se pose est celle des liens entre cette application SF et l'application f de départ. On va voir que, dans les cas les plus favorables, elle est égale à f. On rappelle ci-dessous (sans démonstration conformément au programme) deux résultats utiles relativement à ces questions, connus sous les noms de théorème de Dirichlet et théorème de Plancherel-Parseval.

a) Notations. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f admet donc une limite à droite en x, notée parfois $f(x^+)$, et une limite à gauche en x, notée $f(x^-)$.

Dans le cas où x est un point de continuité de la fonction f, on a par définition de la continuité : $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$.

En général, on considère la moyenne des limites à gauche et à droite, appelée parfois régularisée de f, définie par : $\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Si x est un point de continuité, alors on a $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Figure 4

Le résultat central est alors le suivant :

b) Théorème (*de Dirichlet*). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. On suppose de plus que f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors :*

(i) *pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f en x est convergente, et l'on a :*

$$\mathrm{SF}_f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))\,;$$

(ii) *en particulier, en tout $x \in \mathbb{R}$ où f est continue, on a :* $\mathrm{SF}_f(x) = f(x)$.

Preuve. Admis. □

Ainsi, sous les hypothèses du théorème, la série de fonctions SF_f converge vers la fonction f simplement sur $\mathbb{R}$. On peut montrer que :

c) Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si l'on suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de fonctions SF_f converge vers f normalement (et donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Admis. □

d) Exemples. On donne ici deux exemples d'applications au calcul de la somme de séries numériques usuelles.

► Reprenons l'exemple 2.3.1.e. Le théorème de Dirichlet s'applique. En tout $x \in \mathbb{R}$, (multiple ou non de π), on a : $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)x$.

Application : si l'on choisit $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $1 = \sum\limits_{p\geq 0} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin \frac{(2p+1)\pi}{2} = \sum\limits_{p\geq 0} \frac{4}{(2p+1)\pi}(-1)^p$.

D'où : $\boxed{\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{2p+1} = \dfrac{\pi}{4}}$

► Reprenons l'exemple 2.3.1.f. Le théorème de Dirichlet s'applique. En tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = \frac{\pi}{2} - \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^2\pi} \cos(2p+1)x$.

Application : si l'on choisit $x = 0$, on obtient $0 = \frac{\pi}{2} - \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^2\pi}$. D'où : $\boxed{\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}}$

e) Théorème (*formules de Plancherel-Parseval*). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. On suppose de plus que f vérifie $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) *la série de réels positifs $\sum(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$ est convergente, et l'on a :*

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \quad ;$$

(ii) *lorsque f est à valeurs réelles, la série de réels positifs $\sum(a_n(f)^2 + b_n(f)^2)$ est convergente, et l'on a :*

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)^2 + b_n(f)^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt \quad .$$

Preuve. Admis. □

f) Exemples. On donne ici deux exemples d'applications au calcul de la somme de séries numériques usuelles.

► Reprenons l'exemple 2.3.1.e. On a $a_n(f) = 0$, $b_{2p}(f) = 0$ et $b_{2p+1}(f) = \frac{4}{(2p+1)\pi}$.

La formule (ii) du théorème ci-dessus donne : $\frac{1}{2}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\frac{4}{(2p+1)\pi})^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1$, d'où l'on déduit que : $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$.

Conséquence. On en tire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$,

d'où $(1 - \frac{1}{4}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$, et finalement $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

De même : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8}$, d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$.

► Reprenons l'exemple 2.3.1.f. On a :

$$b_n(g) = 0, \;\; a_0(g) = \pi, \;\; a_{2p}(g) = 0 \text{ si } p \geq 1, \;\; a_{2p+1}(g) = -\frac{4}{(2p+1]^2\pi}.$$

La formule (ii) du théorème précédent donne donc :

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{(2p+1)^2\pi}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi^2}{3},$$

d'où l'on déduit que $\frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}$, et finalement $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$.

Conséquence. On en tire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} + \frac{\pi^4}{96}$,

d'où $(1 - \frac{1}{16}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$, et finalement $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$.

2.3.3 Exercices

Exercice 1. Soit f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = t^2 \text{ pour tout } t \in]-\pi, \pi] \text{ et } 2\pi\text{-périodique.}$$

f est-elle paire ? impaire ? continue sur $\mathbb{R}$? Pour tout $x \in \mathbb{R}$ déterminer la série de Fourier $\mathrm{SF}_f(x)$ de f en x ; (on pourra pour calculer les coefficients de Fourier faire deux intégrations par parties successives).

On considère la série de réels $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Montrer qu'elle est convergente, puis calculer sa somme en appliquant la question précédente pour une valeur bien choisie de x.

A l'aide de la formule de Plancherel-Parseval et de la question précédente, calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2. Montrer que la série numérique : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et 2π-périodique définie par :

$$f(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t < \tfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(t) = \tfrac{1}{2} \text{ si } \tfrac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

Tracer le graphe de la fonction f. Calculer le coefficient de Fourier $a_0(f)$, puis les coefficients de Fourier $a_n(f)$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer la série de Fourier $\mathrm{SF}_f(x)$.

En déduire la valeur de la somme de la série : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Déterminer la nature (convergente ou divergente) de chacune des séries numériques suivantes, en justifiant avec soin les réponses (sans cherche à calculer la somme de celles qui convergent) :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^{in}}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Chapitre 3

Séries entières

Conformément à ce que prévoit le programme, ce chapitre est plus précisément consacré à l'étude des séries entières d'une variable *complexe*, et s'applique donc en particulier aux séries entières d'une variable *réelle*.

Fixons d'abord le cadre de ce chapitre. Il nécessite de préciser comment on passe de certaines propriétés de base des fonctions d'une variable réelle aux mêmes propriétés pour les fonctions d'une variable complexe.

• Pour "mesurer" la proximité d'un réel x avec un réel fixé a, on utilise la distance définie par la valeur absolue, et la notion d'intervalle qui lui est attachée ; pour $a, x \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|x-a| < R \;\Leftrightarrow\; x \in \,]a-R, a+R[\,, \qquad |x-a| \leq R \;\Leftrightarrow\; x \in [a-R, a+R]\,.$$

Dans le cas complexe, il suffit de remplacer la valeur absolue par le module, et donc la notion d'intervalle par la notion de disque (ouvert ou fermé) ; pour $a, z \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|z-a| < R \;\Leftrightarrow\; z \in D(a,R), \qquad |z-a| \leq R \;\Leftrightarrow\; z \in \overline{D}(a,R).$$

Par exemple, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dire que f est continue en un point $a \in \mathbb{C}$ signifie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ [\ z \in D(a,\eta)\ ] \;\Rightarrow\; [\ f(z) \in D(f(a),\varepsilon)\ ].$$

Le cours du second semestre étendra ces notions au contexte encore plus général des espaces vectoriels normés.

• Il suffit de reprendre les énoncés et preuves de tous les résultats que l'on a développé en 2.1.1 et jusqu'au théorème 2.1.2.b pour observer qu'ils restent vrais sans changement si l'on considère des suites de fonctions $X \to \mathbb{K}$ non plus seulement pour X une partie de $\mathbb{R}$, mais aussi pour X une partie de $\mathbb{C}$. Reprenons certaines de ces propriétés en les formulant pour des séries de fonctions d'une variable complexes :

Soit X une partie de $\mathbb{C}$. Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions avec $f_n : X \to \mathbb{C}$.

(1) La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur X lorsqu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs telle que :

$$[\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in X,\ |f_n(z)| \leq u_n\ ] \ \text{ et } \left[\ \text{la série numérique } \textstyle\sum_{n\geq 0} u_n \text{ est convergente}\ \right].$$

(2) Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur X, alors d'une part elle converge absolument sur X (ce qui signifie que la série de fonctions positives $\sum |f_n|$ converge simplement sur X), d'autre part elle converge uniformément sur X.

(3) Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument ou uniformément sur X, alors elle converge simplement sur X, et l'on peut donc considérer la fonction f définie comme somme de la série de fonctions :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : X \to \mathbb{C} \text{ définie par } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \text{ pour tout } z \in X.$$

(4) Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge *uniformément sur* X, ou plus généralement *uniformément sur tout disque fermé inclus dans* X, et si chaque application f_n est continue sur X, alors la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X.

3.1 Convergence des séries entières

3.1.1 Rayon de convergence d'une série entière

a) Définition. On appelle *série entière* une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où les applications f_n sont de la forme forme spécifique $f_n(z) = a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ fixé.

En d'autres termes, une série entière est définie par la donnée d'une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$, et l'on note alors la série entière :

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

Deux problèmes principaux se posent alors naturellement, que l'on va étudier ci-dessous :

• Une série entière $\sum a_n z^n$ étant donnée,
– déterminer son *domaine de convergence*, c'est-à-dire l'ensemble X sur lequel elle converge simplement (X est donc l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série de nombres complexes $\sum a_n z^n$ est convergente),
– puis étudier la fonction somme $f : X \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

• Une application $f : X \to \mathbb{C}$ avec $X \subseteq \mathbb{C}$ étant donnée, déterminer s'il existe une suite (a_n) telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in X$ (ou tout z dans une partie de X).

b) Théorème fondamental. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique élément R qui est, soit un réel positif, soit $+\infty$, tel que l'on ait :*

(i) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, et donc convergente.*

(ii) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, et donc la série $\sum a_n z^n$ est divergente.*

Preuve. Soit E l'ensemble des réels $\rho \geq 0$ tels que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée. Il est clair que $0 \in E$ et que, si $\rho \in E$, alors $[0, \rho] \subseteq E$; donc E est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0. Notons R la borne supérieure de E dans $\mathbb{R}_+$ lorsque E est majorée, et $R = +\infty$ lorsque $E = [0, +\infty[$. On a par définition $[0, R[\subseteq E \subseteq [0, R]$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Il existe $\rho \in E$ tel que $0 \leq |z| < \rho < R$. La suite $(a_n \rho^n)$ est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit que :

$$|a_n z^n| = \left|a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right| \leq M \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n.$$

Or comme $0 \leq \frac{|z|}{\rho} < 1$, la série géométrique $\sum (\frac{|z|}{\rho})^n$ est convergente, donc la relation de domination ci-dessus implique que la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente. Ceci prouve que R vérifie (i).

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Alors $|z| \notin E$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, ce qui implique que la série $\sum a_n z^n$ est divergente, et prouve que R vérifie (ii).

Il reste à établir l'unicité d'un tel R. Supposons qu'il existe deux réels R_1 et R_2 satisfaisant les conditions (i) et (ii). Si $R_1 < R_2$, le réel $\rho = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ vérifie $0 \leq \rho < R_2$, de sorte que la série $\sum a_n \rho^n$ est absolument convergente, et vérifie aussi $\rho > R_1$, de sorte que la suite $(a_n \rho^n)$ n'est pas bornée. Les deux conditions sont incompatibles, d'où une contradiction. On conclut de même si $R_1 > R_2$, ce qui achève la preuve. $\square$

c) Définitions. L'élément R déterminé par ce théorème est appelé le *rayon de convergence* de la série entière.

• Dire que $R = 0$ signifie que la série entière ne converge pour aucune valeur non-nulle de z, c'est-à-dire que son domaine de convergence X est réduit à $\{0\}$.

• Au contraire, dire que $R = +\infty$ signifie qu'elle converge (et même absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que son domaine de convergence X est $\mathbb{C}$ tout entier.

• Supposons enfin que $0 < R < +\infty$. Considérons dans le plan complexe le disque ouvert de centre 0 et de rayon R :

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < R\}.$$

Par définition de R, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument en tout point de $D(0, R)$, et diverge en tout point extérieur au disque fermé :

$$\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \leq R\}.$$

Mais le théorème ne dit rien sur ce qui se passe sur le cercle :

$$C(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = R\}.$$

Figure 1

Ce cercle peut contenir à la fois des points $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ converge et des points $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels elle diverge. Pour cette raison, ce cercle est parfois appelé cercle d'incertitude de la série entière.

d) Exemples (*calcul du rayon de convergence en utilisant seulement la définition*).

► Considérons la série entière $\sum e^{-\sqrt{n}} z^n$. Cherchons son rayon de convergence R.

On a $|e^{-\sqrt{n}} z^n| = \exp(-\sqrt{n} + n \ln |z|) = \exp[\sqrt{n}(\sqrt{n} \ln |z| - 1)]$.

Supposons $|z| > 1$; donc $\ln |z| > 0$, ce qui implique que $|e^{-\sqrt{n}} z^n|$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. On a donc nécessairement $\sum e^{-\sqrt{n}} z^n$ divergente. Ainsi la série $\sum e^{-\sqrt{n}} z^n$ diverge pour tout z tel que $|z| > 1$, ce qui prouve d'après le point (i) du théorème b) que $|z| \geq R$. Donc $R \leq 1$.

Supposons $|z| < 1$; donc $\ln |z| < 0$, ce qui implique que $|e^{-\sqrt{n}} z^n|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. En particulier, la suite $(e^{-\sqrt{n}} z^n)$ est bornée. Ce qui implique d'après le point (ii) du théorème b) que $|z| \leq R$. Donc $1 \leq R$. On conclut finalement que $R = 1$.

▶ Considérons la série entière $\sum(\sin n)z^n$. Cherchons son rayon de convergence R.

On a $|(\sin n)z^n| \leq |z|^n$. Si $|z| < 1$, la série géométrique de raison $|z|$ est convergente. Le critère de majoration sur les séries à termes positifs assure donc que la série de terme général $|(\sin n)z^n|$ est convergente. Ainsi la série de terme général $(\sin n)z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < 1$. Ceci prouve que $1 \leq R$. Prenons maintenant $z = 1$. La série $\sum \sin n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Ainsi, on a trouvé le point $z = 1$ en lequel la série entière $\sum \sin nz^n$ est divergente, ce qui suffit à prouver que $R \leq 1$. On conclut finalement que $R = 1$.

e) Proposition (*calcul du rayon de convergence par comparaison*). *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.*

– Majoration : si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_b \leq R_a$.

– Domination : s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n| \leq M|b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_b \leq R_a$.

– Equivalence : si $|a_n| \sim |b_n|$ pour n au voisinage de l'infini, alors $R_a = R_b$.

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$. D'après le théorème b), la série $\sum b_n z^n$ est absolument convergente. Or par hypothèse, on a pour n assez grand $|a_n| \leq |b_n|$, donc $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$. On déduit avec le théorème 1.2.1.b que la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente, ce qui avec le théorème b), implique $|z| \leq R_a$. On a ainsi prouvé que $[0, R_b[\subseteq [0, R_a[$, c'est-à-dire $R_b \leq R_a$.

Le second point se déduit du premier en considérant la série $\sum M b_n z^n = M \sum b_n z^n$ au lieu de $\sum b_n z^n$, en observant que ces deux séries ont le même rayon de convergence pour $M \in \mathbb{R}_+^*$.

Enfin, si $|a_n| \sim |b_n|$ pour n au voisinage de l'infini, on a à la fois $a_n = O(b_n)$ et $b_n = 0(a_n)$ pour n au voisinage de l'infini, d'où en appliquant le second point $R_b \leq R_a$ et $R_a \leq R_b$, et finalement $R_a = R_b$. □

f) Proposition (*calcul du rayon de convergence en utilisant la règle de d'Alembert*). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell, \quad \text{avec } \ell \in \mathbb{R}_+ \text{ ou } \ell = +\infty.$$

Alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$, (avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Preuve. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = \ell |z| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors $\ell|z| < 1$, donc en appliquant la règle de d'Alembert 1.2.3.a, la série à termes réels positifs $\sum |a_n z^n|$ est convergente. Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, on déduit de même que $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Ainsi la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < \frac{1}{\ell}$ et non absolument convergente pour $|z| > \frac{1}{\ell}$; cela prouve avec le théorème 3.1.1.b que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$. □

▶ Remarque. Lorsque $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ n'admet pas de limite finie ou infinie pour n tendant vers $+\infty$, cette proposition est inapplicable. Par exemple pour la série entière $\sum(\sin n)z^n$ étudiée par d'autres méthodes précédemment.

▶ Remarque. Chercher à appliquer cette proposition pour des séries entières “lacunaires” (du type $\sum a_{2n} z^{2n}$, ou $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, ou $\sum a_{\sigma(n)} z^{\sigma(n)}$) nécessite des précautions dans la mesure où il est faux pour de telles séries que tous les a_n sont non-nuls à partir d'un certain rang (voir des exemples dans les exercices 2, 4, 9, 11 suivants).

▶ Exemple d'application. Toute série entière $\sum a_n z^n$ où a_n est de la forme $F(n)$ pour une certaine fraction rationnelle non-nulle $F \in \mathbb{C}(X)$ est de rayon de convergence égale à 1.

En effet. Notons $F(X) = \frac{\alpha_p X^p + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0}{\beta_q X^q + \cdots + \beta_1 X + \beta_0}$ avec p le degré du polynôme du numérateur et q le degré du polynôme du dénominateur (et donc $\alpha_p \in \mathbb{C}^*$ et $\beta_q \in \mathbb{C}^*$). Il est clair alors que la suite de terme général $a_n = F(n)$ vérifie $|a_n| \sim |\frac{\alpha_p}{\beta_q}| n^{p-q}$. D'après le troisième point de la proposition e) ci-dessus, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal au rayon de convergence de la série entière $\sum n^{p-q} z^n$.

Pour cette dernière série entière, on applique la règle de d'Alembert ci-dessus : on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)^{p-q}}{n^{p-q}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-q} = 1, \text{ donc } R = 1.$$

Ainsi par exemple les séries entières $\sum z^n$, $\sum n z^n$, $\sum (3n^2 + 5n - 2) z^n$, $\sum \frac{1}{n} z^n$, $\sum \frac{n^2+3n-1}{n-3} z^n$, $\sum \frac{2n}{n^3-1} z^n$,... ont toutes pour rayon de convergence 1.

On termine par un dernier exemple de calcul de rayon de convergence, apppliqué à une notion qui sera utile par la suite, celle de série dérivée.

g) Définition et proposition (*calcul du rayon de convergence de la série dérivée*). *On appelle série dérivée d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la série $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$. Ces deux séries entières ont le même rayon de convergence.*

Preuve. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Soit R' le rayon de convergence de $\sum n a_n z^{n-1}$. Il est clair que la série $\sum n a_n z^{n-1}$ converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si la série $\sum n a_n z^n = z \times \sum n a_n z^{n-1}$ converge. Donc R' est aussi le rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n z^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| \leq |n a_n z^n|$. Donc si la série $\sum n a_n z^n$ converge absolument en un point z, il en est de même de la série $\sum a_n z^n$. Ceci prouve que $R' \leq R$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq |z| < R$. Il existe un réel $r \geq 0$ tel que $|z| < r < R$. Dès lors, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|n a_n z^n| = |a_n r^n| \times n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \text{ avec } \begin{cases} (a_n r^n) \text{ suite bornée,} & \text{car } 0 \leq r < R \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n = 0, & \text{car } 0 \leq \frac{|z|}{r} < 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n z^n = 0$, ce qui prouve que $|z| \leq R'$. On a ainsi montré que tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ vérifie aussi $|z| \leq R'$. Ceci implique $R \leq R'$. Et finalement $R = R'$. $\square$

3.1.2 Convergence normale d'une série entière

Sur le disque de convergence, une série entière converge absolument. L'objet de ce qui suit est de donner des précisions en termes de convergence normale et/ou uniforme. Le résultat suivant, bien que de nature a priori théorique, est d'une grande importance dans les applications.

a) Lemme fondamental. *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. La série de fonctions associée converge normalement sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$.*

Preuve. Comme il est d'usage, on note encore $\sum a_n z^n$ la série de fonctions $\sum f_n$ où f_n est la fonction $D(0,R) \to \mathbb{C}$ définie par $f_n(z) = a_n z^n$.

Soit K un disque fermé inclus dans $D(0,R)$.
Il existe un disque fermé $\overline{D}(0,r)$ centrée en 0 telle que $K \subseteq \overline{D}(0,r) \subseteq D(0,R)$. Puisque $0 \leq r < R$, la série de réels positifs $\sum |a_n| r^n$ est convergente.
De plus, quel que soit $z \in K$, on a $z \in \overline{D}(0,r)$, donc $|z^n| = |z|^n \leq r^n$, et finalement $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$.
Pa définition même de la convergence normale (voir p.41), ceci prouve que la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur K. □

Figure 2

b) Remarques.

• Dès lors qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est absolument convergente, alors la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D}(0, |z_0|)$.

• Une série entière de rayon de convergence R peut ne pas converger normalement, ni même uniformément, sur le disque ouvert $D(0,R)$. C'est le cas par exemple de $\sum z^n$, avec $R = 1$.

• On peut dans le lemme remplacer "converge normalement sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert $D(0,R)$" par "converge normalement sur toute partie fermée et bornée incluse dans le disque ouvert $D(0,R)$"

3.1.3 Fonctions définies par la somme d'une série entière

a) Premier exemple préliminaire (*série exponentielle*). Considérons la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$. Le rapport $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ tend vers la limite $\ell = 0$ quand $n \to +\infty$. Donc, d'après la proposition 3.1.1.f, le rayon de convergence R est $+\infty$. Il résulte donc du théorème 3.1.1.b que la série $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, et donc que sa somme définit une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ appelée la fonction exponentielle complexe, notée e^z ou $\exp z$. On retiendra que :

$$\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots}$$

Rappelons que l'on a déjà démontré en 1.4.1.d, en utilisant la notion de produit de deux séries absolument convergentes, que

$$\boxed{(\exp z)(\exp z') = \exp(z + z') \text{ pour tous } z, z' \in \mathbb{C}.}$$

b) Second exemple préliminaire (*série entière géométrique*). Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Considérons la série entière $\sum a^n z^n$. C'est la série géométrique $\sum (az)^n$ de raison az, dont on sait qu'elle est convergente si et seulement si $|az| < 1$, et que sa somme est alors $\frac{1}{1-az}$. On en déduit que : *le rayon de convergence de la série entière $\sum a^n z^n$ est $\frac{1}{|a|}$*. Il résulte donc du théorème 3.1.1.b que la série $\sum a^n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{|a|}$, et donc que sa somme définit une fonction $D(0, \frac{1}{|a|}) \to \mathbb{C}$.

Les cas $a = 1$ et $a = -1$ sont particulièrement utiles dans la pratique. On retiendra que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour tout } z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \\ \text{pour tout } z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots \end{array}}$$

c) THÉORÈME (*continuité de la fonction définie par la somme d'une série entière*). *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. L'application $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert $D(0,R)$.*

Preuve. Le résultat étant trivial pour $R = 0$, on peut supposer $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0,R)$. Il existe un réel positif r tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset D(0,R)$. D'après le lemme 3.1.2.a, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(z_0, r)$. Or chaque application $z \mapsto a_n z^n$ est évidemment continues sur $\mathbb{C}$ donc sur $\overline{D}(z_0, r)$. Il suffit d'appliquer le dernier rappel (4) de l'introduction de ce chapitre pour conclure que l'application f définie par la somme de la série entière est continue sur $\overline{D}(z_0, r)$. En particulier f est continue en z_0, et ceci étant fait pour tout $z_0 \in D(0,R)$, on conclut que f est continue sur $D(0,R)$. $\square$

De façon naturelle, on cherche à étudier de même la dérivabilité de la fonction f définie par la somme d'une série entière. Un obstacle majeur est que l'on n'a pas dans le cadre de ce cours de théorie de la dérivation pour les fonctions d'une variable complexe. On va donc dans ce qui suit se limiter au cas d'une variable réelle. Plus précisément, on considère, pour une série entière $\sum a_n z^n$ avec (a_n) suite de nombre complexes, la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ définie par la somme de cette série. On obtient donc une fonction encore notée f définie par :

$$f :]-R, R[\to \mathbb{C}, \ x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

d) THÉORÈME (*dérivabilité de la fonction définie par la somme d'une série entière dans le cas réel*). *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière avec (a_n) est une suite de nombres complexes et R son rayon de convergence. On suppose $R > 0$.*

(i) *L'application $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$, et sa dérivée est :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pour tout } x \in]-R, R[.$$

(ii) *Plus généralement, f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et l'on a :*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \quad \text{pour tout } z \in]-R, R[\text{ et tout } k \in \mathbb{N}.$$

(iii) *En particulier, pour tout entier $k \geq 0$, on a : $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$.*

Preuve. D'après 3.1.1.g, le rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ est R. Donc d'après le lemme 3.1.2.a, la série de fonctions $\sum n a_n z^{n-1}$ converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé K inclus dans $D(0,R)$. En prenant les restrictions à $\mathbb{R}$, on en déduit que la série de fonctions $\sum n a_n x^{n-1}$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de dérivation pour les séries de fonctions formulé en [5] de 2.2.1.b pour obtenir le point (i). Le point (ii) s'obtient en réitérant par une récurrence évidente. Le point (iii) est une conséquence immédiate du (ii). $\square$

e) Remarques et exemples. Avec les données et notations ci-dessus, la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-R, R[$ et l'on a pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_2 x + 12a_3 x^2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots$$

etc...

► Reprenons l'exemple de la série exponentielle traité au a). Appliquons-lui le théorème d), avec $R = +\infty$. L'application exponentielle, définie par : $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$, est de classe C^∞ sur $]-\infty, +\infty[$, et sa dérivée sur $\mathbb{R}$ est :

$$(\mathrm{e}^x)' = 0 + 1 + 2\tfrac{x}{2} + 3\tfrac{x^2}{6} + 4\tfrac{x^3}{24} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n \tfrac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} x^n = \mathrm{e}^x.$$

On a retrouve le fait que : $\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^x)' = (\mathrm{e}^x)'' = \cdots = (\mathrm{e}^x)^{(n)} = \cdots$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

► Reprenons l'exemple de la série géométrique $\sum x^n$ traité au b). Appliquons-lui le théorème d), avec $R = 1$. L'application $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$, et sa dérivée est : $\frac{1}{(1-x)^2} = (\frac{1}{1-x})' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$. On conclut que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\tfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n, \quad \text{et plus généralement } \tfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

f) Corollaire (*primitive de la fonction définie par la somme d'une série entière*). *Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière avec (a_n) est une suite de nombres complexes et R son rayon de convergence. On suppose $R > 0$. Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et l'application $F :]-R, R[\to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ est la primitive de f s'annulant en 0.*

Preuve. On applique le théorème précédent à F. □

► Reprenons l'exemple de la série géométrique $\sum x^n$ traité au b). Appliquons-lui le corollaire f), avec $R = 1$. On déduit que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

g) Remarque. Considérons deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, de rayon de convergence respectifs R et R'. Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ et $g :]-R', R'[\to \mathbb{C}$ les fonctions d'une variable réelle respectivement définies par ces séries.

• S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.

En effet. C'est une conséquence évidente du point (iii) du théorème d), puisqu'on a alors $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ pour tout entier $k \geq 0$. □

• f est paire si et seulement si $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 0$. f est impaire si et seulement si $a_{2p} = 0$ pour tout $p \geq 0$.

En effet. La condition est clairement suffisante. Si l'on suppose réciproquement que f est paire, alors $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \,]-R, R[$. Comme $x \mapsto f(-x)$ est la fonction définie par la somme de la série entière $\sum(-1)^n a_n x^n$, il résulte de la remarque précédente que $a_n = (-1)^n a_n$ pour tout $n \geq 0$, d'où $a_n = 0$ si n est impair. La preuve est identique si l'on suppose f impaire. $\square$

3.1.4 Cas réel : application aux équations différentielles

On cherche à déterminer, pour une équation différentielle donnée, s'il existe des solutions qui sont la somme d'une série entière sur un intervalle $]-R, R[$ de $\mathbb{R}$.

Exemple. Considérons l'équation différentielle $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.
On cherche une solution $y(x)$ qui soit la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$. On a :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Donc
$$\begin{aligned} 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} 4(m+1) m a_{m+1} x^m + \sum_{m=0}^{+\infty} 2(m+1) a_{m+1} x^m - \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m \\ &= (2a_1 - a_0) + \sum_{m=1}^{+\infty} [4(m+1) m a_{m+1} + 2(m+1) a_{m+1} - a_m] x^m. \end{aligned}$$

Il en résulte que $y(x)$ est solution de l'équation différentielle de départ si et seulement si :

$$a_1 = \tfrac{1}{2} a_0 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \tfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} a_n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Imposons de plus la condition intiale $y(0) = 1$. Cela signifie que $a_0 = 1$. D'où l'on tire :

$$a_1 = \tfrac{1}{2}, \quad a_2 = \tfrac{1}{3 \times 4} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4!}, \quad a_3 = \tfrac{1}{5 \times 6} \times \tfrac{1}{4!} = \tfrac{1}{6!}, \quad \text{et par récurrence } a_n = \tfrac{1}{(2n)!}.$$

On conclut que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$, dont le rayon de convergence est clairement $+\infty$.

Remarque. – On définit naturellement à partir de la série exponentielle les deux séries entières :

$$\mathrm{ch} z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{et} \quad \cos z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

dont le rayon de convergence est $+\infty$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la solution $y(x)$ trouvée s'exprime comme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} x^n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \mathrm{ch}\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} (-(\sqrt{-x})^2)^n = \cos\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Cette dernière remarque nous introduit à la question qui fait l'objet de la partie 2 de ce chapitre : savoir si, réciproquement à ce qu'on vient de faire dans la partie 1, une fonction donnée est ou non la somme d'une série entière sur un certain intervalle.

3.1.5 Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$.

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad a_n = \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}, \qquad a_n = (\cos \tfrac{1}{n})^{n^\alpha}.$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}.$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} n! z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}\right) z^n.$$

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence de : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2} z^n$.

Exercice 5. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière (avec $a_n \in \mathbb{C}$)), de rayon de convergence R.

– Calculer R en fonction des rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 des séries entières $\sum_{p\geq 0} a_{2p} z^{2p}$ et $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1} z^{2p+1}$.

– On suppose $R \neq 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

– On suppose $R \neq 0$. On note $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \in \mathbb{C}$ pour tout entier $n \geq 0$. Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière $\sum_{n\geq 0} s_n z^n$, en discutant suivant que $R > 1$ ou $R \leq 1$.

Exercice 6. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières complexes, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n$ (produit de Hadamard) vérifie $R \geq R_1 R_2$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 7. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière (avec $a_n \in \mathbb{C}$)), de rayon de convergence R. On introduit la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$, de rayon de convergence R'. Montrer que $R' \geq \max(1, R)$. Vérifier que si $R' > 1$, alors $R' = R$. Exprimer R' en fonction de R.

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$? (Indication : on pourra considérer la série dérivée).

Exercice 9. Déterminer le rayon de convergence de la série entière complexe $\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^{2n}$ et calculer sa somme. En déduire que $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

Exercice 10. Montrer que $\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$.

Application : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f la fonction polynomiale $x \mapsto a + bx + cx^2$; déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} f(n) x^n$ et calculer sa somme sur $], -R, R[$.

Exercice 11. Déterminer le rayon de convergence des séries entières réelles :

$$y_0(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2p} x^{2p} \quad \text{et} \quad y_1(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2p+1)} x^{2p+1}.$$

Soit (E) l'équation différentielle : $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$. Soit $y(x)$ la somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence infini. Montrer que $y(x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

Exercice 12. Pour tout entier $n \geq 1$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de n et s_n la somme de ces diviseurs. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 1} d_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} s_n z^n$. (Indication : on pourra introduire la série entière $\sum nz$).

Exercice 13. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\, dt$. Montrer a_n est bien définie, que la suite (a_n) converge dans $\mathbb{R}_+$, et que $a_n \sim K\frac{1}{n}$ pour une constante K que l'on déterminera. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Exercice 14. On considère la série entière complexe $S(z) = \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n \ln n}\right) z^n$. Etudier la nature des séries numériques $S(1)$ et $S(-1)$; en déduire le rayon de convergence R de $S(z)$. Déterminer la nature de $S(z)$ en tout point z du cercle $C(0, R)$.

Indication. On pourra utiliser le suivant (dit parfois lemme d'Abel) : *Soit $\sum u_n$ une série numérique telle que la suite des sommes partielles soit bornée ; soit (α_n) ne suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Alors la série $\sum \alpha_n u_n$ est convergente.*

3.2 Développement en séries entières

3.2.1 Fonction développable en série entière.

a) Définition. Soit f une fonction d'une variable réelle x définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f est *développable en série entière centrée en 0* lorsqu'il existe un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ centré en 0 inclus dans I, et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq \alpha$, tels que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{pour tout } x \in\,]-\alpha, \alpha[.$$

D'après le théorème 3.1.3.d la fonction f est de classe C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$, et l'on a :

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \tfrac{1}{2} f''(0), \quad \ldots, a_n = \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad \ldots$$

ce qui prouve en particulier, comme on l'a vu en 3.1.3.g l'unicité du développement en série entière (s'il existe). A noter (avec la même remarque) que le développement en série entière d'une fonction paire (respectivement impaire) ne contient que des termes $a_n x^n$ avec n pair (respectivement impair).

b) Convention terminologique. Dans toute la suite, "développable en série entière" signifiera "développable en série entière centrée en 0".

Plus généralement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a est dite développable en série entière centrée en a lorsque la fonction $x \mapsto f(x + a)$ est développable en série entière centrée en 0 ; c'est pourquoi on se ramène à l'étude du cas $a = 0$.

c) exemples et contre-exemple. Comme on l'a vu en 3.1.3,a et b, les fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \frac{1}{1-ax}$ sont développables en série entière.

Contre-exemple : une fonction peut être de classe C^∞ sur un intervalle I sans être développable en série entière. Prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

L'application f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2}$, d'où par application du théorème limite de la dérivée, on déduit que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $f^{(n)}(0) = 0$. Dès lors, si f était développable en série entière, il existerait $\alpha > 0$ tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = 0$ pour tout $x \in\,]-\alpha, \alpha[$, ce qui n'est pas vrai puisque f ne s'annule qu'en 0.

d) Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un développement en série entière. Rappelons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME (formule de Taylor avec reste intégral). *Pour toute application f : $]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞, on a pour tout entier $N \geq 1$ et tout $x \in]-\alpha, \alpha[$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \tfrac{1}{N!}f^{(N)}(0)x^N + R_N(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_N(x), \end{aligned}$$

où le reste $R_N(x)$ peut s'exprimer sous la forme $R_N(x) = \int_0^x \frac{1}{N!}(x-t)^N f^{(N+1)}(t)\, dt$.

Sans revenir sur ce résultat vu en première année, on en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION. *Avec les données et hypthèses ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est développable en série entière ;*

(ii) *il existe $0 < \beta \leq \alpha$ tel que $\lim\limits_{N \to +\infty} R_N(x) = 0$ pour tout $x \in]-\beta, \beta[$;*

(iii) *il existe $0 < \gamma \leq \alpha$, $A > 0$, $C > 0$ tels que $|f^{(n)}(x)| \leq CA^n n!$ pour tous $x \in]-\gamma, \gamma[$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Supposons que l'on ait (iii). Pour tous $x \in]-\gamma, \gamma[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\int_0^x \tfrac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt\right| \leq \int_0^x |\tfrac{1}{n!}(x-t)^n|\, |f^{(n+1)}(t)|\, dt \\ &\leq CA^{n+1}(n+1)! \left|\int_0^x \tfrac{1}{n!}(x-t)^n\right| = CA^{n+1}|x|^{n+1} \end{aligned}$$

Posons $\beta = \min(\gamma, \frac{1}{A})$. Pour tout $x \in]-\beta, \beta[$, on a $|Ax| < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$. Ce qui prouve (ii).

Supposons que l'on ait (ii). Pour tout $x \in]-\beta, \beta[$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k = f(x) - R_n(x)$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k = f(x)$, ce qui prouve que la série entière $\sum \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$ est de rayon de convergence $R \geq \beta > 0$, et donc que f est développable en série entière. La dernière implication est laissée au lecteur en exercice. □

e) MÉTHODES DE CALCUL. Un raisonnement "théorique" (entre autres celui de la proposition précédente) permettant d'établir l'existence d'un développement en série entière pour certaines fonctions de références (exponentielle, puissances,...), on se ramène à ces fonctions de références en utilisant les propriétés suivantes (dont les énoncés plus explicites et les preuves seront vus en exercices) :

1. la somme de deux fonctions f et g développables en série entière est développable en série entière, et le développement de $f+g$ s'obtient en faisant la somme des deux développements ;
2. idem pour le produit fg ;
3. la dérivée d'une fonction f développable en série entière est développable en série entière, et le développement de f' s'obtient en dérivant terme à terme le développement de f ;
4. idem pour une primitive.

3.2.2 Exemples classiques.

a) Première série d'exemples. Le résultat central (que l'on a déjà démontré en 3.1.3.a) est que la fonction exponentielle est développable en série entière, avec un rayon de convergence infini :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}x^n = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots \qquad \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[}$$

Les fonctions hyperboliques étant définies par $\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, les résultats sur les sommes de fonctions développables en séries entières donnent :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{ch}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\\ \mathrm{sh}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\end{array}}$$

De même pour les fonctions trigonométriques $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})$ et $\sin x = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\\ \sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\end{array}}$$

b) Seconde série d'exemples. Un autre résultat fondamental est que la fonction puissance $(1 + x)^\alpha$ est développable en série entière pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec un rayon de convergence égal à 1 (infini dans le cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$ comme on l'a vu en 3.1.3.b) :

$$\boxed{(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \qquad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour tout $n \geq 1$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$. La série entière $\sum a_n z^n$ a donc 1 pour rayon de convergence, et l'on peut considérer la fonction $f_\alpha : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors $f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ pour tout $\left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}$. Un calcul simple montre alors que

$$(1 + x)f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{((n + 1)a_{n+1} + n a_n)}_{=\alpha a_n} x^n = \alpha f_\alpha(x).$$

Mais on sait par ailleurs que les solutions de l'équation différentielle $(1 + x)y' - \alpha y = 0$ linéaire du premier ordre sont les applications de la forme $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)} = \lambda(1 + x)^\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha(x) = \lambda(1 + x)^\alpha$ pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$. Comme $f_\alpha(0) = a_0 = 1$, on a $\lambda = 1$, ce qui achève la preuve. □

Pour $\alpha = -1$, on retrouve $\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}$,

et donc en changeant x et $-x$, la formule $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}$.

En prenant leurs primitives s'annulant en 0, il vient

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{et} \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}\,,$$

dont la demie-somme conduit à $\boxed{\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}\,.$

En remplaçant x par x^2 dans $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ et en prenant la primitive s'annulant en 0, on obtient :

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}\,.$$

Reprenons maintenant la formule de départ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$; il vient :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}\,.$$

En remplaçant x par $-x^2$ et en prenant la primitive s'annulant en 0, on obtient :

$$\boxed{\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} \, \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}\,.$$

3.2.3 Exercices

Exercice 1. En utilisant des développements de fonctions classiques, déterminer le développement en série entière des fonctions réelles suivantes, en précisant le rayon de convergence :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad g(x) = \sin^2 x \cos x, \qquad h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

Exercice 2. Par dérivation ou intégration de développements en séries entières connus, déterminer le développement en série entière des fonctions réelles suivantes, en précisant le rayon de convergence :

$$f(x) = \operatorname{argth} \frac{x + \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} \text{ où } \alpha \text{ réel} > 0 \text{ fixé}, \qquad g(x) = (\arctan x)^2.$$

Exercice 3. Soit f l'application de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. en intégrant une équation différentielle du premier ordre dont f est solution, déterminer le développement en série entière de f, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 4. Déterminer le développement en série entîre des fonctions rationnelles suivantes, en précisant le rayon de convergence :

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}, \qquad g(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2, \qquad h(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1-x^3)}.$$

Exercice 5. Montrer que l'application $f : x \mapsto \int_0^1 t^{xt}\, dt$ est définie sur $\mathbb{R}$, et en donner un développement en série entière ; *indication* : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}(t \ln t)^n$ de fonctions de la variable t converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{C}^\star$. Soit $\varphi_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_x(u) = \frac{\mathrm{e}^{ux} - 1}{\mathrm{e}^u - 1}$ pour tout $u \neq 0$, et $\varphi_x(0) = x$. Montrer que φ_x est développable en série entière.

En notant alors $\varphi_x(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(x) \frac{1}{n!} u^n$, montrer que chaque Q_n est une fonction polynomiale de x vérifiant : $Q_n(x+1) - Q_n(x) = x^n$ (polynômes de Bernouilli).

Annexe 1 : deux fiches de synthèse

UN PETIT VADEMECUM PRATIQUE SUR LES SUITES ET LES SÉRIES DE FONCTIONS

Ce résumé doit beaucoup (c'est un euphémisme) à un document de même nature rédigé pour le M1 MEEF par François Martin ; qu'il soit ici remercié de me l'avoir mis à disposition.

Un petit vademecum pratique sur les suites de fonctions

I. Notions de convergence simple et de convergence uniforme

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$.

- Première définition. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge simplement* vers f sur I lorsque :

  pour chaque $x \in I$, la suite de réels $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$,

  ce qui équivaut à :
  $$\forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$
  ce qui équivaut encore à :
  $$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Seconde définition. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément* vers f sur I lorsque :
  $$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$
  où $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, ce qui équivaut encore à :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall x \in I,\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Lien entre les deux notions. **Si** $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, **alors** $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur I, [l'implication réciproque étant fausse].

II. Préservation de certaines propriétés par la convergence uniforme

Les théorèmes suivants sont utiles en pratique :

- Continuité - Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions **continues** sur I qui converge **uniformément** sur I vers une fonction f. Alors f est continue sur I.

- Dérivabilité - Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur I. Soient f et g deux fonctions $I \to \mathbb{R}$. On suppose que :
  1. la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I,
  2. la suite de fonctions (f_n') converge **uniformément** vers g sur I.

  Alors la fonction f est de classe C^1 sur I, et $f' = g$ [c'est-à-dire $(\lim_{n\to+\infty} f_n)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$].

- Permutation limite/intégrale - Soient $I = [a,b]$ un **segment** et (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ qui converge **uniformément** sur I vers une fonction f.
  $$\text{Alors : } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque : lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme, on peut aussi parfois appliquer le résultat suivant pour permuter une limite et une intégrale.

- Théorème de convergence dominée Soient I un intervalle quelconque et (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge simplement vers f sur I. On suppose de plus qu'il existe une fonction g continue intégrable sur I telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$. Alors chaque f_n est intégrable sur I, f est intégrable sur I, et l'on a :
  $$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

III. Comment faire en pratique ?

1) Comment prouver que (f_n) converge simplement vers f sur I ?

On considère un $x \in I$ quelconque fixé, et on cherche à prouver que la **suite numérique** $(f_n(x))$ converge vers le réel $f(x)$. On se ramène donc à un simple problème de convergence de suite de nombres réels (où x intervient comme un paramètre fixé).

2) Comment prouver que (f_n) converge uniformément vers f sur I ?

- Méthode 1 : on calcule explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ (par exemple par une étude de fonctions) et on prouve que cette expression tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

- Méthode 2 : on majore $|f_n(x) - f(x)|$ pour tous les $x \in I$ par un réel a_n indépendant de x, et tel que la suite (a_n) converge vers 0.

3) Comment prouver que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I ?

- Méthode 1 : on calcule explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ (par exemple par une étude de fonctions) et on prouve que cette expression ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

- Méthode 2 : on trouve une suite (x_n) d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne converge pas vers 0.

- Méthode 3 : on détermine la limite simple f de la suite de fonctions (f_n). Si l'on constate que toutes les fonctions f_n sont continues sur I, et que f n'est pas continue sur I, on conclut (par contraposée du théorème de continuité) que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.

4) Comment prouver que la limite d'une suite de fonctions continues est continue sur un intervalle I ?

- Méthode 1 : lorsque la suite (f_n) converge uniformément sur I. On applique alors les théorèmes de préservation (voir ci-dessus) ;

- Méthode 2 : lorsque la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I mais converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$ vers f. Alors comme la continuité est une propriété locale, on en déduit par les théorèmes de préservation précédents que f est continue (ou de classe C^1) sur tout segment $[a, b] \subset I$, **et donc** l'est sur I tout entier.

Ces méthodes s'adaptent *mutatis mutandis* si l'on remplace “continue” par “de classe C^1”.

5) Deux erreurs á ne pas commettre

- La phrase “(f_n) converge uniformément vers f” ne signifie rien. Il faut toujours écrire “(f_n) converge uniformément vers f **sur I**”. Cette notion (comme la convergence simple) dépend très fortement de l'intervalle I considéré.

- Ce n'est pas parce que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$, que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Un petit vademecum pratique sur les séries de fonctions

I. Notions de convergence pour une série de fonctions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$. Etudier la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ consiste à étudier la suite $(S_N)_{N\geq 0}$ des sommes partielles associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction $I \to \mathbb{R}$, et $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ est aussi une fonction $I \to \mathbb{R}$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $f_n(x)$ est un réel, et $S_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} f_n(x)$ est aussi un réel.

1) *Les deux notions de convergence vues sur les suites de fonctions s'appliquent donc en particulier aux séries de fonctions.*

- Première définition. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement* sur I lorsqu'il existe une fonction $S : I \to \mathbb{R}$ telle que la suite de fonctions $(S_N)_{N\geq 0}$ converge vers S simplement sur I. Ceci équivaut au fait que :
$$\text{pour tout } x \in I, \text{ la série numérique } \sum\nolimits_{n\geq 0} f_n(x) \text{ converge,}$$
et on a alors :
$$\text{pour tout } x \in I, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x) = \lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x).$$

- Seconde définition. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément* sur I lorsqu'il existe une fonction $S : I \to \mathbb{R}$ telle que la suite de fonctions $(S_N)_{N\geq 0}$ converge vers S uniformément sur I. Ceci équivaut à :
$$\lim_{N\to+\infty} \|S_N - S\| = 0.$$

2) *On introduit par ailleurs deux autres notions de convergence propres aux séries de fonctions.*

- Troisième définition. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement* sur I lorsque la série de réels positifs $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ est convergente.

  Ceci équivaut à l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs (ne dépendant pas de x) telle que :
$$\Big[\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ |f_n(x)| \leq a_n\Big] \quad \text{et} \quad \Big[\text{la série numérique } \sum\nolimits_{n\geq 0} a_n \text{ est convergente}\Big].$$

- Quatrième définition. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge absolument* sur I lorsque la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ converge simplement sur I.

  Cela signifie que, pour tout $x \in X$, la série de réels positifs $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ est convergente (et donc la série de réels $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente).

3) *On peut synthétiser de façon schématique les liens entre ces quatre notions :*

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{convergence normale}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{convergence uniforme}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{convergence absolue}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{convergence simple}}
\end{tikzcd}$$

II. Préservation de certaines propriétés par la convergence normale

En pratique, la convergence normale pour les séries est beaucoup plus simple d'utilisation que la convergence uniforme. On reformule ci-dessous certaines propriétés vues sur la convergence uniforme des suites de fonctions en termes de convergence normale des séries de fonctions :

- Permutation des limites - Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement vers une fonction S sur $I = [a, b]$, et si chaque fonction f_n admet une limite ℓ_n en b, alors la série numérique $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge vers une limite ℓ, S admet une limite en b, et $\lim\limits_{x\to b} S(x) = \ell$.
- Continuité - Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I vers une fonction S, et si les fonctions f_n sont toutes continues sur I, alors S est aussi continue.
- Dérivabilité - Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S, si les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I, et si la série $\sum f'_n$ converge normalement sur I, alors S est de classe C^1 sur I et l'on a pour tout $x \in I$:
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$
- Intégration sur un segment - Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $I = [a, b]$ vers une fonction S et si les fonctions f_n sont toutes continues sur I, alors la série numérique $\sum_{n\geq 0}\big(\int_a^b u_n(t)dt\big)$ est convergente l'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big) = \int_a^b S(t)dt.$$

III. Comment faire en pratique ?

1) Comment prouver que $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I ?

On considère un $x \in I$ quelconque fixé, et on cherche à prouver que la **série numérique** $\sum f_n(x)$ converge vers le réel $S(x)$. On se ramène donc à un simple problème de convergence de série numérique (où x intervient comme un paramètre fixé).

2) Comment prouver que $\sum f_n$ converge absolument sur I ?

On considère un $x \in I$ quelconque fixé, et on cherche à prouver que la **série numérique positive** $\sum |f_n(x)|$ converge. On se ramène donc à un simple problème de convergence de série numérique positive (où x intervient comme un paramètre fixé).

3) Comment prouver que $\sum f_n$ converge normalement sur I ?

- Méthode 1 : on calcule (par exemple par une étude de fonctions) $\|f_n\|_\infty$ et on prouve que la série numérique positive $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
- Méthode 2 : on majore $|f_n(x)|$ pour tout $x \in I$ par un réel a_n, indépendant de x, et tel que la série $\sum a_n$ converge.

4) Comment prouver que $\sum f_n$ converge uniformément sur I ?

- Méthode 1 : avant toute chose, on regarde si la série converge normalement sur I, ce qui implique la convergence uniforme sur I.
- Méthode 2 : sinon, on revient à la définition en montrant que $\lim\limits_{N\to+\infty} \|S_N - S\| = 0$.

Annexe 2 : archives de sujets de devoirs, chapitres 1,2,3

Séries numériques,
Séries de fonctions,
Séries entières

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 24 octobre 2012

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 4

Durée : deux heures. *Sans documents.*

Exercice 1

Déterminer la nature des séries de terme général ci-dessous :

a) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$, $\quad v_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$, $\quad w_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Indication : on pourra considérer les suites nv_n et $n^2 w_n$.

b) $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{n}\right)$, $\quad v_n = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{n}}\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)\right)$.

c) $u_n = \left(\dfrac{\lambda^n}{1+\lambda^{2n}}\right)$, $\quad v_n = \left(\dfrac{\lambda^{2n}}{1+\lambda^{2n}}\right)$, $\quad w_n = \left(\dfrac{1}{1+\lambda^{2n}}\right)$, $\qquad$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Indication : distinguer suivant que $\lambda = 1$, $\lambda > 1$ ou $\lambda < 1$.

Exercice 2

1) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $H(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Rappeler comment est définie la constante d'Euler γ. En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$H(n) = \ln n + \gamma + \varepsilon(n) \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

2) On considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$. Montrer que cette série converge.

3) Déterminer explicitement trois entiers $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que : $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

4) Déduire des questions 1) et 3) qu'il existe un entier d que l'on déterminera tel que, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln \frac{n^3}{(n+1)(n+2)^2} + d + \varepsilon'(n) \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'(n) = 0.$$

5) Calculer $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$.

suite au verso...

Exercice 3

On fixe un réel θ non multiple de 2π. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\cos n\theta}{n}.$$

1) Montrer que la suite (S_n) est bornée.
Indication : on pourra introduire les sommes partielles de la série complexe $\sum_{k\geq 0} \exp ik\theta$.

2) Exprimer u_n en fonction de S_n et S_{n-1}. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)} - S_0 + \frac{S_N}{N+1}.$$

En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

3) Montrer que $|u_n| \geq u_{2n} + \dfrac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$.
Indication : on pourra utiliser le fait que $|\cos x| \geq \cos^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 4

Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln[n + (-1)^n]}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$.

Indication : on pourra

- introduire la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ et déterminer sa nature,
- écrire u_n et v_n sous la forme $u_n = a_n - b_n$ et $v_n = a_n - c_n$, pour des suites (b_n) et (c_n) de réels choisies de façon appropriée,
- déterminer la nature des séries $\sum b_n$ et $\sum c_n$,
- conclure en déterminant la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

vendredi 15 novembre 2012

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

Complément au devoir surveillé n° 4

Durée : 45 minutes *Sans documents.*

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries réelles de terme général u_n suivant :

1) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$.

2) $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$. (On rappelle que $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + e^{-x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

3) $u_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

4) $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+4}\right)^n$.

5) $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n^2}$, où $x \in \mathbb{R}$ fixé. (Distinguer suivant les valeurs de x).

6) $u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a)^2 \cdots (1+a)^n}$ où $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

7) $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$

8) $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}\left[(-1)^n + k\right]$, où $k \in \mathbb{R}$ fixé. (Ecrire $\sum u_n$ comme somme de deux séries).

9) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

10) $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n$. (Etudier $n^2 u_n$).

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 20 novembre 2013

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 5

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

EXERCICE 1

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans chacun des cas suivants.

1) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \sqrt{\ln n}}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) **2)** $u_n = \dfrac{1}{n} . \dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ **3)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$

4) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$ **5)** $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **6)** $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

7) $u_n = \dfrac{2.4.6.\ldots.(2n)}{n^n}$ **8)** $u_n = \dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.

Indication pour l'exemple 8 : on pourra montrer que : $1!+2!+3!+\cdots+(n-1)! \leq (n-1)\times(n-1)!$

EXERCICE 2

Les deux questions sont indépendantes.

1) Soient $\sum u_n, \sum v_n, \sum w_n$ trois séries réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ converge. [*Attention,* on ne suppose pas que ces séries sont à termes réels positifs].

2) Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs convergente. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$. [*Indication :* On pourra partir de l'observation $(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n})^2 \geq 0$].

EXERCICE 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$.

Etudiez la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de α.

.../...

Exercice 4

Les deux questions sont indépendantes.

1) On étudie la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ pour $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$; en déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

b) On appelle S la somme de cette série, c'est-à-dire $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Montrer que $\frac{1}{3}S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$. En déduire la valeur de S.

2) On étudie la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ pour $v_n = \dfrac{1}{(3n)\,!}$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge.

b) On appelle T la somme de cette série, c'est-à-dire $T = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$. On note comme toujours $1, j, j^2$ les racines cubiques primitives de 1 dans $\mathbb{C}$, qui vérifient donc $1^3 = j^3 = (j^2)^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$; calculer $1^m + j^m + j^{2m}$ pour tout entier $m \geq 0$, en distinguant suivant que m est ou non multiple de 3. En déduire la valeur de T.

Exercice 5

Les deux questions sont indépendantes.

1) Soient P et Q deux polynômes non-nuls dans $\mathbb{R}[X]$. En discutant suivant la différence entre $\deg P$ et $\deg Q$, déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$.

2) Soit P un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = (n^4 + 2n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$.

a) Montrer que, si P n'est pas de degré 3 et unitaire, la série $\sum v_n$ est grossièrement divergente.

b) On suppose ici que $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a, b, c la série $\sum v_n$ est-elle convergente ?

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 17 septembre 2014

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 1

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

Exercice 1

Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$.
Calculer les sommes partielles de la série de terme général u_n. En déduire qu'elle converge et calculer sa somme.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans chacun des cas suivants.

1) $u_n = \dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ **2)** $u_n = \ln(1+\mathrm{e}^{-n})$ **3)** $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

4) $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$ **5)** $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ **6)** $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n$ (*étudier* $n^2 u_n$)

Exercice 3

On fixe un réel $\alpha > 0$ et l'on pose : $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.
Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $0 < \frac{1}{2^\alpha n^{\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur le paramètre α pour que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (on raisonnera en deux temps en montrant d'abord que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge, puis la réciproque).

Exercice 5

On fixe deux réels x et y tels que $y \geq 0$. On considère la série terme général $u_n = \frac{x^n}{y^n+n}$ pour tout $n \geq 1$.

1) On suppose ici que $y > 1$. Montrer que $u_n \sim \frac{x^n}{y^n}$ pour n tendant vers l'infini. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ suivant les valeurs de x.

2) On suppose maintenant que $0 \leq y \leq 1$. Montrer que $u_n \sim \frac{x^n}{n}$ pour n tendant vers l'infini. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ suivant les valeurs de x.

Exercice 6 (autour du cours)

1) On considère deux séries numériques $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ que l'on suppose toutes les deux convergentes. On note $\sum_n w_n$ la série somme $\sum_n u_n + \sum_n v_n$, avec donc $w_n = u_n + v_n$.

- **a)** Montrer que si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont absolument convergentes, alors il en est de même de $\sum_n w_n$.
- **b)** Montrer que si $\sum_n u_n$ est absolument convergente et que $\sum_n v_n$ ne l'est pas, alors $\sum_n w_n$ n'est pas absolument convergente.
- **c)** En explicitant deux exemples bien choisis, montrer que, si ni $\sum_n u_n$ ni $\sum_n v_n$ ne sont absolument convergentes, alors $\sum_n w_n$ peut être absolument convergente ou ne pas l'être.

2) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant les réponses :

- **a)** Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ tend vers une limite finie $\ell < 1$.
- **b)** Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.
- **c)** Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang [*Indication :* considérer l'exemple où u_n est défini par $u_{2k} = \frac{1}{k^2}$ et $u_{2k+1} = \frac{2}{k^2}$ pour tout k].

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 16 septembre 2015

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 1

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.

a) $u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 1}{\sqrt{n}(n-2)(n^2+3)}$ **c)** $u_n = \dfrac{1}{n \sin^2 n}$ **e)** $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$ **g)** $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

b) $u_n = \dfrac{3^n + 2^n}{5^n + n^2 + \ln n}$ **d)** $u_n = \dfrac{n^{100}}{n!}$ **f)** $u_n = \dfrac{\ln n}{n^{3/2}}$ **h)** $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+1)}$

Exercice 2

On considère la série de terme général $w_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

1) Montrer que cette série converge.

2) Est-elle absolument convergente ?

3) En calculant explicitement la limite des sommes partielles, donner la valeur de la somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} w_n$ de la série.

Exercice 3

Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$.

2) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} (u_n - v_n)$ est à termes positifs, et déterminer sa nature.

3) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} v_n$.

4) Montrer que u_n et v_n sont équivalents (pour n tendant vers l'infini).

5) Formuler une remarque pertinente sur ce que vous suggèrent les résultats de ces questions.

.../...

Exercice 4

1) Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}{n\,!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

a) Exprimer v_n en fonction de n.

b) En utilisant un développement limité de $\ln(1 + \frac{1}{n})$ à un ordre suffisamment grand, montrer que v_n est équivalent à $k\frac{1}{n^\alpha}$ pour deux réels k et α que l'on déterminera.

c) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$.

2) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque de réels. On pose $y_n = x_{n+1} - x_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ converge si et seulement si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge.

3) Utiliser les deux questions précédentes pour démontrer qu'il existe une constante réelle $C > 0$ tel que $n!$ est équivalent à $Cn^n\sqrt{n}\mathrm{e}^{-n}$ pour n tendant vers l'infini. [1]

Exercice 5

1) Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes réels quelconques. On note $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles associée. Montrer que, si la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$.

2) On rappelle qu'une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est dite injective lorsque :

pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, si $p \neq q$, alors $f(p) \neq f(q)$.

a) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est injective.

b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui n'est pas injective.

c) Montrer que, si f est injective, alors on a pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} k = \tfrac{n(n-1)}{2}.$$

3) On fixe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective quelconque. En minorant à l'aide de la question 2) la quantité $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{f(k)}{k^2}$, utiliser la question 1) pour montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$ est divergente.

1. *Remarque historique :* cette formule $n! \sim Cn^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$ est la forme initiale, due à de Moivre, de la célèbre formule de Stirling, qui précise que $C = \sqrt{2\pi}$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 28 novembre 2012

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 6

Durée : deux heures. *Sans documents.*

Exercice 1

1) Pour tout entier $n \geq 1$, soit f_n l'application $[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n \ln x$ pour $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$.

– Etudier les variations de f_n.

– En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application f que l'on déterminera.

2) Pour tout entier $n \geq 1$, soit g_n l'application $[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

– Montrer que la suite (g_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une application g que l'on déterminera.

– Calculer $g_n(\frac{\pi}{2n})$ et en déduire que la suite (g_n) ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

– Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ (avec $a > 0$).

3) Pour tout entier $n \geq 1$, soit h_n l'application $[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $h_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$.

– Montrer que la suite (h_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une application h que l'on déterminera.

– Soit $I_n = \int_0^1 h_n(t)\,dt$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite (I_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera. En déduire que la suite (h_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

– Montrer que la suite (h_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 2

Soit (f_n) une suite d'applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application f.

1) Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\|f_n - f\|_\infty \leq 1$.

2) En déduire que, pour $n \geq N$ fixé quelconque, l'application polynomiale $f_n - f_N$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et qu'il existe alors un réel c_n tel que $f_n(x) = f_N(x) + c_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Conclure que f est une application polynomiale.

suite au verso...

Exercice 3

On considère trois suites de réels $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ qui vérifient, pour tout $n \geq 1$:

$$0 < a_n - b_n < a_n < a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad c_n > 0.$$

On considère pour tout $n \geq 1$ l'application affine par intervalles $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; 0 \leq x \leq a_n - b_n \; \text{ ou si } \; x \geq a_n + b_n \\ \frac{c_n}{b_n}(x - a_n + b_n) & \text{si } \; a_n - b_n \leq x \leq a_n \\ -\frac{c_n}{b_n}(x - a_n - b_n) & \text{si } \; a_n \leq x \leq a_n + b_n \end{cases}.$$

1) Dessiner la représentation graphique de f_n. Montrer que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$, et telle que f_n^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $n \geq 1$, calculer en fonction de a_n, b_n et c_n :

$$N_\infty(f_n) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)|, \quad N_1(f_n) = \int_{\mathbb{R}} |f_n(t)|\, dt \quad \text{et} \quad N_2(f_n) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f_n(t)|^2\, dt}.$$

Indication : montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$, que l'on déterminera, tel quel $N_2(f) = \lambda c_n \sqrt{b_n}$.

3) Montrer que si l'on choisit $a_n = n^3$, $b_n = n^3$ et $c_n = \frac{1}{n}$, alors la suite (f_n) obtenue vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\infty(f_n) = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} N_1(f_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_2(f_n) \neq 0.$$

4) Montrer que si l'on choisit $a_n = 1$, $b_n = \frac{1}{n^3}$ et $c_n = n^2$, alors la suite (f_n) obtenue vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} N_1(f_n) = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} N_2(f_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_\infty(f_n) \neq 0.$$

5) Montrer que si l'on choisit $a_{2p} = 1$ et $a_{2p+1} = (2p+1)^3$, $b_{2p} = \frac{1}{p^3}$ et $b_{2p+1} = (2p+1)^3$, $c_{2p} = p$ et $c_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)^2}$, alors la suite (f_n) obtenue vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} N_2(f_n) = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} N_1(f_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_\infty(f_n) \neq 0.$$

Exercice 4

1) Rappeler sans démonstration l'énoncé du théorème de convergence dominée.

2) Pour tout $n \geq 1$, soit f_n l'application $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n \mathrm{e}^{-2x}$ pour $0 \leq x \leq n$, et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

– Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une application f que l'on déterminera.

– Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $|f_n(x)| \leq f(x)$.

– En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.

3) Pour tout $n \geq 1$, soit g_n l'application $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \frac{|\sin^n x|}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$.

– Montrer que la suite (g_n) converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers une application g que l'on déterminera.

– En déduire que la suite (g_n) ne converge pas uniformément sur $[1, +\infty[$.

– Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 4 décembre 2013

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 6

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

Dans chacun des trois exercices, les questions numérotées 1), 2), 3),... sont indépendantes les unes des autres.

EXERCICE 1 (*suites de fonctions*)

1) Soit $X = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in X$ on pose : $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur X vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur X.

c) Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $X_a = [a, +\infty[$, où $a > 0$.

2) Soit $X = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in X$ on pose : $f_n(x) = n(1-x)^n \sin(\frac{\pi x}{2})$.

a) Déterminer l'ensemble E des réels $x \in X$ tels que la suite de réels $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge.

b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement mais non uniformément sur l'intervalle $K = [0, 2]$. [*Indication :* on pourra considérer $f_n(\frac{1}{n})$].

3) Soit $X =]0, +\infty[$. On définit une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions $X \to X$ par récurrence en posant : $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\big)$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(x) = \frac{f_n(x)-\sqrt{x}}{f_n(x)+\sqrt{x}}$. Donner une relation de récurrence simple entre $g_{n+1}(x)$ et $g_n(x)$.

b) En déduire que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur X vers une fonction g que l'on déterminera.

c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur X vers une fonction f que l'on déterminera.

EXERCICE 2 (*séries de fonctions*)

1) Soit $X = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in X$ on pose : $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$. Justifier avec soin les affirmations suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur X.

b) $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur X. [*Indication :* on pourra calculer $\|f_n\|_\infty$].

c) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$, où $a>0$.

d) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$, où $a>0$.

e) $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur X.

2) On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n\sin(nx)$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $X = \,]-1,1[$. On appelle f la fonction somme de cette série, c'est-à-dire $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $X_a = [-a,a]$ pour tout $a\in\,]0,1[$.

c) Montrer que f est dérivable sur X et exprimer f' comme la somme d'une série de fonctions.

d) En déduire que, pour tout $x\in X$, on a $f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1}$.

[*Indication :* on pourra passer à une écriture complexe utilisant $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x$)).

e) En déduire que, pour tout $x\in X$, on a $f(x) = \mathrm{Arctan}\big(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\big)$.

Exercice 3 (*suites de fonctions, séries de fonctions, et intégrales*)

1) Pour tout réel $t\geq 0$ et tout entier $n\geq 1$, on note $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)$.

a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}_+$ mais que la suite $(|f_n|)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction g que l'on déterminera.

b) La suite $(|f_n|)$ converge-t-elle vers g uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$ est convergente pour tout $n\geq 1$, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

2) On définit sur $[0,1]$ les fonctions f, g, f_n pour tout entier $n\geq 0$ suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} x^{-x} & \text{si } 0<x\leq 1 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} -x\ln x & \text{si } 0<x\leq 1 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases},$$

$$f_0(x) = 1 \text{ pour tout } x\in[0,1], \qquad \text{pour } n\geq 1,\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n!}(-x\ln x)^n & \text{si } 0<x\leq 1 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

a) Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et que chaque f_n est continue sur $[0,1]$.

b) Montrer g admet sur $[0,1]$ un maximum que l'on calculera, et en déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ vers la fonction f.

c) En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$, $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

d) Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ et en déduire que $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

[*Indication pour le calcul de* $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ *:* on pourra faire les changements de variables $u = -\ln x$ puis $v = (n+1)u$, et utiliser sans la redémontrer l'égalité $\int_0^{+\infty} v^n\mathrm{e}^{-v}\,dv = n!$].

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 1er octobre 2014

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 2

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

EXERCICE 1

(les quatre questions sont indépendantes)

1) On pose $I = \mathbb{R}_+$ et l'on considère les suites (f_n) et (g_n) de fonctions $I \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad g_n(x) = f_n(x)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } x \in I.$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f que l'on déterminera. Montrer que la suite (g_n) converge simplement mais non uniformément sur I vers une fonction g que l'on déterminera.

2) On pose $I = [0, 1]$, on fixe un réel $a > 0$ et l'on considère la suite (f_n) de fonctions $I \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = nx^n(1 - x)^a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in I.$$

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f que l'on déterminera. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le paramètre a pour que (f_n) converge uniformément sur I.

b) Calculer : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n(1 - x)^{\frac{3}{2}}\, dx$.

3) On pose $I = \mathbb{R}_+$ et l'on considère la suite (f_n) de fonctions $I \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in I.$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f que l'on déterminera, que la convergence n'est pas uniforme sur I, mais qu'elle est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ fixé.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+n^2t^2}\, dt$ est convergente, et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$.

.../...

Exercice 2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_+$, *positive et non identiquement nulle sur* $\mathbb{R}_+$, telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions g_n et h_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_n(x) = f(nx) \quad \text{et} \quad h_n(x) = f(\tfrac{x}{n}) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction h que l'on déterminera. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction g que l'on déterminera. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

3) On fait de plus ici l'hypothèse que l'intégrale $I := \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, les intégrales $J_n := \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ et $K_n := \int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$ sont convergentes. Calculer $\lim_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim_{n\to+\infty} K_n$.

4) Donner un exemple explicite de fonction f satisfaisant les hypothèses de départ de l'exercice, avec $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ convergente. Donner un exemple explicite de fonction f satisfaisant les hypothèses de départ de l'exercice, avec $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ divergente.

Exercice 3

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers une limite $\ell \in I$. Soit (f_n) une suite de fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues sur I, convergeant simplement sur I vers une fonction f continue sur I.

1) On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur I. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = f(\ell)$. [*Indication :* montrer que $|f_n(u_n) - f(\ell)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(u_n) - f(\ell)|$ pour tout n].

2) Prenons $I = [0,1]$, $u_n = \frac{1}{2n}$ et $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2 - 2nx & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

Montrer que toutes les hypothèses du début de l'exercice sont vérifiées, mais que l'on a pas convergence uniforme de (f_n) sur I, et que $\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) \neq f(\ell)$

Exercice 4 *(révision sur les séries numériques)*

1) La série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ est-elle absolument convergente ? est-elle convergente ?

2) La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}$ pour tout $n \geq 1$ est-elle convergente ? est-elle absolument convergente ? [*Indication :* on pourra étudier $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}|u_n|$].

3) Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = (\frac{n+3}{2n+1})^{\ln n}$. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n^{\ln 2}}$ pour n tendant vers $+\infty$. en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 30 septembre 2015

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 2

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

Suites de fonctions

Exercice 1 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n(x) = \sin(nx^2)\mathrm{e}^{-nx^2}$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$, mais qu'elle est uniforme sur tout intervalle $[a,1]$ avec $a \in \,]0,1[$.

Exercice 2. – Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \text{ avec } f_n(x) = x^n(1-x)^n, \text{ et } K_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx \text{ avec } g_n(x) = n^2 x \mathrm{e}^{-nx}.$$

a) Etudier la convergence de la suite (f_n) ; [*Indication :* majorer $x(1-x)$]. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$. Etudier la convergence de la suite (g_n).

c) Comparer les deux situations et faire un commentaire pertinent.

Exercice 3. – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a \in \,]0,1[$?

Séries de fonctions

Exercice 4 – Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 – Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; (*indication :* on pourra l'étudier d'abord sur un intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $a > 0$).

Exercice 6 – Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$ est définie et continue sur $[0,1]$.

Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 S(x)\,dx$; (*indication :* on pourra remarquer que $\frac{2x}{n^2-x^2} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$).

.../...

Exercice 7 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n(x) = x^{2n}$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction S que l'on déterminera explicitement.

b) Montrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[0,a]$, avec $0 < a < 1$.

c) Montrer que la convergence n'est pas uniforme $[0,1[$.

Exercice 8 – On considère pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

a) Déterminer le plus grand intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur I. La convergence est-elle uniforme sur I.

b) Déterminer le plus grand intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur J. La convergence est-elle uniforme sur J.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

vendredi 9 octobre 2015

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

Complément au devoir surveillé n° 2

Durée : 40 minutes. *Sans documents, sans calculatrice.*

Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction $f_n : I \to \mathbb{R}$. Formuler de deux façons équivalentes ce que signifie que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.

Exercice 1.

On note $I = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge au moins simplement sur I vers une fonction S ; on précisera si la convergence est absolue, normale, uniforme, sur I.

b) Montrer que S est continue sur I.

c) Montrer que S est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 0$.

d) En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer la dérivée S' comme la somme d'une série de fonctions.

Exercice 2.

Soit $\sum_{n\geq 0} c_n$ une série de nombres complexes que l'on suppose absolument convergente. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}.$$

Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et calculer :

$$I = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

en fonction des paramètres c_n donnés au départ.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 12 décembre 2012

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 7

Durée : deux heures. *Sans documents.*

Exercice 1

On considère la série entière $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2) Montrer que l'application $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie, et que la convergence de la série entière est normale sur $[-1,1]$.

3) Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles lorsque $x \in \,]-1,1[$. [*Indication :* on pourra exprimer d'abord la dérivée de f].

4) Montrer que f est continue sur $[-1,1]$ et en déduire les valeurs de $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 2

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de sa série entière dérivée et en déduire que l'application $f : \,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie.

2) Montrer que, pour tout $x \neq 0$ dans $]-1,1[\, \to \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x\mathrm{e}^{2i\pi/3})^n\right)$.
[*Indication :* on rappelle que $\mathrm{e}^{it} = \cos t + i\sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$].

3) En déduire que, pour tout x dans $]-1,1[$, on a : $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{2(x^2+x+1)}$.

4) En déduire $f(x)$ pour tout x dans $]-1,1[$.

suite au verso...

Exercice 3

On considère l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ et l'application $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = [\ln(1+x)]^2$ pour tout $x \in I$.

1) Montrer que f est la solution sur I de l'équation différentielle $(1+x)y'(x) = 2\ln(1+x)$ vérifiant $y(0) = 0$.

2) Rechercher toutes les solutions sur I de cette équation différentielle qui sont développables en série entière (en zéro). [*Indication* : on exprimera le terme général de cette série entière en fonction de $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$; on utilisera aussi le développement en série entière de $\ln(1+x)$ (en zéro)].

3) En déduire que f est développable en série entière (en zéro). Expliciter la série entière correspondante et déterminer son rayon de convergence.

4) Retrouver les résultats du 3) en utilisant le carré du développement en série entière de $\ln(1+x)$.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer qu'elle converge normalement sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

3) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)|$. En déduire que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge si et seulement $\alpha < c$, où c est un entier fixé que l'on déterminera.

4) On suppose $\alpha \geq c$. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} f_n(\frac{1}{N})\right)_{N\geq 1}$ ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{R}$.

5) On note f l'application $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On introduit pour tout $N \geq 0$ les applications $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ et $R_N = f - S_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} f_n$. Déduire des questions 3) et 4) que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $\alpha < c$, et non uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $\alpha \geq c$.

6) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_+$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 18 décembre 2013

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 7

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

Exercice 1

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}x^n$. Sur l'intervalle $]-R, R[$, exprimer la fonction somme f de cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$. Sur l'intervalle $]-R, R[$, exprimer la fonction somme f de cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$. Montrer que, sur l'intervalle $]-R, R[$, la somme de cette série vaut $\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 2

1) Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$. Ecrire f comme somme de deux fractions rationnelles pour en déduire le développement de f en série entière sur I.

2) Soit f la fonction définie sur $J =]-2, 2[$ par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$. Ecrire f comme somme de fonctions en logarithme. En déduire le développement de f en série entière sur J.

3)Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x$. On cherche à déterminer le développement de f en série entière.

a) Justifier le fait que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) Avec la notation usuelle $e^{it} = \cos t + i \sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$f(x) = \frac{1}{4}(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire chacun des nombres complexes $(1+i)^n, (1-i)^n, (-1+i)^n, (-1-i)^n$ sous la forme ρe^{it} avec $\rho \in \mathbb{R}_+^\star$ et $t \in \mathbb{R}$.

d) Déduire des questions précédentes le développement de f en série entière.

.../...

Exercice 3

Déterminer une série entière de la variable réelle x dont la fonction somme f est solution de l'équation différentielle :

$$xf''(x) - f(x) = x^2 + x - 1, \text{ avec les conditions initiales } f(0) = f'(0) = 1.$$

Préciser le rayon de convergence de la série solution.

Exercice 4

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels définies par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} & = & -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} & = & 3a_n + 4b_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) En diagonalisant la matrice $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, déterminer l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

b) Déterminer le rayon de convergence des séries entières réelles $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$, et exprimer les fonctions sommes de ces deux séries à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5

On considère la série de fonctions d'une variable réelle : $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \mathrm{e}^{-nx} x^{2n}$.

a) Montrer que la fonction f définie par la somme de cette série est continue sur $[0, +\infty[$; on énoncera avec précision le théorème utilisé.

b) Montrer de façon comparable que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$; on énoncera avec précision le théorème utilisé.

c) Soit $x \in [0, +\infty[$. Donner une expression de $f'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles (on pourra introduire dans l'expression de $f'(x)$ comme série la série géométrique de raison $-x^2\mathrm{e}^{-x}$).

d) En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 15 octobre 2014

Licence Sciences-Langues, deuxième année
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 3

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

Exercice 1 (*séries de fonctions*)

1) On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Cette série converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$? normalement sur $\mathbb{R}_+$?

b) Mêmes questions sur $[0, 1]$.

c) Mêmes questions sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$ fixé.

2) On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ avec $g_n(x) = \frac{x^2}{x^3+4n^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$

b) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|g_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |g_n(x)|$.

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 2 (*séries de fonctions*)

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On appelle f la fonction définie somme de cette série, c'est-à-dire la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}$? est-elle absolue sur $\mathbb{R}$? est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer f' comme la somme d'une série de fonctions.

4) Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right) dx = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

Exercice 3 (*autour du cours sur les séries entières*)

Fixons une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit R son rayon de convergence.

1) Expliquer (sans rappeler la démonstration) ce qui signifie, en termes de convergence de la série, que R est son rayon de convergence.

2) Rappeler la démonstration du fait que la série converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ strictement inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$.

3) Rappeler la démonstration du fait que la fonction $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ définie par la somme de la série est continue sur $D(0, R)$.

Exercice 4 (*séries entières*)

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ dans chacun des cas suivants.

a) $a_n = \frac{5n^2+2n-3}{2n^3+3n+1}$, **b)** $a_n = \frac{n^3+1}{2^n}$, **c)** $a_n = (\ln n)^n$, **d)** $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$.

2) Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1}$? Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$? En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1} z^n$.

3) Soient p et q deux réels positifs. Déterminer suivant les valeurs de p et q le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $a_n = \frac{p^n}{1+q^n}$.

4) On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$. Calculer son rayon de convergence R. En utilisant le fait que $n^2 = n(n-1) + n$, décomposer cette série entière en une somme de deux séries entières, exprimer la somme de chacune d'elles à l'aide de fonctions usuelles et en déduire une expression de $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$ comme une fraction rationnelle en z pour tout $z \in D(0, R)$.

Université Blaise Pascal,
UFR Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

mercredi 14 octobre 2015

LICENCE SCIENCES-LANGUES, DEUXIÈME ANNÉE
Mathématiques premier semestre

Devoir surveillé n° 3

Durée : deux heures. *Sans documents, sans calculatrice.*

EXERCICE 1

1) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, dont on sait qu'elle diverge en $z_1 = 3+4i$ et qu'elle converge en $z_2 = 5i$. Déterminer son rayon de convergence R.

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$.

4) On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$. Quelle est sa nature (convergente ou divergente) quand $|z| < 1$? quand $|z| > 1$? quand $z = 1$? quand $z = -1$?

EXERCICE 2

1) On note g l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ecrire son développement en série entière sur $]-\infty, +\infty[$.

2) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} x^{2n+1}$ est égale $+\infty$.

On note h l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la somme de cette série entière.

3) Soit (E) l'équation différentielle : $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$.

a) Montrer que g et h sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Soit f une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on suppose développable en série entière sur $]-\infty, +\infty[$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $f = \alpha g + \beta h$.

EXERCICE 3

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ où les a_n sont définis par :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad \text{et} \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

On note R son rayon de convergence.

1) Montrer $|a_n| \leq 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $R \geq \frac{1}{4}$.

2) On note f la fonction définie comme la somme de cette série entière (pour z tel que $|z| < R$). Montrer que f vérifie : $f(z) = 1 + 3zf(z) - 2z^2 f(z)$.

3) En déduire que $f(z) = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$. En déduire la valeur des a_n et la valeur de R.

.../...

Exercice 4

On considère la série entière réelle $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}x^n$.

1) Montrer que son rayon de convergence est 1.

2) Montrer que, en tant que série de fonctions, elle converge normalement sur $[-1,+1]$. Montrer que la fonction $f : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ définie comme la somme de cette série est continue sur $[-1,+1]$.

3) En utilisant les développements en série entière de fonctions usuelles, vérifier que, pour tout x non-nul dans $]-1,1[$, on a :

$$f(x) = 1 - \tfrac{x-1}{x} \ln(1-x).$$

4) Déduire des deux questions précédentes la valeur des sommes des deux séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$