Université Blaise Pascal
U.F.R. Sciences et Technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Exercices de Révision en Algèbre et en Géométrie

Master Enseignement des Mathématiques, Deuxième année

2011-2012

François Dumas

série d'exercices n° 1 : arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1. *(Principes de codage basés sur des propriétés arithmétiques élémentaires).*
On note: $\mathcal{A} = \{A, B, C, \ldots, Y, Z\}$ l'alphabet, $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \ldots, 24, 25\}$ l'ensemble des 26 premiers entiers naturels, et g la bijection naturelle de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{E}$ consistant à numéroter les lettres:

$$g(A) = 0,\ g(B) = 1,\ g(C) = 2,\ \ldots,\ g(Z) = 25.$$

1) Pour tout entier x de $\mathcal{E}$, on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de $35x$ par 26.

a. Montrer que l'on définit ainsi une bijection f de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

b. On convient de coder un mot quelconque de la façon suivante: on remplace chaque lettre α du mot par la lettre β dont le numéro $g(\beta)$ est $y = f(x)$, où $x = g(\alpha)$ est le numéro de α. Comment se code le mot OUI ? Montrer que ce principe de codage est sans ambiguïté (deux mots sont distincts si et seulement leurs codages respectifs sont distincts). Quel est le mot dont le codage est NWN ?

c. On veut généraliser en remplaçant $35x$ par $ax + b$ avec a, b entiers naturels avec $a \neq 0$. Quelles hypothèses est-il nécessaire et suffisant de faire sur a et b pour que la même méthode s'applique ?

2) Pour tout couple d'entiers (x, y) de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, on note $f(x, y)$ l'unique entier de $\mathcal{E}$ et $h(x, y)$ l'unique entier de $\mathcal{E}$ tels que:

$$f(x, y) \equiv 5x + 17y \bmod 26 \qquad \text{et} \qquad h(x, y) \equiv 4x + 15y \bmod 26$$

a. Justifier avec soin l'existence et l'unicité de $f(x, y)$ et $h(x, y)$, puis montrer que l'application $f \times h$ est une bijection de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$.

b. On convient de coder tout mot d'un nombre *pair* de lettres de la façon suivante: en partant de la gauche vers la droite, on remplace chaque couple de lettres successives (α, β) par le couple de lettres (γ, δ) dont les numéros $s = g(\gamma)$ et $t = g(\delta)$ sont donnés par:

$$s = f(x, y) \ \text{ et } \ t = h(x, y), \quad \text{où } x = g(\alpha) \text{ et } y = g(\beta) \text{ sont les numéros de } \alpha \text{ et } \beta$$

Comment se code le mot ENFANT ? Le codage d'une lettre dépend-il de la place de cette lettre dans le mot ? Démontrer que ce principe de codage est sans ambiguïté (deux mots sont distincts si et seulement leurs codages respectifs sont distincts). Quel est le mot dont le codage est UMSB ? Montrer que tout mot d'un nombre pair de lettres est le codage d'un et d'un seul mot.

c. On veut généraliser à un système de congruences quelconque:

$$ax + by \equiv s \bmod m \qquad \text{et} \qquad cx + dy \equiv t \bmod m,$$

avec a, b, c, d, s, t entiers quelconques et m entier naturel non-nul. Donner une hypothèse portant sur le pgcd de $ad - bc$ et m qui suffit à assurer l'existence, quels que soient s et t, d'une solution (x, y) à ce système ? Cette solution est-elle unique ?

Exercice 2. *(Ecriture décimale et congruences).*

1) *(Théorème de Pascal).* Soit m un entier naturel non-nul. Soit (r_i) la suite d'entiers définie par: $r_0 = 1$ et $r_{i+1} =$ le reste de la division euclidienne de $10r_i$ par m ; (avec donc $0 \leq r_i \leq m - 1$).
Montrer que, pour tout entier naturel $a = \overline{a_n \ldots a_0}$ en numération décimale, on a: $a \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i r_i\ [m]$.
En déduire des critères simples permettant de reconnaître sur les chiffres de l'écriture décimale d'un entier s'il est ou non divisible par 3, par 9, par 10, par 11.

2) *(Preuve par neuf).* Montrer que tout entier naturel est congru modulo 9 à la somme des chiffres de son écriture décimale. En déduire que, quels que soient $x = \overline{a_n \ldots a_0}$, $y = \overline{b_m \ldots b_0}$, $z = \overline{c_p \ldots c_0}$ trois entiers naturels, si $xy = z$, alors $(\sum_{i=0}^{n} a_i)(\sum_{i=0}^{m} b_i) \equiv (\sum_{i=0}^{p} c_i)\ [9]$.

Exercice 3. *(Autour de l'irrationalité de $\sqrt{2}$)*

1) Donner une preuve du fait que le réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (en précisant avec soin les résultats arithmétiques utilisées).

2) *Une preuve de l'irrationalié de $\sqrt{2}$ basée sur l'algorithme d'Euclide.* On suppose qu'il existe deux entiers strictement positifs a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

a. Montrer que $a = b + \frac{b}{c}$, où l'on a posé $c = \sqrt{2} + 1$. Vérifier que $c = 2 + \frac{1}{c}$ et $2 < c < 3$.

b. Montrer que $\frac{b}{c}$ est un entier, et qu'il est égal au reste r_1 de la division euclidienne de a par b. Quel est le quotient q_1 dans cette division ?

c. Montrer que, dans la division euclidienne de b par r_1, le quotient est $q_2 = 2$ et le reste $r_2 = \frac{r_1}{c}$.

d. Soit n un entier au moins égal à 2. Montrer que l'algorithme d'Euclide appliqué à (a, b) comporte au moins n étapes, que le n-ième quotient est $q_n = 2$, et que le n-ième reste $r_n = \frac{r_{n-1}}{c}$.

e. Aboutir à une contradiction.

3) *Une suite de rationnels approchant $\sqrt{2}$.*

a. Montrer que la suite d'entiers naturels (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ est strictement croissante. Pour tout $n \geq 1$: calculer $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$, en déduire que u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux, et vérifier que la fraction $\frac{u_n}{u_{n+1}-u_n}$ est irréductible.

b. On considère la suite de nombres rationnels (x_n) définie par $x_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Calculer x_n pour tout $1 \leq n \leq 9$. Montrer que la suite (x_n) converge vers $\sqrt{2}$.

3) *Un développement de $\sqrt{2}$ en fractions continues.*

a. Appliquer l'algorithme d'Euclide au couple $(577, 408)$.
En déduire: $x_8 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$

b. Déterminer, pour tout $n \geq 1$, le quotient et le reste dans la division euclidienne de u_{n+1} par u_n. En déduire, une écriture de x_n comparable à l'écriture ci-contre de x_8.

Conclure que $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$

Exercice 4. *(Propriété de Bézout et équations diophantiennes).*

1) Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$, on considère l'ensemble E des points à coordonnées entières. On fixe trois entiers α, β, γ tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On appelle D la droite de E d'équation $\alpha x + \beta y = \gamma$ relativement à $\mathcal{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que D contienne des points de E. Déterminer alors l'ensemble $D \cap E$.

2) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des entiers non-nuls. Pour $1 \leq i \leq n$, on note d_i le pgcd de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Soit $\gamma \in \mathbb{Z}$. Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^n$ de l'équation $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \gamma$. Montrer que S est non-vide si et seulement si d_n divise γ. Montrer qu'alors un n-uplet d'entiers $(x_1, \ldots, x_n)$ appartient à S si et seulement le $(n+1)$-uplet $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_n)$ est solution du système:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - d_{n-1} y & = & 0 \\ d_{n-1} y + \alpha_n x_n & = & \gamma \end{cases}$$

En déduire une méthode de résolution dans $\mathbb{Z}^n$ de l'équation de départ.
Application: résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $10x + 15y + 6z = 73$.

Exercice 5. *(Systèmes de congruence et théorème chinois)*

1) Soient a et b deux entiers naturels non-nuls. Montrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors le système de congruences :

$$(\Sigma)\ \begin{cases} x \equiv \alpha \mod a \\ x \equiv \beta \mod b \end{cases}$$

admet des solutions dans $\mathbb{Z}$ quels que soient les entiers α et β fixés. Déterminer alors explicitement l'ensemble des solutions de (Σ) dans $\mathbb{Z}$.

2) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers naturels non-nuls deux à deux premiers entre eux. On fixe des entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ quelconques et l'on considère le système (Σ) de n congruences à une inconnue:

$$(\Sigma): \quad x \equiv \alpha_1 \mod a_1, \quad x \equiv \alpha_2 \mod a_2, \quad \ldots, \quad x \equiv \alpha_n \mod a_n.$$

On pose $b = a_1 a_2 \ldots a_n$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on considère le produit $b_i = a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n$ et le système de congruences :

$$(\Sigma_i)\ \begin{cases} x \equiv 1 \mod a_i \\ x \equiv 0 \mod b_i \end{cases}$$

Montrer que (Σ) a des solutions dans $\mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n$, (Σ_i) a des solutions dans $\mathbb{Z}$. Montrer l'ensemble des solutions de (Σ) dans $\mathbb{Z}$ est:

$$S = \{\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n + b\lambda\ ;\ \lambda \in \mathbb{Z}\ \}$$

où y_i désigne pour tout $1 \leq i \leq n$ une solution de (Σ_i).

Application: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système: $x \equiv 1 \mod 4, \quad x \equiv 2 \mod 3, \quad x \equiv 4 \mod 5.$

Exercice 6. *(Fonctions arithmétiques multiplicatives)*

On appelle fonction arithmétique multiplicative toute application $f : A \to \mathbb{Z}$ où A est une partie de $\mathbb{N}$, telle que $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout couple d'éléments de A premiers entre eux.

Montrer qu'une telle fonction multiplicative est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les entiers de la forme p^α pour p un nombre premier et α un entier positif.

Montrer que, si $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ est multiplicative, alors $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ définie par $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ pour tout entier $n \geq 1$ est aussi multiplicative.

1) *Nombre de diviseurs et somme des puissances k-ièmes des diviseurs d'un entier naturel non-nul.* Pour tous $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_k(n)$ la somme des puissances k-ièmes des diviseurs positifs de n. En particulier, on note $d(n) = \sigma_0(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Montrer que, si $n \geq 2$ et si l'on note $n = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers, on a:

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{k(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}, \text{ et en particulier } d(n) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1).$$

Montrer que $\sigma_k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est multiplicative.

2) *Indicatrice d'Euler.* Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n. En posant de plus $\varphi(1) = 1$, on définit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$. Montrer que φ est multiplicative (on pourra utiliser le théorème chinois et la caractérisation des éléments inversibles des anneaux $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$).

Montrer que $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha(1 - \frac{1}{p})$ pour tout nombre premier p et tout entier $\alpha \geq 1$. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{p_i}), \text{ où } p_1, p_2, \ldots, p_s \text{ sont les diviseurs premiers distincts de } n.$$

Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 1$, l'identité d'Euler: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

3) *Fonction de Möbius.* On pose: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un entier ≥ 2, $\mu(n) = (-1)^k$ si n est le produit de k nombre premiers distincts. Vérifier que l'on définit ainsi une application $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$, et qu'elle est multiplicative. Montrer que $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 7. *(Groupe des unités de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)*

Pour tout entier $n \geq 2$, on note G_n le groupe multiplicatif $U(\mathbb{Z}/nZ)$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donner pour un entier a quelconque une condition arithmétique nécessaire et suffisante pour que $\overline{a}$ appartienne à G_n. Quel est l'ordre de G_n ?

1) Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que, pour tout entier a premier avec n, on a (propriété d'Euler):

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

(*Indication :* on pourra considérer la bijection $t : \overline{x} \mapsto \overline{ax}$ de G_n sur G_n). Que devient la propriété ci-dessus lorsque n est premier ?

2) Montrer que les deux groupes G_{10} et G_{12} sont d'ordre 4, mais que l'un est cyclique alors que l'autre est isomorphe au groupe de Klein.

Montrer que, pour tout nombre premier p, le groupe G_p est cyclique d'ordre $p - 1$.

Indication. Pour tout diviseur d de $p - 1$, notons Γ_d l'ensemble des éléments de G_p d'ordre d et E_d l'ensemble des éléments $\overline{x}$ de G_p tels que $\overline{x}^d = \overline{1}$. Montrer que E_d est un sous-groupe de G_p d'ordre $\leq d$ et contenant Γ_d. Vérifier que, si l'on suppose $\Gamma_d \neq \emptyset$, alors E_d est engendré par $\overline{x}$ pour tout $\overline{x} \in \Gamma_d$, et Γ_d est de cardinal $\varphi(d)$. En utilisant le théorème de Lagrange et l'identité d'Euler (exercice 6), en déduire que $\Gamma_d \neq \emptyset$ pour tout diviseur d de $p - 1$. Conclure.

Exercice 8. *(Nombres parfaits, nombres de Mersenne, d'Euclide, de Fermat, de Carmichael)*

1) Soit n un entier ≥ 2. Montrer que, pour tout entier $a \geq 3$, l'entier $a^n - 1$ n'est pas premier. Montrer que, si n n'est pas premier, alors $2^n - 1$ n'est pas premier. Le seul cas qui reste est donc celui où $a = 2$ et n est premier, ce qui correspond aux nombres de Mersenne.

On appelle nombre de Mersenne tout entier naturel de la forme $M_p = 2^p - 1$ où p est un nombre premier. Montrer que M_2, M_3, M_5, M_7 sont premiers. Montrer que M_{11} est divisible par 23.

2) On appelle nombre parfait tout entier naturel qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs strictement inférieurs à lui-même (i.e. $\sigma_1(n) = 2n$ avec les notations de l'exercice 1). Déterminer tous les nombres parfaits inférieurs à 30 ; vérifier que 496 et 8128 sont parfaits.

La question de l'existence de nombres parfaits impairs reste ouverte; les nombres parfaits pairs font l'objet de la question suivante.

3) On appelle nombre d'Euclide un entier de la forme $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}M_p$ où p est un nombre premier tel que M_p est premier. Calculer E_2, E_3, E_5, E_7. Quel est le suivant ?
Montrer que les nombres d'Euclide sont les nombres parfaits pairs.

Indication pour le sens réciproque. Considérons un nombre parfait pair, écrit sous la forme $n = 2^a \times b$ avec $a \geq 1$ et b impair. Montrer que $\sigma_1(n) = \sigma_1(b) \times (2^{a+1} - 1)$. En utilisant $\sigma_1(n) = 2n$, en déduire qu'il existe $c \geq 1$ tel que $b = (2^{a+1} - 1)c$ et $\sigma_1(b) = 2^{a+1}c$. Prouver que $c = 1$ et $2^{a+1} - 1$ est premier.

4) Rappeler l'énoncé et une preuve du petit théorème de Fermat.
On appelle nombre pseudo-premier ou nombre de Carmichael un entier $p \geq 2$ qui n'est pas premier mais vérifie $n^p \equiv n \mod p$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que 561 est un nombre de Carmichael.

Indication. Fixons $n \in \mathbb{Z}$ quelconque et posons $N = n(n^{560} - 1) = n((n^2)^{280} - 1)$. Vérifier qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $N = n(n^2 - 1)k_1$. En justifiant que 3 divise $n^3 - n$, conclure que 3 divise N. Etablir de de même que 11 et 17 divisent N et conclure.

5) On appelle nombre de Fermat tout entier naturel de la forme $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont premiers. Montrer que F_5 est divisible par 641.

Indication. On pourra soit effectuer un calcul direct, soit utiliser des congruences en remarquant que $5^4 \equiv -2^4 \mod 641$ et $5 \times 2^7 \equiv -1 \mod 641$.

Montrer que, si n et m sont deux entiers naturels distincts, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.

série d'exercices n° 2 : polynômes

Exercice 1. *(Zéros et degré)*

1) Soient K un corps et P un polynôme dans $K[X]$ de degré $d \geq 1$. Montrer qu'un élément a de K est un zéro de P si et seulement si $X - a$ divise P dans $K[X]$. En déduire que P admet au plus d zéros dans K (*indication:* on pourra utiliser la division euclidienne et raisonner par récurrence).

2) Soit A l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Déterminer les zéros dans A du polynôme $X^2 - X$. Donner deux factorisations distinctes de $X^2 - X$ en produit de deux polynômes de degré 1 dans $A[X]$. Que peut-on en déduire ?

3) Soit K un corps ; on note $\Phi : K[X] \to \mathcal{F}(K, K)$ le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres qui, à tout polynôme, associe sa fonction polynomiale associée. Déduire de 1) que, si K est infini, alors Φ est injective. Montrer, en considérant dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ un polynôme non-nul dont la fonction polynomiale associée est nulle, que le résultat n'est plus nécessairement vrai si K est un corps fini. Que retenir ?

Exercice 2. *(Zéros et polynôme dérivé)*

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que tout zéro de P' est aussi un zéro de P.

Exercice 3. *(Polynômes à coefficients entiers)*

Soient a, b, c trois entiers, avec $c \neq 0$. On considère dans $\mathbb{Z}[X]$ le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$. Montrer que, si P est factorisable dans $\mathbb{Q}[X]$, alors ses facteurs sont dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 4. *(Polynômes à coefficients entiers)*

Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1) Montrer qu'il existe un entier naturel a tel que $P(a) \neq 0$. Vérifier que, pour tous entiers $i \geq 1$, $c \geq 0$, $d \geq 1$, l'entier $(c + d)^i - c^i$ est divisible par d. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'entier $A(k) = P(a + k|P(a)|)$ est divisible par $|P(a)|$.

2) On suppose de plus que, pour tout $b \in \mathbb{N}$, l'entier naturel $|P(b)|$ est un nombre premier. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'entier $a + k|P(a)|$ est un zéro du polynôme Q défini par: $Q(X) = (P(X) - P(a))(P(X) + P(a))$.

3) Conclure que les seuls polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ prenant pour valeurs sur $\mathbb{N}$ des nombres premiers sont les polynômes constants égaux à des nombres premiers. Calculer $P(a)$ pour $P = X^2 - 79X + 1601$ pour les valeurs entières de a comprises entre 0 et 79.

Exercice 5. *(Polynômes réels à valeurs rationnelles)*

1) On considère dans $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$ les polynômes: $P_0 = 1$ et $P_n(X) = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\cdots(X+n)$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que $P_n(t) \in \mathbb{Z}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

2) Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul; soit n son degré. Montrer qu'il existe des réels uniques $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ tels que $A = \sum_{i=0}^{n} P_i$ (*indication:* considérer les valeurs prises par A en $-1, -2, \ldots, -n-1$). En déduire que, si $A(t) \in \mathbb{Q}$ pour tout $t \in \mathbb{Q}$, alors $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

3) Conclure qu'un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ appartient à $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement si $A(t) \in \mathbb{Q}$ pour tout $t \in \mathbb{Q}$.

Exercice 6. *(PGCD et polynôme dérivé)*

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4$. Calculer le PGCD de P et de son polynôme dérivé P'. En déduire la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 7. *(Applications de la propriété de Bézout)*

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 1.

1) Montrer que, si P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, alors les zéros de P dans $\mathbb{C}$ sont tous simples.

2) Soit z un zéro de P dans $\mathbb{C}$, de multiplicité d ; montrer que, si $d > \frac{1}{2} \deg P$, alors $z \in \mathbb{K}$.

Exercice 8. *(Application de l'algorithme d'Euclide)*

Soient n, m deux entiers ≥ 1. Montrer que, si n divise m dans $\mathbb{Z}$, alors $X^n - 1$ divise $X^m - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. Plus généralement, montrer que si r est le reste de la division euclidienne de m par n, alors $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$. En déduire que:

$$\mathrm{PGCD}(X^m - 1,\, X^n - 1) = X^{\mathrm{PGCD}(n,m)} - 1.$$

Exercice 9. *(Polynômes réciproques)*

On dit qu'un polynôme non-nul $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ est réciproque lorsque $a_k = a_{n-k}$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

1) Montrer que P de degré n est réciproque si et seulement si $P(X) = X^n P(\frac{1}{X})$. Montrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque. Montrer que si P et Q sont réciproques et si P divise Q dans $\mathbb{C}[X]$, alors $\frac{Q}{P}$ est réciproque.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ réciproque de degré n. Montrer que:

(i) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est un zéro de P, alors $\alpha \neq 0$ et α^{-1} est un zéro de P.

(ii) Si 1 est un zéro de P, alors c'est un zéro au moins double.

(iii) Si P est degré impair, alors -1 est un zéro de P.

(iv) S P est de degré pair et -1 est un zéro de P, alors c'est un zéro au moins double.

(*Indication:* on pourra pour les assertions (ii) et (iv) déduire de la relation $P(X) = X^n P(\frac{1}{X})$ une relation concernant P').

3) En déduire que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ réciproque de degré pair $2n$ et de coefficient dominant $a_{2n} \in \mathbb{C}^*$ se décompose sous la forme $P = a_{2n}(X^2 + b_1 X + 1) \ldots (X^2 + b_n X + 1)$ avec $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. (Attention, ce n'est pas une décomposition en facteurs irréductibles). Que peut-on dire lorsque P est de degré impair ?

4) Exemple d'application: décomposer $P = 2X^5 - 4X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 4X + 2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10. *(Décomposition en produit de facteurs irréductibles)*

On considère le polynôme $B = X^6 + 1$. Dans $\mathbb{C}$, on note $\alpha = ij$ et $\beta = ij^2$.

1) Décomposer B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$.

2) Soit $\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(P) = P(\alpha)$ pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux unitaires. Montrer que le noyau I de φ est égal à l'idéal principal $A\mathbb{Q}[X]$ où A est le polynôme unitaire de plus bas degré de $\mathbb{Q}[X]$ admettant α pour zéro. Montrer que A divise B dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire la valeur explicite de A et qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

3) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ est premier avec A dans $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement si $P(\alpha) \neq 0$.

4) On pose $K = \operatorname{Im} \varphi$. Montrer que $K = \{\, a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 \,;\, a, b, c, d \in \mathbb{Q} \,\}$.
(*Indication:* on pourra utiliser la division euclidienne par A dans $\mathbb{Q}[X]$).

Montrer que K est un corps.
(*Indication:* pour tout $z = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 \in K$, considérer $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{Q}[X]$ et montrer que à l'aide de la question précédente et de la propriété de Bezout que, si $z \neq 0$, alors il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{Q}[X]$ de degré ≤ 3 tel que $P(\alpha)R(\alpha) = 1$).

5) Décomposer B en produit de facteurs irréductibles dans $K[X]$.

Exercice 11. *(Fonctions symétriques des racines)*

1) Déterminer les zéros complexes du polynôme $P = X^4 - 12X - 5$ sachant qu'il possède deux zéros dont la somme est 2.

2) Montrer que le polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ admet deux zéros opposés dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $a^2d + c^2 - abc = 0$.

3) Soient p et q deux réels, et $P = X^3 + pX + q$ dans $\mathbb{R}[X]$. On considère les 2 conditions suivantes:
(1) P admet un zéro réel d'ordre strictement supérieur à 1,
(2) P admet un zéro complexe non réel.
Dans chacun de ces deux cas,indiquer les conditions que doivent vérifier p et q et calculer les zéros complexes de P.

Exercice 12. *(Polynômes d'interpolation de Lagrange)*

Soit K un corps. Soit n un entier ≥ 1. On fixe des éléments deux à deux distincts $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans K. On fixe des éléments quelconques $b_1, b_2, \dots, b_n$ dans K^n. On appelle polynôme d'interpolation de Lagrange associé à a et b le polynôme $\Lambda \in K[X]$ de degré $n-1$ défini par:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{1}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)} \prod_{j \neq i}(X - a_j)$$

Montrer que Λ est l'unique élément de $K_{n-1}[X]$ vérifiant $\Lambda(a_i) = b_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Montrer que l'ensemble des polynômes $F \in K[X]$ vérifiant $F(a_i) = b_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ est égal à $\{\Lambda + GP\,;\, G \in K[X]\}$, où l'on a posé $P = (X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_n)$.

Exercice 13. *(Une preuve du théorème de Wilson)*

Montrer qu'un entier $p \geq 2$ est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

Indication: pour montrer le sens direct, considèrer $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donner les zéros dans K du polynôme $P = X^{p-1} - \overline{1}$ de $K[X]$ (on pourra utiliser le petit théorème de Fermat), et en déduire le résultat.

Exercice 14. *(Réduction modulo p)*

1) Pour tout nombre premier p, on considère l'application de réduction modulo p :

$$f_p : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X], \quad \text{définie par} \quad f_p(\sum a_i X^i) = \sum \overline{a_i} X^i.$$

Montrer que c'est un morphisme d'anneaux unitaires surjectif, que l'ensemble $I = p\mathbb{Z}[X]$ formé des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ dont les coefficients sont tous des multiples de p est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$, et que $\mathbb{Z}[X]/I$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

2) Soit F un polynôme unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que s'il existe un nombre premier p tel que le polynôme $f_p(F)$ soit irréductible dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, alors F est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Vérifier ainsi, en considérant une réduction modulo 2, que le polynôme $F = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 6X + 5$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 15. *(Critère d'Eisentein et polynômes cyclotomiques)*

1) Soit p un nombre premier et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que, si p divise $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ et p^2 ne divise pas a_0, alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

2) En déduire que, sous les mêmes hypothèses qu'en 1), P est aussi irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on note U_n le groupe des racines n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$, et Γ_n le sous-ensemble des racines primitives. On appelle n-ième polynôme cyclotomique le polynôme

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \Gamma_n} (X - \zeta).$$

Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$. En déduire que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$. Quel est le degré de Φ_n ?

4) Soit p un nombre premier. Montrer que $\Phi_p(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1}$. Montrer que $\Phi_p(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$ (*indication:* appliquer le critère d'Eisenstein au polynôme $P(X) = \Phi_p(X+1)$).

Exercice 16. *(Résidus quadratiques)*

On fixe un nombre premier $p \geq 3$. On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{F}_p^*$ définie par $\varphi(u) = u^2$ pour tout $u \in \mathbb{F}_p^*$.

1) Montrer que φ est un morphisme de groupe. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

2) On note $\Gamma_2 = \operatorname{Im}\varphi$ (les entiers n tels que $\overline{n} \in \Gamma_2$ s'appellent les résidus quadratiques modulo p). Déterminer le nombre d'éléments de Γ_2. Montrer que Γ_2 est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$ (on rappelle que $z^{p-1} = \overline{1}$ pour tout $z \in \mathbb{F}_p^*$). En déduire que:

$$X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1} = \prod_{z \in \Gamma_2} (X - z) \quad \text{et} \quad X^{\frac{p-1}{2}} + \overline{1} = \prod_{z \in \mathbb{F}_p^* \setminus \Gamma_2} (X - z).$$

3) Montrer qu'un polynôme $aX^2 + bX + c$ de degré 2 dans $\mathbb{F}_p[X]$ (avec $a, b, c \in \mathbb{F}_p, a \neq 0$) admet un zéro dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $b^2 - 4ac \in \Gamma_2$.

Exercice 17. *(Fractions rationnelles)*

1) Soit p un nombre premier ; on note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On considère :

$$P = \prod_{n=0}^{p-1} (X - \overline{n}) \in \mathbb{F}_p[X], \quad \text{et} \quad R = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\overline{1}}{(X - \overline{n})^p} \in \mathbb{F}_p(X).$$

Montrer que $P(X) = X^p - X$, et $R(X) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\overline{1}}{X^p - \overline{n}}$.

Décomposer la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ en éléments simples dans $\mathbb{F}_p(X)$. Conclure que $R = \dfrac{\overline{1}}{X^p - X^{p^2}}$.

2) On prend $p = 23$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{F}_{23}(X)$ la fraction rationnelle :

$$S = \frac{\overline{3}X^3 + \overline{5}}{(X^2 + X - \overline{2})(X^2 + \overline{7}X + \overline{1})}.$$

Indication: on pourra utiliser la dernière question de l'exercice sur les résidus quadratiques.

série d'exercices n° 3 : réduction des endomorphismes

Première partie: exercices de révision élémentaires, diagonalisation

Exercice 1. *(Valeurs propres, vecteurs propres)*

On désigne par $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

a) Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admet-il nécessairement des valeurs propres ?

b) Montrer que, si λ est une valeur propre d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors λ^n est valeur propre de l'endomorphisme f^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; que peut-on dire des sous-espaces propres correspondants ?

c) Deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique (rappeler la preuve) ; a-t-on la réciproque ?

d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la somme des valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ (chacune répétée autant de fois que sa multiplicité) est égale à la trace de A.

e) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P son polynôme caractéristique. Quelle relation a-t-on entre P et le polynôme caractéristique R de la transposée ${}^tA$. On suppose de plus que $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, et l'on note Q est le polynôme caractéristique de A^{-1} ; quelle relation a-t-on pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$ entre $Q(\lambda)$ et $P(\lambda^{-1})$?

Exercice 2. *(Matrices diagonalisables)*

a) Pour quelles valeurs des paramètres réels les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ m-6 & m-7 & -m+12 \\ m-3 & m-3 & -m+5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

b) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ définie par: $a_{i,j} = b$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = a$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 3. *(Exemples d'applications de la diagonalisation)*

a) On considère deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\ge 0}$ et $(v_n)_{n\ge 0}$ telles que: $u_{n+1} = -10u_n - 28v_n$ et $v_{n+1} = 6u_n + 16v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En diagonalisant une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ adaptée, calculer les termes généraux u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.

b) Soit (E) la courbe du plan d'équation: $x^2 - xy + y^2 - \frac{1}{2} = 0$, par rapport à un repère orthonormé. En diagonalisant la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que (E) est une ellipse centrée en l'origine.

c) Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le calcul des réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, et calculer A^{-1}.

Exercice 4. *(Application aux systèmes différentiels linéaires)*

Déterminer les fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions des systèmes différentiels:

$$(S_1) \begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 5y(t) \\ z'(t) = x(t) + 2y(t) + 3z(t) \end{cases}, \qquad (S_2) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) - 6z(t) \\ y'(t) = -6x(t) - 7y(t) + 12z(t) \\ z'(t) = -3x(t) - 3y(t) + 5z(t) \end{cases},$$

$$(S_3) \begin{cases} x'(t) = 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}, \qquad (S_4) \begin{cases} x'(t) = -y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ 5z'(t) = -6x(t) + 8y(t) \end{cases}.$$

Exercice 5. *(Une autre application de la diagonalisation)*

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice:

$$A_\alpha = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6\alpha+1 & 2\alpha-1 & -\sqrt{2}(2\alpha-1) \\ 2\alpha-1 & 6\alpha+1 & \sqrt{2}(2\alpha-1) \\ -\sqrt{2}(2\alpha-1) & \sqrt{2}(2\alpha-1) & 4\alpha+2 \end{pmatrix}.$$

On note ϕ_α l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est A_α.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A_0. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice de ϕ_α dans la base $\mathcal{B}'$ est une matrice diagonale D_α.

b) En déduire, par un calcul simple, que $A_\alpha A_\beta = A_{2\alpha\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et que $A_{1/2} = I_3$. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ? Que peut-on en déduire pour l'ensemble $G = \{A_\alpha \,;\, \alpha \in \mathbb{R}^*\}$?

Seconde partie: polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal

• Rappelons que si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E et si P est un polynôme dans $K|X]$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par:

$$\begin{array}{l} \text{si} \;\; P(X) = \alpha_m X^m + \alpha_{m-1} X^{m-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in K[X], \\ \text{alors} \;\; P(X) = \alpha_m u^m + \alpha_{m-1} u^{m-1} + \cdots + \alpha_1 u + \alpha_0 \,\mathrm{id}_E \in \operatorname{End} E, \end{array}$$

où $u^\ell = u \circ u \circ \cdots \circ u$ est le produit de composition de u par lui-même ℓ fois pour tout entier $\ell \geq 1$. En particulier, pour tous $P, Q \in K[X]$ et tout $u \in \operatorname{End} E$, on a :

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u).$$

• Rappelons aussi qu'un polynôme non-nul $P \in K[X]$ est dit scindé dans $K[X]$ lorsqu'il se décompose en un produit de polynômes de degré 1 dans $K[X]$; un polynôme scindé dans $K[X]$ sécrit donc sous la forme: $P(X) = u(X - a_1)^{d_1}(X - a_2)^{d_2} \ldots (X - a_s)^{d_s}$ avec $u \in K^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ deux à deux distincts dans K, et $d_1, d_2, \ldots, d_s$ des entiers ≥ 1 tels que $d_1 + d_2 + \cdots + d_s = \deg P$.

Exercice 6. *(Polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton)*

Soit un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Démontrer que les zéros dans K du polynôme minimal de u sont exactement les valeurs propres de u dans K.

Exercice 7. *(Exemples de calculs de polynômes minimaux)*

Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4&1&0&1 \\ -2&-1&0&1 \\ -12&6&3&1 \\ -2&1&0&-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&-1&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&-1&2&0&1 \\ 0&0&0&1&-2 \\ 0&0&0&2&-3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. *(Lemme des noyaux)*

1) Soit E un K-espace vectoriel. Soient $u \in \operatorname{End} E$ et $P, Q \in K[X]$. Montrer que, P et Q sont premiers entre eux, alors $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.

2) Généraliser à un nombre fini quelconque de polynômes deux à deux premiers entre eux.

Exercice 9. *(Une CNS de diagonalisabilité)*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E.

1) Montrer que u est diagonalisable sur K si et seulement si u annule un polynôme scindé dans $K[X]$ dont tous les zéros sont simples (*indication:* on pourra utiliser le lemme des noyaux).

Retrouver ainsi le fait que si le polynôme caractéristique de u est scindé dans $K[X]$ et a toutes ses racines simples dans K, alors u est diagonalisable sur K, la réciproque étant fausse.

2) Montrer que u est diagonalisable sur K si et seulement si son polynôme minimal est de la forme $Q_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_s)$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de u dans K.

Exercice 10. *(Deux arguments fréquemment utilisés)*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1) Soit u un endomorphisme de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E, non-nul et distinct de E. On suppose que F est stable par u, et l'on note $v \in \operatorname{End} F$ la restriction de u à F. Montrer que le polynôme caractéristique P_v divise le polynôme caractéristique P_u.

Montrer que si H est un supplémentaire de F dans E stable par u, et si l'on note $w \in \operatorname{End} H$ la restriction de u à H, on a $P_u = P_v P_w$.

2) Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre m. Montrer que : 0 est une valeur propre de E, et c'est la seule ; le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (-1)^n X^n$ et le polynôme minimal de u est $Q_u(X) = X^m$. En déduire que $m \leq n$. Montrer que u est triangularisable.

Exercice 11. *(Valeurs propres communes de deux endomorphismes)*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note P_u et P_v leurs polynômes caractéristiques respectifs dans $\mathbb{C}[X]$.

1) Montrer que u et v n'ont aucune valeur propre commune dans $\mathbb{C}$ si et seulement si P_u et P_v sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$

2) En déduire que u et v n'ont aucune valeur propre commune dans $\mathbb{C}$ si et seulement si l'endomorphisme $P_u(v)$ est un automorphisme de E ; (*indication:* on pourra utiliser la question 1) et la propriété de Bézout pour le sens direct, et triangulariser u et v pour le sens réciproque).

Exercice 12. *(Inversibilité d'un polynôme d'endomorphisme)*

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

a) Montrer que, si $P(u) \in \mathrm{GL}(E)$, alors son inverse $P(u)^{-1}$ est de la forme $Q(u)$ pour un certain $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$; (*indication:* utiliser le polynôme caractéristique de $P(u)$).

b) Montrer que $P(u)$ appartient à $\mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $P(X)$ est premier avec le polynôme minimal de u dans $\mathbb{C}[X]$; (*indication:* utiliser le théorème de Bézout).

c) Application: montrer que, si u est nilpotent d'ordre p, alors $(\mathrm{id}_E - u) \in \mathrm{GL}(E)$, et calculer $(\mathrm{id}_E - u)^{-1}$ en fonction de u et p.

Exercice 13. *(CNS pour qu'un polynôme minimal admette 0 comme zéro simple)*

1) Soient $A \in M_p(K)$, $B \in M_q(K)$ et $C = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in M_{p+q}(K)$. Montrer que le polynôme minimal de C est le P.P.C.M. des polynômes minimaux A et B.

2) Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie, non-nul et non bijectif. Montrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$;

(ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$;

(iii) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$;

(iv) le polynôme minimal de f est de la forme $XQ(X)$ avec $Q(X) \in K[X]$ vérifiant $Q(0) \neq 0$.

Indication: on pourra utiliser la question précédente pour montrer (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Exercice 14. *(Dimension des sous-espaces caractéristiques)*

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que, pour toute valeur propre λ de u, la dimension du sous-espace caractéristique F_λ est égal à la multiplicité de la valeur propre λ.

(*Indication:* Ecrire le polynôme caractéristique sous la forme $P_u(X) = (X-\lambda)^q F(X)$ avec $F \in K[X]$ tel que $F(\lambda) \neq 0$, introduire le sous-espace $H = \operatorname{Ker} F(u)$, vérifier que $E = F_\lambda \oplus H$ et utiliser l'exercice 4).

Exercice 15. *(Décomposition canonique d'un endomorphisme triangularisable)*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique P_u est scindé dans $K[X]$.

1) Montrer que E est somme directe des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de u.

2) En déduire qu'il existe deux endomophismes d et n tels que:

$$u = d + n, \text{ avec } d \text{ diagonalisable, } n \text{ nilpotent, et } d \circ n = n \circ d.$$

(*Indication:* écrire la restriction u_i de u à chaque sous-espace caractéritique F_i associé à une valeur propre λ_i sous la forme $u_i = \lambda_i \operatorname{id}_{F_i} + w_i$). On peut montrer que d et n sont uniques, mais la preuve de cette unicité n'est pas demandée ici.

série d'exercices n° 4 : espaces vectoriels euclidiens, endomorphismes symétriques, isométries vectorielles

Formes quadratiques, produits scalaires

Exercice 1. *(Formes quadratiques)*
Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^4$ et λ un réel fixé; soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ qui, à un vecteur u de coordonnées (x, y, z, t) dans la base $\mathcal{B}$, associe:

$$q(u) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4(1-\lambda)yz + 2xz + 4xy + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt.$$

1) Ecrire la matrice de q par rapport à la base $\mathcal{B}$. Pour quelles valeurs de λ la forme q est-elle non dégénérée ? Déterminer le rang de q suivant les valeurs de λ.
2) Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. Déterminer la signature de q en discutant suivant les valeurs de λ. Pour quelles valeurs de λ la forme q est-elle définie positive ? Retrouver les résultats de la question a) et déterminer $\operatorname{Ker} q$.

Exercice 2. *(Formes quadratiques)*
On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Dans chacun des trois cas suivants, vérifier que A est symétrique. Déterminer la signature de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ dont est A est la matrice par rapport à la base canonique [*Indication pour* (iii) : $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt$].

(i) $a_{i,j} = \sin(i+j)$, (ii) $a_{i,j} = \inf(i,j)$, (iii) $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$.

Exercice 3. *(Espaces vectoriels euclidiens)*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E, et b la forme polaire associée à q. Soit $a \in E$, $a \neq 0_E$; on définit une application $r_a : E \to \mathbb{R}$ en posant: $r_a(x) = q(a)q(x) - b(a,x)^2$.

1) Montrer que r_a est une forme quadratique. Montrer que $\operatorname{Ker} q \subseteq \operatorname{Ker} r_a$.

2) Montrer que, si b est un produit scalaire, alors r_a est positive. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, vérifier qu'alors $\operatorname{Ker} r_a$ et le cône isotrope I_a de r_a sont égaux à la droite vectorielle $\mathbb{R}a$.

Exercice 4. *(Espaces vectoriels euclidiens)*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension au moins 2, muni d'un produit scalaire noté f. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. On fixe un vecteur $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit $q : E \to \mathbb{R}$ par: $q(x) = 2f(x,a)^2 + k\|x\|^2$.

Montrer que q est une forme quadratique, en précisant la forme polaire associée φ. Dans chacun des cas suivants, indiquer si q est ou non dégénérée, et si φ est ou non un produit scalaire :

(a) $k > 0$; (b) $k = 0$; (c) $-2 < k < 0$; (d) $k = -2$; (e) $k < -2$.

Isométries vectorielles

Exercice 5. *(Une révision utile sur la définition d'une isométrie vectorielle)*
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace euclidien E. Rappeler la preuve de l'équivalence des assertions suivantes, traduisant le fait pour f d'être une isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal):
(i) f conserve le produit scalaire ; (ii) f conserve la norme; (iii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale; (iv) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Rappeler aussi la définition des groupes $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(\mathrm{E})$.

Exercice 6. *(Quelques propriétés élementaires, mais utiles)*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n ; soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que :

1) Les sous-espaces $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux.

2) Les seules valeurs propres réelles possibles pour f sont 1 et -1.

3) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $f(F)^\perp = f(F^\perp)$.

4) En particulier, si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ aussi.

Exercice 7. *(Moyenne des itérés d'une isométrie vectorielle)*

Soit E un espace euclidien. Soit u un automorphisme orthogonal de E. On pose $v = \mathrm{id}_E - u$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, v = (\mathrm{Im}\, v)^\perp$.

Soient $x \in E$, et y le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}\, v$. On pose $p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que la suite $(p_n(x))_{n \geq 1}$ converge dans E vers y, c'est-à-dire que: $\lim_{n \to +\infty} \|p_n(x) - y\| = 0$.

Exercice 8. *(Symétries vectorielles orthogonales)*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel fixé de E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme s de E vérifiant:

$$s(x) = x \text{ pour tout } x \in F, \text{ et } s(x) = -x \text{ pour tout } x \in F^\perp.$$

Montrer que s est une isométrie vectorielle.

On l'appelle la symétrie orthogonale par rapport à F et on la note s_F.
Dans le cas particulier où F est un hyperplan de E, on dit que s_F est une symétrie hyperplane.

1) Montrer que $\det s_F = (-1)^{n - \dim F}$. Que peut-on dire dans le cas d'une symétrie hyperplane ?

2) Montrer que, pour tout $f \in \mathrm{O}(E)$, les condition suivantes sont équivalentes:

(i) f est une symétrie orthogonale; (ii) $f \circ f = \mathrm{id}_E$; (iii) f est diagonalisable.

3) Montrer le lemme de conjugaison suivant: pour tout $g \in \mathrm{O}(E)$, on a $g \circ s_F \circ g^{-1} = s_{g(F)}$.

Exercice 9. *(Isométries vectorielles en dimension 3)*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Pour tout couple de réel a, b, on considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est:

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+b & -4a & 0 \\ -4a & -3a+b & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles $f_{a,b} \in \mathrm{GL}(E)$. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles $f_{a,b} \in \mathrm{O(E)}$. Si $a = \frac{1}{5}$ et $b = 0$, montrer que $f_{1/5,0}$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de E que l'on déterminera.

Exercice 10. *(Isométries vectorielles en dimension 3)*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$. Pour tous réel a, b, c, on note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est:

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $f_{a,b,c} \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $|a + b + c| = 1$ et $ab + bc + ca = 0$.

2) Montrer qu'un endomorphisme $f_{a,b,c}$ qui appartient à O(E) est involutif si et seulement si $b = c$.

3) Montrer que l'ensemble G des endomorphismes $f_{a,b,c}$ qui appartiennent à O(E) et qui sont involutifs est un groupe fini, dont on déterminera explicitement tous les éléments, et dont on dressera la table pour la loi $\circ$.

4) Décrire géométriquement chacun des éléments de G, en indiquant s'il s'agit d'un élément de O^+(E) ou de O^-(E), et en précisant le sous-espace des vecteurs invariants.

Exercice 11. *(Engendrement du groupe orthogonal par les symétries hyperplanes)*

Démontrer que toute isométrie vectorielle f d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n (autre que l'identité) s'écrit sous la forme $f = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_p$ où $1 \leq p \leq n$ et $s_1, s_2, \ldots, s_p$ sont des symétries hyperplanes.

[Indication: s'il existe $u \in E$ non-nul tel que $f(u) = u$, considérer la droite vectorielle D dirigée par u, l'hyperplan $H = D^{\perp}$, et achever par récurrence ; sinon, raisonner de même avec D la droite vectorielle dirigée par $u - f(u)$ pour u un vecteur non-nul de E.].

Exercice 12. *(Centre du groupe orthogonal)*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$. Soient O(E) le groupe orthogonal de E et $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ le sous-groupe spécial orthogonal. On note Z le centre de O(E) et Z^+ le centre de $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ (rappeler comment sont définis Z et Z^+). Le but de l'exercice est de déterminer Z et Z^+.

1) Soit H un sous-espace vectoriel de E. On note s_H la symétrie orthogonale de E par rapport à H. Soit $f \in \mathrm{O(E)}$ quelconque; posons $h = f \circ s_H \circ f^{-1}$. Montrer que $h(u) = u$ pour tout $u \in f(H)$ et que $h(u) = -u$ pour tout $u \in f(H^{\perp})$. En déduire que $h = s_{f(H)}$. Conclure que l'on a:

$$\text{pour tout } f \in \mathrm{O}(E),\ [\ f \circ s_H = s_H \circ f\ ] \Leftrightarrow [\ f(H) = H\ ]. \qquad (*)$$

2) Montrer que si $f \in \mathrm{O(E)}$ vérifie $f(\Delta) = \Delta$ pour toute droite Δ de E, alors $f = \mathrm{id}_E$ ou $f = -\mathrm{id}_E$. En déduire que si $\dim E \geq 3$ et si $f \in \mathrm{O(E)}$ vérifie $f(\Pi) = \Pi$ pour tout plan Π de E, alors $f = \mathrm{id}_E$ ou $f = -\mathrm{id}_E$.

3) A l'aide de (*) et de la question 2), déterminer quels sont les éléments de Z. Déterminer de même quels sont les éléments de Z^+ (on pourra distinguer trois cas suivant que $\dim E$ est impaire, ou paire et au moins égale à 4, ou égale à 2).

Exercice 13. *(Matrices de Householder et symétries orthogonales)*

On fixe un entier $n \geq 2$, et on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur non-nul u de $\mathbb{R}^n$, on désigne par h_u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est: $H_u = I_n - \frac{2}{\|u\|^2} U^t U$, où l'on note U la matrice colonne des composantes de u dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice H_u est symétrique et orthogonale. Montrer que h_u est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}u)^{\perp}$.

Exercice 14. *(Matrices de permutation)*

On fixe un entier $n \geq 2$, et on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on désigne par M_σ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par:

$$M_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M_σ par rapport à la base canonique.

1) Montrer que f_σ appartient au groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

2) Montrer qu'il existe une valeur propre réelle commune à tous f_σ, pour σ décrivant S_n.

3) Montrer qu'il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ stable par f_σ pour tout $\sigma \in S_n$.

Endomorphismes symétriques

Exercice 15. *(Endomorphismes symétriques)*

Soit E un espace euclidien ; on note $\langle\, , \rangle$ son produit scalaire. Soit u un endomorphisme de E.

1) Montrer que si $u(x) \perp x$ pour tout $x \in E$, et u est symétrique, alors u est l'endomorphisme nul.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = (\mathrm{Im}\, u^t)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}\, u^t = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$.

3) On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel M de E tel que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in M$, et $v(x) = 0_E$ pour tout $x \in M^{\perp}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, v = M^{\perp}$.

Exercice 16. *(Diagonalisation des endomorphismes symétriques)*

On considère dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & dc \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b, c, d \text{ sont des réels non tous nuls.}$$

1) Montrer que u est symétrique. Déterminer la signature de la forme quadratique q de $\mathbb{R}^4$ de matrice A dans la base canonique.
2) Montrer que 0 est valeur propre triple de u et déterminer le sous-espace propre associé. Soit λ l'autre valeur propre de u; déterminer le sous-espace propre associé, et calculer λ.

Exercice 17. *(Diagonalisation des endomorphismes symétriques)*

1) On considère dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique définie par rapport à la base canonique par $q(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ qui soit orthogonale pour q; donner l'expression de q dans cette nouvelle base.

2) On considère dans le plan affine euclidien $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ la conique (C) d'équation $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 22x + 26y + 35 = 0$. Déterminer un repère orthonormé $(O', \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ dans lequel une équation de (C) soit de la forme $q(x', y') = r$, où r est un réel que l'on déterminera. Quelle est la nature de (C) ?

Exercice 18. *(Racine carré d'une matrice symétrique définie positive)*

Soit un f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f, $E_1, \ldots, E_r$ les sous-espaces propres associés, et $d_1, \ldots, d_r$ leurs dimensions respectives.
1) On suppose qu'il existe un endomorphisme symétrique défini positif g de E tel que $g^2 = f$. Montrer que $g \circ f = f \circ g$; en déduire que g laisse stable chacun des sous-espaces E_i, que la restriction g_i de g à E_i est diagonalisable, et que ses valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_{d_i}$ sont strictement positives. Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $g_i^2 = \mathrm{id}_{E_i}$, en déduire que $\mu_1 = \cdots = \mu_{d_i} = \sqrt{\lambda_i}$, puis que $g_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathrm{id}_{E_i}$. Conclure que g est unique.
2) Utiliser la question précédente pour montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique défini positif g de E tel que $g^2 = f$.
3) Montrer que, pour toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$ définie positive A, il existe une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$ définie positive S telle que $A = S^2$.

Exercice 19. *(Décomposition polaire d'une matrice inversible)*

Soit M une matrice de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
1) Montrer que la matrice $S = M^tM$ est symétrique définie positive. Montrer que la matrice $O = (M^{-1})^tS$ est orthogonale.
2) Supposons qu'il existe deux matrices symétriques définies positives S, S' et deux matrices orthogonales O, O' telles que $M = OS = O'S'$. Calculer M^tM de deux façon différentes pour conclure que $S = S'$, puis que $O = O'$.
3) En déduire que M s'écrit de façon unique comme le produit d'une matrice orthogonale par une matrice symétrique définie positive.

Exercice 20. *(Projections orthogonales dans un espace vectoriel euclidien)*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n; notons b son produit scalaire, et N la norme euclidienne associée. Soit F un sous-espace de E de dimension $m \leq n$.

1) Montrer qu'il existe $p \in \mathrm{End}\,E$ unique tel que $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$ pour tout $x \in E$. Vérifier que: $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}\,p = F$ et $\mathrm{Ker}\,p = F^\perp$. Montrer que l'on a aussi $b(p(x), y) = b(x, p(y))$ pour tous $x, y \in E$. L'endomorphisme p est appelé la projection orthogonale de E sur F.

2) Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ une base orthogonale de F. Montrer que:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{b(x, e_i)}{b(e_i, e_i)} \, e_i \quad \text{pour tout } x \in E.$$

3) Soit x un vecteur de E. On appelle distance de x à F le réel $d(x, F) = N(x - p(x))$. Montrer que $d(x, F)$ est le plus petit élément de l'ensemble $\{ N(x - z)\,;\, z \in F \}$.

Application: soient $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, $a = (a_1, a_2, a_3) \in E$, et Q un plan d'équation $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ pour $b = (b_1, b_2, b_3)$ non-nul dans E. Calculer $d(a, Q)$.

Exercice 21. *(Plus petite et plus grande valeur propre d'une matrice symétrique)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ dont A est la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$. On note $\cdot$ le produit scalaire canonique de E. Pour tout $x \in E$, et en désignant par X la matrice colonne des coordonnées de x par rapport à $\mathcal{B}$, on a donc: $u(x) \cdot x = {}^tXAX$.

1) On considère l'application (de Rayleigh) $r : E \setminus \{0_E\} \to \mathbb{R}$ définie par $r(x) = \frac{1}{\|x\|^2}(u(x) \cdot x)$. Montrer que $r(E\setminus\{0_E\}) = r(S_n)$ où S_n est la sphère unité de E. En déduire qu'il existe $x_m, x_M \in E$ non-nuls tels que $r(x_m) = \inf\{r(x)\,;\, x \in E \setminus \{0_E\}\}$ et $r(x_M) = \sup\{r(x)\,;\, x \in E \setminus \{0_E\}\}$.

2) Montrer que la plus petite valeur propre λ_m de A et la plus grande λ_M sont données par:

$$\lambda_m = \inf_{X \neq 0} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \quad \text{et} \quad \lambda_M = \sup_{X \neq 0} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}, \quad \text{avec} \quad r(E \setminus \{0_E\}) = [\lambda_m, \lambda_M].$$

Produits hermitiens, endomorphismes autoadjoints

Exercice 22. *(Endomorphismes autoadjoints, endomorphismes normaux)*

Soit E un espace hermitien. Montrer que tout endomorphisme u de E s'écrit de façon unique $u = u_1 + u_2$ où u_1 est autoadjoint et u_2 est anti-autoadjoint (i.e. $u_2^* = -u_2$). Montrer qu'alors u est normal si et seulement si u_1 et u_2 commutent.

Exercice 23. *(Endomorphismes autoadjoints)*

Soit E un espace hermitien ; on note $\langle\, ,\, \rangle$ son produit hermitien. Soit u un endomorphisme de E.

1) On suppose que $u(x) \perp x$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'alors u est l'endomorphisme nul (*indication:* appliquer l'hypothèse à $x + y$ et $x + iy$ pour $x, y \in E$ quelconques). Montrer que le résultat ne subsiste pas dans le cas réel (penser aux rotations dans le plan euclidien).

2) En déduire que u est autoadjoint si et seulement si $\langle u(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$.

Exercice 24. *(Valeurs propres des endomorphismes autoadjoints)*

On rappelle le théorème fondamental suivant (réétudier sa démonstration): *Un endomorphisme autoadjoint d'un espace vectoriel euclidien ou hermitien est diagonalisable, ses valeurs propres sont réelles, et on peut trouver une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de E.*

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes. On considère l'application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $h(A, B) = \operatorname{tr}(AB^*)$ pour tous $A, B \in E$.

1) Montrer que h est un produit scalaire hermitien.

2) On note N la norme associée à h (norme de Frobenius-Schur) ; pour toute matrice $A \in E$ supposée hermitienne, calculer $N(A)$ en fonctions des valeurs propres de A.

Exercice 25. *(Valeurs propres des endomorphismes normaux)*

Soit E un espace vectoriel hermitien. Rappelons qu'un endomorphisme u de E est dit normal lorsqu'il commute avec son adjoint u^*. Montrer que: *un endomorphisme de E est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement s'il est normal.* (*Indication:* on procède par récurrence sur la dimension de E ; soit λ une valeur propre de u, vérifier que $E_\lambda^\perp$ est stable par u^* et par u, conclure en considérant les restrictions appropriées). Que peut-on dire des valeurs propres d'un endomorphisme normal dans le cas autoadjoint ? anti-autoadjoint ? unitaire ?

série d'exercices n° 5 : nombres complexes et géométrie

$\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct fixé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de l'espace vectoriel E dirigeant $\mathcal{E}$. Les affixes des points de $\mathcal{E}$ (respectivement des vecteurs de E) sont relatifs au repère $\mathcal{R}$ (respectivement à la base $\mathcal{B}$).

Exercice 1. *(Equations complexes de droites et de cercles)*

a) Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \in E$ non-nuls, d'affixes respectifs $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Montrer que:

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires si et seulement $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$;
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont orthogonaux si et seulement $\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}' = \frac{1}{2}(z\overline{z}' + \overline{z}z')$.

b) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{C}^*$ et tout $\gamma \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ dont l'affixe z est solution de l'équation:

$$\overline{u}z + u\overline{z} + \gamma = 0$$

est une droite (dont un vecteur normal admet u pour affixe). Montrer que réciproquement toute équation complexe de droite est de ce type. Montrer que, si A, B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$ d'affixes a, b une équation de (AB) est : $(\overline{a} - \overline{b})z - (a - b)\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b = 0$.

c) Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $|c|^2 - \gamma \geq 0$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ dont l'affixe z est solution de l'équation:

$$z\overline{z} - \overline{c}z - c\overline{z} + \gamma = 0$$

est un cercle (dont le centre admet c pour affixe, et dont le rayon est $R = \sqrt{|c|^2 - \gamma}$). Montrer que réciproquement toute équation complexe de cercle est de ce type.

Exercice 2. *(Racines de l'unité)*

En utilisant les propriétés des racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, indiquer comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

Exercice 3. *(Racines de l'unité)*

On fixe n un entier naturel non multiple de 3. On note U_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et l'on introduit la fonction polynomiale $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par:

$$f(z) = \prod_{\zeta \in U_n} (z^2 + \zeta z + \zeta^2).$$

1) Calculer $f(0)$.

2) Vérifier qu'il existe des entiers a, b tels que $an + 3b = 1$. En déduire que, si $z \in U_n$ vérifie $z^3 = 1$, alors $z = 1$. Conclure que $z \mapsto z^3$ définit une bijection de $U_n - \{1\}$ sur $U_n - \{1\}$, de bijection réciproque $z \mapsto z^b$.

3) Déduire de la question précédente que $f(1) = 3$.

4) Montrer que, pour tout $\beta \in U_n$, l'application $z \mapsto z/\beta$ définit une bijection de U_n sur U_n. En déduire que $f(\beta) = 3$.

5) En écrivant $z^n - 1$ comme produit de polynômes de degré 1, en déduire une expression simple de $f(z)$ comme une somme de trois monômes.

6) On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O de rayon 1, $\mathcal{P}$ l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ dont les affixes sont les éléments de U_n, $\mathcal{P}_1$ l'image de $\mathcal{P}$ par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$, et $\mathcal{P}_2$ l'image de $\mathcal{P}$ par la rotation de centre O et d'angle $-2\pi/3$. Pour tout point M de $\mathcal{C}$, on note:

$$F(M) = \textstyle\prod_{\Omega \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2} \Omega M.$$

Vérifier que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont disjoints. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{C}$ d'affixe z, on a $f(M) = |f(z)|$. En déduire que $F(M) \leq 3$ et déterminer l'ensemble de points M de $\mathcal{C}$ tels que $F(M) = 3$.

Exercice 4. *(Rotations, homothéties)*

Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, on note h_a la bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ dont la détermination complexe est définie par $z \mapsto az$.

a) Caractériser géométriquement h_a lorsque $a \in \mathbb{R}^*$, lorsque $|a| = 1$, lorsque $a \in \mathbb{C}^*$ quelconque.

b) Soient $M, N, P \in \mathcal{E}$ d'affixes respectifs m, n, p, formant un triangle (MNP) dans le sens direct. Montrer que (MNP) est équilatéral si et seulement si $m + jn + j^2p = 0$.
Montrer que (MNP) est isocèle rectangle en M si et seulement si $m = p\left(\frac{i+1}{2}\right) - n\left(\frac{i-1}{2}\right)$.

c) Montrer que toute bijection h_a multiplie les distances par $|a|$ et conserve les angles orientés.

d) Montrer que toute bijection h_a transforme une droite en une droite, un cercle en un cercle, une conique en une conique de même excentricité.

Exercice 5. *(Similitudes directes)*

Pour tous $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$, on note $s_{a,b}$ la bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ dont la détermination complexe est définie par $z \mapsto az + b$. Une telle bijection est appelée une similitude directe.

a) Montrer que $s_{a,b} = h_a \circ t_{b/a} = t_b \circ h_a$, où $h_a = s_{a,0}$ est définie comme dans l'exercice précédent, et $t_b = s_{1,b}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ avec B le point de $\mathcal{E}$ d'affixe b.
En déduire que $s_{a,b}$ est la composée de la translation dont le vecteur a pour affixe b, de la rotation de centre O dont l'angle est $\arg a$ (modulo 2π), et de l'homothétie de centre O dont le rapport est $|a|$. Comment s'interprètent ces résultats en termes de sous-groupes du groupe affine de $\mathcal{E}$.

b) On suppose $a \neq 1$ et on note Ω le point de $\mathcal{E}$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$. Montrer que $s_{a,b}$ est la composée de la rotation de centre Ω d'angle $\arg a$ (modulo 2π) et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

c) *Détermination par deux couples de points homologues:* soient (M, N) et (M', N') deux couples de points de $\mathcal{E}$ tels que $M \neq N$ et $M' \neq N'$. Montrer qu'il existe une unique similitude s telle que $s(M) = M'$ et $s(N) = N'$. Déterminer ses éléments caractéristiques (rapport, angle, centre) avec les affixes m, n, m', n' des quatre points de départ.

d) *Triangles directement semblables:* montrer que deux triangles (MNP) et $(M'N'P')$ sont directement semblables si et seulement si les affixes des sommets vérifient $\frac{m-n}{m-p} = \frac{m'-n'}{m'-p'}$.

Exercice 6 *(Autour d'un théorème dit "de Napoléon")*

Soit (ABC) un triangle quelconque.

1) Montrer qu'il existe des points M, N, P uniques situés à l'extérieur du triangle (ABC) tels que les trois triangles (ACN), (BAP) et (CBM) soient directement semblables.
Montrer qu'alors les triangles (ABC) et (MNP) ont le même isobarycentre.
Peut-on réciproquement reconstruire (ABC) connaissant (MNP) ?

2) Si les trois triangles extérieurs sont équilatéraux, montrer que les segments $[AM]$, $[BN]$ et $[CP]$ sont de même longueur. Quel angle forment-ils entre eux ?
Montrer que les isobarycentres respectifs I, J, K des triangles (ACN), (BAP) et (CBM) forment un triangle équilatéral.

3) Si les trois triangles extérieurs sont isocèles rectangles (en M, N, P respectivement), Montrer que les segments $[BN]$ et $[MP]$ sont de même longueur et orthogonaux.
Montrer que les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes.

Exercice 7 *(Suite des images itérées d'un point par une similitude directe)*

Soit s la similitude de détermination complexe $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right) z$. Déterminer son centre et son rapport.
On pose A_0 le point d'affixe 1 et $A_{n+1} = s(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En calculant $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$, déterminer la nature du triangle OA_nA_{n+1} ; en déduire une construction géométrique de A_{n+1} à partir de A_n.
Comparer les longueurs $A_{i+1}A_{i+2}$ et A_iA_{i+1} pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On note $L_n = \sum_{i=0}^{n} A_iA_{i+1}$; calculer L_n en fonction de n et déterminer sa limite.

Exercice 8 *(Cocyclicité, birapport)*

a) Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{E}$, d'affixes respectifs a, b. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note X_k l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont l'affixe z vérifie $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Déterminer X_k suivant que $k < 0$, $k = 0$, $k = 1$, ou $k > 0$ avec $k \neq 1$ (dans le dernier cas, montrer que X_k est le cercle de diamètre $[IJ]$ où $I = \text{Bar}\{(A,1),(B,-k)\}$ et $J = \text{Bar}\{(A,1),(B,k)\}$).

b) Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{E}$, d'affixes respectifs a, b. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note Y_k l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont l'affixe z vérifie $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = k$ modulo π.

Montrer que Y_k est égal à la droite (AB) (privée des deux points A et B) lorsque $k \in \pi\mathbb{Z}$, et à un cercle passant pas A et B (privé des deux points A et B) lorsque $k \notin \pi\mathbb{Z}$.

c) Soient A, B, C, D quatre points de $\mathcal{E}$ deux à deux distincts, d'affixes respectifs a, b, c, d. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si le birapport $\frac{b-c}{a-c} \times \frac{a-d}{b-d}$ est un nombre réel.

Exercice 9 *(Théorème de Ptolémée)*

Montrer qu'un quadrilatère convexe $(ABCD)$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, c'est-à-dire si et seulement si $AC \times BD = AD \times BC + AB \times DC$.

Exercice 10 *(Homographies)*

Soit I le point de $\mathcal{E}$ d'affixe 1. Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$, on note A, B les deux points distincts de $\mathcal{E}$ d'affixes a, b, et $f_{a,b}$ la bijection de $\mathcal{E} \setminus \{B\}$ sur $\mathcal{E} \setminus \{I\}$ dont la détermination complexe est définie par $z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$.

a) Montrer que : $f_{a,b} = t_1 \circ h_{b-a} \circ \omega \circ t_{-b}$, où:

t_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$,
t_{-b} est la restriction à $\mathcal{E} \setminus \{B\}$ de la translation de vecteur $-\overrightarrow{OB}$,
h_{b-a} est une similitude définie comme dans l'exercice 2,
ω est la bijection de $\mathcal{E} \setminus \{O\}$ sur $\mathcal{E} \setminus \{O\}$ dont la détermination complexe est définie par $z \mapsto \frac{1}{z}$.

b) En déduire que $f_{a,b}$ conserve le birapport de quatre points, deux à deux distincts et différents de B. Conclure que $f_{a,b}$ transforme quatre points (distincts de B) cocycliques ou alignés en quatre points (distincts de I) cocycliques ou alignés.

c) Montrer plus précisément que $f_{a,b}$ transforme:

- une droite passant par B (privée de B) en une droite passant par I (privée de I),
- un cercle ne passant pas par B en un cercle ne passant pas par I,
- une droite ne passant pas par B en un cercle passant par I (privé de I),
- un cercle passant par B (privé de B) en une droite ne passant pas par I.

Indication : on pourra avec la question a) se ramener au seul cas de ω avec $I = B = O$, et utiliser les équations complexes de cercle et de droites (exercice 1).

série d'exercices n° 6 : angles

Exercice 1. *(Le groupe othogonal en dimension 2)*

On fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E de dimension 2. Rappeler tout d'abord une démonstration du fait, pour tout endomorphisme f de E, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) f est une isométrie vectorielle de E,

(ii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale,

(iii) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale,

et que, pour toute isométrie vectorielle f de E, on a $\det f = 1$ ou $\det f = -1$.

> Les isométries vectorielles de déterminant 1 sont dites directes, ou positives ; elles forment un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathrm{SO}(E)$ ou $\mathrm{O}^+(E)$. Les isométries vectorielles de déterminant -1 sont dites indirectes, ou négatives ; elles forment un sous-ensemble de $\mathrm{O}(E)$ noté $\mathrm{O}^-(E)$ (ce n'est pas un groupe).

On rappelle que, si D est une droite de E, on appelle réflexion vectorielle d'axe D la symétrie orthogonale par rapport à D, et qu'on définit une rotation vectorielle comme la composée de deux réflexions vectorielles.

a) Montrer qu'une réflexion est une isométrie vectorielle, que la bijection réciproque d'une réflexion s_D est $s_D^{-1} = s_D$, et que l'ensemble des vecteurs fixés par s_D est égal à la droite D.

b) Montrer qu'une rotation est une isométrie vectorielle, que la bijection réciproque d'une rotation $r = s_{D'} \circ s_D$ est la rotation $r^{-1} = s_D \circ s_{D'}$, et que l'ensemble des vecteurs fixés par r est réduit à $\{0\}$ dès lors que $D \neq D'$.

c) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que:

• f est une réflexion si et seulement s'il existe deux réels a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ tels que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ soit égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$,

• f est une rotation si et seulement s'il existe deux réels a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ tels que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ soit égale à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

d) Déduire des questions précédentes que : les isométries directes du plan vectoriel E sont les rotations vectorielles ; les isométries indirectes du plan vectoriel E sont les réflexions vectorielles.

e) Montrer que le groupe $O^+(E)$ des rotations vectorielles du plan E est abélien, isomorphe au groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc au groupe des nombres complexes de module 1.

f) (Non-unicité de l'écriture d'une rotation comme composée de deux réflexions) : montrer que, si r est une rotation vectorielle de E, alors, pour toute droite D, il existe une droite D' telle que $r = s_D \circ s_{D'}$ et une droite D'' telle que $r = s_{D''} \circ s_D$.

g) (Propriété fondamentale pour la définition des angles) : montrer que, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non-nuls de même norme dans E, il existe une unique rotation r de E telle que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.

Exercice 2 *(Angles de vecteurs)*

E est toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E de dimension deux. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ non-nul, on convient de noter $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ le normalisé unitaire de $\overrightarrow{u}$. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E. On rappelle qu'un angle est une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ définie dans $\mathcal{U}$ par : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ s'il existe une rotation r de E telle que $\overrightarrow{u}' = r(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{v}' = r(\overrightarrow{v})$. On note $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ l'angle d'un couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathcal{U}$, et l'on définit par $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}})$ l'angle d'un couple de vecteurs quelconques non-nuls $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de E.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles de vecteurs.

a) Montrer que, pour tous couples $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u}',\vec{v}')$ de $\mathcal{U}$, les assertions suivantes sont équivalentes:

- l'unique rotation qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{u}'$ est égale à l'unique rotation qui envoie $\vec{v}$ sur $\vec{v}'$,
- l'unique rotation qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est égale à l'unique rotation qui envoie $\vec{u}'$ sur $\vec{v}'$,
- les angles $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})$ sont égaux.

b) On considère l'application $\psi:\mathcal{A}\to \mathrm{O}^+(E)$ qui, à tout $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\in\mathcal{A}$, associe l'unique rotation $f\in\mathrm{O}^+(E)$ telle que $f(\vec{u_1})=\vec{v_1}$. Montrer que ψ est bien définie (indépendamment des représentants choisis pour l'angle), et qu'elle est bijective de $\mathcal{A}$ sur $\mathrm{O}^+(E)$.

c) On définit la somme de deux angles par: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})=\psi^{-1}[\psi(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\circ\psi(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})]$.
Montrer que $\mathcal{A}$ est un groupe abélien pour cette addition, et que ψ est un isomorphisme de groupes.
Montrer que l'on a la relation de Chasles: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+(\widehat{\vec{v},\vec{w}})=(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$ quels que soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ non-nuls dans E.

Exercice 3. *(Quelques résultats élémentaires pour mettre en pratique les définitions précédentes)*

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien de dimension 2, d'espace vectoriel associé E.

1) Montrer que toute réflexion de E transforme un angle de vecteurs en son opposé. [*Indication:* pour une réflexion s_D d'axe D et deux vecteurs unitaires $\vec{u},\vec{v}$ distincts, considérer la rotation $s_D\circ s_{D'}$ où $D'=(\vec{u}-\vec{v})^\perp$].

2) Soient A,B,C trois points distincts de $\mathcal{E}$. Montrer que:

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})+(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\ \text{ est l'angle plat.}$$

3) Soit C un point de la médiatrice d'un segment $[A,B]$ dans $\mathcal{E}$. Montrer que:

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}).$$

4) Prouver le théorème de l'angle inscrit: si A,B,C sont trois points distincts d'un cercle de centre O dans $\mathcal{E}$, on a:

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}).$$

Exercice 4. *(Orientation du plan, mesures d'angles de vecteurs)*

On suppose ici que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension deux E est orienté (on rappellera avec précision ce qui cela signifie).

a) Soit $r\in O^+(E)$ une rotation vectorielle. Montrer qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que la matrice de r dans *toute* base orthonormée *directe* de E soit égale à $R_\theta=\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$.
Montrer que la matrice de r dans toute base orthonormée indirecte de E est alors égale à $R_{-\theta}$.

b) Pour tout réel θ, notons r_θ l'unique rotation dont la matrice par rapport à toute base orthonormée directe est la matrice R_θ. Montrer que l'application $r:\mathbb{R}\to O^+(E)$ définie par $\theta\mapsto r_\theta$ est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

> On rappelle qu'on appelle mesure d'un angle de vecteurs $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tout réel θ (non unique mais défini modulo 2π) tel que l'unique rotation qui envoie le vecteur unitaire $\vec{u_1}=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ sur le vecteur unitaire $\vec{v_1}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ soit la rotation r_θ définie ci-dessus.

c) Montrer que l'application qui, à un angle de vecteurs, associe la classe modulo $2\pi\mathbb{Z}$ de ses mesures définit un isomorphisme de groupes additifs de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

d) Montrer que l'on peut définir sans ambiguïté le cosinus et le sinus d'un angle de vecteurs comme le cosinus et le sinus de l'une quelconque de ses mesures. Montrer qu'avec cette définition, on a:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\quad\text{ et }\quad\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{[\vec{u},\vec{v}]}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|},$$

où $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $[\vec{u},\vec{v}]$ désignent respectivement le produit scalaire et le produit mixte.

Exercice 5. *(Quelques résultats élémentaires pour mettre en pratique les définitions précédentes)*
Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien de dimension 2 orienté. Soient A, B, C trois points non-alignés de $\mathcal{E}$. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des côtés, et α, β, γ les mesures respectives des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$. On pose aussi $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi périmètre du triangle ABC et S son aire. On désigne enfin par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer les relations suivantes:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \qquad 2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exercice 6. *(Angles de droites).*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. On reprend les notations de l'exercice 2.

1) Montrer que la relation $\approx$ définie dans $\mathcal{U}$ par:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \approx (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') \text{ si et seulement } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') \text{ ou } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (-\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$$

est une relation d'équivalence dans $\mathcal{U}$.

2) On rappelle que, si D et Δ sont deux droites vectorielles dans E, l'angle de droites $(\widehat{D, \Delta})$ est défini comme la classe déquivalence de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour la relation $\approx$, où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs unitaires de D et Δ respectivement.
Montrer que: si D, Δ, D', Δ' sont des droites de E de vecteurs unitaires respectifs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'$, on a:

$$\underbrace{(\widehat{D, \Delta}) = (\widehat{D', \Delta'})}_{\text{angles de droites}} \quad \text{si et seulement} \quad \underbrace{2(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'})}_{\text{angles de vecteurs}}.$$

Vérifier que les angles de droites forment un groupe $\mathcal{A}'$ isomorphe au groupe quotient de $\mathcal{A}$ par le sous-groupe d'ordre 2 engendré par l'angle plat.

3) Indiquer comment, lorsque E est supposé orienté, on peut définir modulo π la notion de mesure d'un angle de droites, et en déduire un isomorphisme de groupes de $\mathcal{A}'$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

4) Rappeler comment sont définies les bissectrice d'une paire de droites $\{D, D'\}$ distinctes dans E. Montrer que, si Δ est une bissectrice de D et D', on a l'égalité d'angles de droites $(\widehat{D, \Delta}) = (\widehat{\Delta, D'})$.

Exercice 7. *(Quelques résultats élémentaires pour mettre en pratique les définitions précédentes)*
Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien de dimension 2.

1) (Condition limite du théorème de l'angle inscrit). Montrer que, si A et B sont deux points distincts d'un cercle de centre O dans $\mathcal{E}$ et si T est la tangente en B au cercle, on a l'égalité:

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2((\widehat{AB), T}).$$

2) (Condition de cocyclicité). Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$. Un point D de $\mathcal{E}$ est sur le cercle qu'ils déterminent si et seulement si on a l'égalité d'angles de droites:

$$((\widehat{CA), (CB})) \text{ et } ((\widehat{DA), (DB})).$$

En déduire que quatre points A, B, C, D de $\mathcal{E}$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si les angles de droites $((\widehat{CA), (CB}))$ et $((\widehat{DA), (DB}))$ sont égaux.

Exercice 8. *(Angles géométriques et bissectrice intérieure)*
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2, d'espace vectoriel directeur E.
Rappelons que le terme d'angle géométrique de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est utilisé lorsque l'on identifie les angles opposés $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}})$ en ne retenant que celui des deux dont la mesure est dans $[0, \pi]$. Elle est usuellement confondue avec celle de secteur angulaire défini par deux-demi droites.

Soient d et d' deux demi-droites de $\mathcal{E}$ d'origine A. Soient D et D' les deux droites vectorielles de E supportant d et d' respectivement. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de d et d'. Soit S l'enveloppe convexe de la réunion $d \cup d'$.

1) Donner des vecteurs directeurs des bissectrices des droites D et D' ?

2) Montrer qu'une seule de ces deux bissectrices intersecte S en un autre point que A.

3) En déduire que, dans un triangle non aplati ABC, une seule des deux bissectrices de l'angle en A (comment est-il défini ?) intersecte le segment $B, C]$. On l'appelle la bissectrice intérieure de cet angle.

Exercice 9. (Le groupe orthogonal en dimension 3)

On fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E de dimension 3. On note $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E, $\mathrm{O}^+(E)$ le sous-groupe des isométries directes, $\mathrm{O}^-(E)$ le sous-ensemble des isométries indirectes.

a) Soit $u \in \mathrm{O}^+(E)$ tel que $u \neq \mathrm{id}_E$. Montrer que $D = \{x \in E\,;\, u(x) = x\}$ est une droite vectorielle. Montrer que $P = D^\perp$ est un plan vectoriel stable par u, et que la restriction u' de u à P est une rotation plane. Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée $\{v_1, v_2, v_3\}$ telle que $v_1, v_2 \in P$ et $v_3 \in D$. Montrer que l'angle θ de u' vérifie $\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\, u - 1)$. On dit que u est la rotation de E, d'axe D et d'angle θ.

b) Soit $u \in \mathrm{O}^-(E)$ tel que $u \neq -\mathrm{id}_E$. Montrer que $D = \{x \in E\,;\, u(x) = -x\}$ est une droite vectorielle. Montrer que $P = D^\perp$ est un plan vectoriel stable par u, et que la restriction u' de u à P est une rotation plane. Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée $\{v_1, v_2, v_3\}$ telle que $v_1, v_2 \in P$ et $v_3 \in D$. Montrer que l'angle θ de u' vérifie $\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\, u + 1)$. Ainsi, u est la composée $s \circ \rho$ de la symétrie orthogonale s par rapport au plan P et de la rotation $\rho \in \mathrm{O}^+(E)$ d'axe D et d'angle θ.

c) Déterminer géométriquement les isométries dont la matrice par rapport à la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ est:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

série d'exercices n° 7 : espaces affines, barycentres

Exercice 1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geq 2$. On fixe un réel $a > 0$. On considère dans $\mathcal{E}$ trois points distincts non alignés A, B, C tels que $AB = 3a$, $AC = 4a$ et $BC = 5a$. On note ψ l'application $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(M) = -5MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2$ pour tout $M \in \mathcal{E}$.

a) Soit G le barycentre de $\{(A, -5), (B, 4), (C, 3)\}$. Exprimer les coordonnées de G dans le repère orthogonal $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC). En déduire la valeur de $\psi(G)$ en fonction de a, puis pour tout point $M \in \mathcal{E}$ l'expression de $\psi(M)$ en fonction de a et de MG.

b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble S_k des points $M \in \mathcal{E}$ vérifiant $\psi(M) = ka^2$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. On fixe quatre points non coplanaires A, B, C, D dans $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{R}$ le repère cartésien $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de $\mathcal{E}$. On introduit les points: E le barycentre de $\{(A, 1), (B, a)\}$, F le barycentre de $\{(B, 1), (C, b)\}$, G le barycentre de $\{(C, 1), (D, c)\}$ et H le barycentre de $\{(D, 1), (A, d)\}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ différents de -1.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que les quatre points E, F, G, H soient coplanaires.

b) Expliciter une équation cartésienne par rapport à $\mathcal{R}$ de chacun des plans (ECD), (FDA), (GAB) et (HBC). En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que ces quatre plans aient un point commun.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2. On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ (toutes les coordonnées considérées sont par rapport à ce repère). On considère trois réels $b > 0$, $c > 0$ et $k \neq -1$, ainsi que les points $B(b, 0)$ et $C(0, c)$. On note M le barycentre de $\{(B, 1), (C, k)\}$.

a) Calculer les coordonnées de M et la distance OM en fonction de b, c, k.

b) Déterminer la valeur de k et de OM : **(i)** lorsque (OM) est la médiane issue de O du triangle (OBC), **(ii)** lorsque (OM) est la hauteur issue de O du triangle (OBC), **(iii)** lorsque (OM) est la bissectrice intérieure issue de O du triangle (OBC).

c) Calculer les coordonnées des points E et D tels que $(BCDE)$ soit un carré (attention, il y a plusieurs solutions).

d) Soient N et P les projetés orthogonaux de M sur les (OB) et (OC) respectivement. Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $(ONMP)$ en fonction de b, c, k ; pour quelle valeur de k est-elle maximale ?

Exercice 4. Soient A, B, C trois points non aligné d'un plan affine $\mathcal{E}$, et a, b, c trois réels tels que $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$ et $a + c \neq 0$. On considère : A' le barycentre de $\{(B, b), (C, c)\}$, B' le barycentre de $\{(A, a), (C, c)\}$ et C' le barycentre de $\{(A, a), (B, b)\}$.

a) Soient α, β, γ trois réels de somme non-nulle, et M le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$. Montrer que $M \in (AA')$ si et seulement si $c\beta = b\gamma$.

b) Montrer que: **(i)** si $a + b + c \neq 0$, alors les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes; **(ii)** si $a + b + c = 0$, alors les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

Exercice 5. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux parties convexes d'un espace affine $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ formé de tous les points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe $M_1 \in \mathcal{C}_1$ et $M_2 \in \mathcal{C}_2$ tels que M soit le milieu de (M_1, M_2) est convexe.

Application : en prenant $\mathcal{E}$ de dimension 2, $\mathcal{C}_1 = [A, B]$ et $\mathcal{C}_2 = [C, D]$ avec $A, B, C, D \in \mathcal{E}$, déterminer $\mathcal{C}$ (et faire un dessin !) dans chacun des cas suivants:

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
(ii) milieu de (A, B) = milieu de (C, D)
(iii) C = milieu de (A, B) et $D \notin (AB)$
(iv) $D = A$ et $C \notin (AB)$

Exercice 6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ (toutes les coordonnées de points et équations de sous-espaces considérées sont par rapport à ce repère). On fixe $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. On considère les quatre plans $\mathcal{F}_i$, pour $1 \leq i \leq 4$, d'équations respectives:

$$\mathcal{F}_1 : \ x + y + z = 3a \qquad \mathcal{F}_2 : \ x - y + z = 7a \qquad \mathcal{F}_3 : \ x + y - z = a \qquad \mathcal{F}_4 : \ -x + y + z = a.$$

a) Montrer que $\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3 \cap \mathcal{F}_4$ est un singleton $\{A\}$ et déterminer les coordonnées de A. Déterminer de même $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_3 \cap \mathcal{F}_4 = \{B\}$, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_4 = \{C\}$ et $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3 = \{D\}$. Montrer que A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

b) Déterminer une équation de chacun des trois plans $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{H}''$, plans médiateurs respectifs des bipoints (A, B), (A, C) et (A, D). Déterminer le centre Ω et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

c) On note A' le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{F}_1$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AA') et montrer qu'elle passe par Ω ; déterminer les coordonnées de A' et calculer la distance $d(\Omega, \mathcal{F}_1)$. Calculer de même $d(\Omega, \mathcal{F}_i)$ pour $i = 2, 3, 4$.

d) Déterminer l'isobarycentre des points A, B, C, D.

Exercice 7. Soit ABC un triangle d'un plan affine $\mathcal{E}$. On fixe un réel $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et on considère les points A', B', C' de $\mathcal{E}$ définis par $\overrightarrow{AC'} = p\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = p\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB'} = p\overrightarrow{CA}$. Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point K, les droites (BB') et (CC') en un point I, les droites (AA') et (CC') en un point J. Le but de l'exercice est de comparer les aires des triangles IJK et ABC.

a) Ecrire les points A', B', C' comme barycentres des points A, B, C. Montrer que le point I est barycentre de A, B, C affectés des coefficients respectifs p, $\frac{p^2}{1-p}$ et $1 - p$. Exprimer de même J et K comme des barycentres de A, B, C.

b) Montrer que I est le barycentre des deux points C et J affectés des coefficients respectifs $1 - 2p$ et p. Exprimer de même J comme barycentre de A et K, et K comme barycentre de B et I.

c) On note $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7$ les aires respectives des triangles ABC, ABJ, AJI, IJK, BJK, BCK, CIK et ACI. Montrer que $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_7 = IJ/CI = (\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4)/(\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_6)$. En posant $\lambda = IJ/CI$, écrire quatre autres égalités du même type pour en déduire $\mathcal{A}_3/\mathcal{A}_0$ en fonction de λ. Vérifier que $\lambda = \frac{1-2p}{p}$ et conclure que: $\text{Aire}\,(IJK)/\text{Aire}\,(ABC) = \frac{(1-2p)^2}{p^2-p+1}$.
Que devient ce rapport lorsque $p = 0$? $p = \frac{1}{2}$? $p = \frac{1}{3}$?

Exercice 8 (Cercle des neuf points)

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine euclidien $\mathcal{E}$. On note A_1, B_1, C_1 les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur les droites $(BC), (CA), (AB)$. On note A', B', C' les milieux respectifs des (B, C), (A, C), (A, B). On note G l'isobarycentre de (ABC), O le centre du cercle circonscrit à (ABC) et Ω le centre du cercle circonscrit à $(A'B'C')$.

a) Montrer qu'il existe $A'', B'', C'' \in \mathcal{E}$ tels que A, B, C sont les milieux respectifs de (B'', C''), (A'', C'') et (A'', B''). Montrer que les hauteurs $(AA_1), (BB_1), (CC_1)$ de (ABC) sont les médiatrices des côtés du triangle $(A''B''C'')$; en déduire qu'elles sont concourantes en un point H (l'orthocentre).

b) Soit η l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Montrer que $\eta(A) = A', \eta(B) = B', \eta(C) = C'$, d'où $\eta(O) = \Omega$. Montrer que G est l'isobarycentre de $(A''B''C'')$, d'où $\eta(H) = O$. Conclure que G, H, O, Ω sont alignés et que Ω est le milieu de (O, H).

c) Soit π la projection orthogonale sur (BC). Montrer que $\pi(H) = A_1$, $\pi(O) = A'$, d'où $\Omega A_1 = \Omega A'$.

d) Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{A'\Omega}$; en déduire que, si A_2 désigne le milieu de (A, H), alors Ω est le milieu de (A', A_2).

e) Conclure que, pour tout triangle ABC, il existe un cercle (dit *cercle des neuf points du triangle*) passant par les milieux A', B', C' des côtés, les pieds A_1, B_1, C_1 des hauteurs, et les milieux A_2, B_2, C_2 des bipoints $(A, H), (B, H), (C, H)$, où H est l'orthocentre.

série d'exercices n° 8 : applications affines

Exercices préliminaires. Reprendre, lorsqu'elles sont mal connues, les preuves des résultats des sections 9 à 12 du polycopié de résumé sur les notions de base de la géométrie affine.

Exercice 1 *(translations, homothéties).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$.

a) Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, et a, b, c des réels fixés tels que $a + b + c \neq 0$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on note $\varphi(M)$ le barycentre de $\{(A, a), (B, b), (M, c)\}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ainsi définie est soit une homothétie (déterminer son centre et son rapport) soit une translation (déterminer son vecteur). Faire un dession illustrant le résultat précédent lorsque $\mathcal{E}$ est de dimension 2 pour $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ puis pour $(a, b, c) = (1, -1, 2)$.

b) Soient $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points distincts de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels fixés tels que $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on note $\varphi(M)$ le point M' défini par $\overrightarrow{OM'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_i M}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ainsi définie est soit une homothétie (déterminer son centre et son rapport) soit une translation (déterminer son vecteur).

Exercice 2 *(composée d'homothéties et théorème de Ménélaüs).* Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ tels que soient définis les réels:

$$\alpha = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \quad \beta = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

On note η_1, η_2, η_3 les homothéties de centres respectifs A', B', C' et de rapports respectifs α, β, γ.

a) On pose $\varphi = \eta_1 \circ \eta_2 \circ \eta_3$. Vérifier que $\varphi(A') \in (A'B)$. Montrer que, si A', B', C' sont alignés sur une même droite $\mathcal{D}$, alors $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. En déduire qu'alors $\varphi(A') = A'$ et calculer $\alpha\beta\gamma$.

b) Supposons que $\alpha\beta\gamma = 1$. Montrer que $\eta_2 \circ \eta_3$ est une homothétie dont le centre appartient à $(B'C')$. En déduire que $A' \in (B'C')$.

c) Conclure que A', B', C' sont alignés si et seulement si $\alpha\beta\gamma = 1$.

Exercice 3 *(projections affines, homothéties, théorème de Thalès, théorème de Pappus).*

a) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'un plan affine $\mathcal{E}$, sécantes en un point C. Soient A, B deux points de $\mathcal{D}$, et A', B' deux points de $\mathcal{D}'$. Montrer qu'il existe deux homothéties ϑ et ϑ' de même centre C telles que $\vartheta(A) = B$ et $\vartheta'(A') = B'$; quels sont leurs rapports ? En introduisant la projection affine π sur $\mathcal{D}'$ parallèlement à la droite (AA'), démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes:

$$\text{(i)} \quad (AA') \,/\!/\, (BB') \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{B'C}} \qquad \text{(iii)} \quad \vartheta = \vartheta'$$

b) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes du plan affine $\mathcal{E}$. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois point de $\mathcal{D}'$. Montrer que si $(AB') \,/\!/\, (BA')$ et $(BC') \,/\!/\, (CB')$, alors $(AC') \,/\!/\, (CA')$.

Exercice 4 *(Homothéties, translations, théorème de Desargues).*

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun dont les côtés sont deux à deux strictement parallèles [avec $(AB) \,/\!/\, (A'B')$, $(BC) \,/\!/\, (B'C')$ et $(CA) \,/\!/\, (C'A')$]. Montrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourrantes ou parallèles.

Indication: Si (AA') et (BB') se coupent en un point O, montrer qu'il existe une homothétie ϑ de centre O telle que $\vartheta(A) = A'$ et $\vartheta(B) = B'$. Vérifier qu'alors $\vartheta(C) = C'$ et conclure que (AA'),

(BB') et (CC') sont concourrantes. Si $(AA') \,//\, (BB')$, reprendre un raisonnement de même nature avec des translations au lieu d'homothéties.

Exercice 5 *(applications affines et alignement).* Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur $\mathbb{R}$ (supposé de plus euclidien pour la dernière question).

a) Montrer qu'une application affine conserve l'alignement. Montrer que, $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère cartésien, l'application $M(x,y) \mapsto M'(x^3,0)$ conserve l'alignement mais n'est pas affine.

b) Soient A et B deux points distincts fixés de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui envoie tout point M non aligné avec A et B sur le centre de gravité du triangle (ABM).

c) Soient A et B deux points distincts fixés de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il n'existe pas d'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui envoie tout point M non aligné avec A et B sur l'orthocentre du triangle (ABM) (construire un contre-exemple).

Exercice 6 *(projections affines).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Soit E son espace vectoriel directeur. Soit φ une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que φ n'est pas constante mais $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est constante sur $\mathcal{E}$. On note A le point tel que $\varphi^2(M) = A$ pour tout $M \in \mathcal{E}$.

a) Montrer que l'application linéaire f associée à φ vérifie $f \neq O$ et $f^2 = O$ dans $\operatorname{End} E$. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ avec $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

b) Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants de φ. Montrer qu'il existe au moins un point B dont l'image $C = \varphi(B)$ est différente de A. Montrer que les trois points A, B, C sont non-alignés. Montrer que l'image par φ de l'espace $\mathcal{E}$ est égale à la droite (AC).

c) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(M) = A$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et déterminer son sous-espace vectoriel directeur. En déduire que $\mathcal{P}$ est un plan affine contenant la droite (AC) et ne contenant pas le point B.

d) Soit π la projection affine sur la droite (AB) parallèlement au plan $\mathcal{P}$, et soit π' la projection affine sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite (BC). Démontrer que $\varphi = \pi' \circ \pi$.

Exercice 7 *(affinités).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel directeur E. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E, un point O de $\mathcal{E}$, et l'on considère le repère $(O, \mathcal{B})$ de $\mathcal{E}$. Toutes les coordonnées et équations de sous-espaces sont relatives à ce repère. On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point $M(x,y,z)$ associe $M' = \varphi(M)$ dont les coordonnées (x', y', z') sont:

$$\begin{cases} x' &= 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' &= -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' &= 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}.$$

a) Montrer que l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par φ est un plan affine $\mathcal{P}$. Montrer qu'il existe une droite vectorielle Δ de E que l'on déterminera telle que $\overrightarrow{M\varphi(M)} \in \Delta$ pour tout $M \in \mathcal{E}$.

b) On note π la projection affine sur $\mathcal{P}$ parallèlement à Δ. Montrer que $\overrightarrow{M\pi(M)} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{M\varphi(M)}$.

c) En déduire qu'il existe un unique réel λ, que l'on déterminera, tel que l'on ait pour tout point $M \in \mathcal{E}$ l'égalité: $\overrightarrow{\pi(M)\varphi(M)} = \lambda\,\overrightarrow{\pi(M)M}$. Qu'en conclure pour φ ?

Exercice 8 *(centre du groupe affine).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ le groupe affine de $\mathcal{E}$ et $T(\mathcal{E})$ le sous-groupe abélien des translations.

a) Montrer que, pour toute translation $\tau_{\vec{u}}$ de $\mathcal{E}$ et toute $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$, la conjuguée $\varphi^{-1} \circ \tau_{\vec{u}} \circ \varphi$ est une translation $\tau_{\vec{v}}$. Que signifie cette propriété en termes de théorie des groupes ? Dans le cas où φ est une homothétie (de centre A et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$), exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{u}$ et λ. Déterminer le centralisateur dans $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ du sous-groupe $T(\mathcal{E})$ [i.e. par définition le sous-groupe des applications $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$ telles que $\varphi \circ \tau = \tau \circ \varphi$ pour toute $\tau \in T(\mathcal{E})$].

b) Soit η une homothétie (de centre A et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$). Pour toute $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$, déterminer la conjuguée $\varphi^{-1} \circ \eta \circ \varphi$. Déterminer le centre $\mathcal{Z}$ du groupe $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

série d'exercices n° 9 : isométries affines

I. Isométries affines du plan

Exercices préliminaires. Reprendre les preuves de tous les résultats des sections 3 à 6 du polycopié de résumé sur les isométries du plan, en particulier ceux relatifs
- à la description des translations, rotations, réflexions et symétries glissées,
- à la composition de ces différents types,
- à la classification par les ensembles de points fixes,
- à l'engendrement du groupe des isométries par les réflexions.

Exercice 1. *(Détermination d'une isométrie par l'image d'une base affine)*

a) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Soient ABC un triangle non aplati de $\mathcal{E}$. Soient A', B', C' trois points de $\mathcal{E}$ tels que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $C'A' = CA$. Montrer que $A'B'C'$ est un triangle non aplati et qu'il existe une unique isométrie de $\mathcal{E}$ qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.

b) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie n. Soient $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ une base affine de $\mathcal{E}$. Soient $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ une famille de $n+1$ points de $\mathcal{E}$ telle que $A_iA_j = B_iB_j$ pour tous $0 \leq i, j \leq n$. Montrer que $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ est une base affine de $\mathcal{E}$ et qu'il existe une unique isométrie affine de $\mathcal{E}$ qui envoie A_i sur B_i pour tout $0 \leq i \leq n$.

Exercice 2. *(Forme réduite d'une isométrie)*

a) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. En utilisant la classification des isométries de $\mathcal{E}$, vérifier que toute isométrie affine φ de $\mathcal{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi = \tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$ où φ_0 est une isométrie admettant des points fixes et τ est une translation de $\mathcal{E}$. Vérifier que le vecteur de τ appartient au sous-espace vectoriel directeur du sous-espace affine des points fixes de φ_0.

b) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie n, d'espace vectoriel directeur E. Soient φ une isométrie affine de $\mathcal{E}$, et f l'isométrie vectorielle de E associée. Montrer que $V = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $W = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E. Fixons $A \in \mathcal{E}$ et décomposons $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{u} \in V$ et $\overrightarrow{w} \in W$; notons τ la translation de $\mathcal{E}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ et posons $\varphi_0 = \tau^{-1} \circ \varphi$. Montrer que $\tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$. Montrer que $\overrightarrow{A\varphi_0(A)} \in W$; en déduire qu'il existe un unique point $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{A\varphi_0(A)} = f(\overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BA}$. Montrer que B est un point fixe de $\mathcal{E}$.

Conclure que: toute isométrie affine φ de $\mathcal{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi = \tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$ où φ_0 est une isométrie admettant des points fixes et τ est une translation de $\mathcal{E}$; en outre, le vecteur de τ appartient au sous-espace vectoriel directeur du sous-espace affine des points fixes de φ_0.

Exercice 3. *(Groupes d'isométries laissant globalement invariante une partie du plan)*

a) Pour toute partie $\mathcal{X}$ du plan affine euclidien $\mathcal{E}$, montrer que l'ensemble $G_{\mathcal{X}}$ des isométries affines de $\mathcal{E}$ laissant $\mathcal{X}$ globalement invariante est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$. En notant $G_{\mathcal{X}}^+ = G_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ et $G_{\mathcal{X}}^- = G_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{Is}^-(\mathcal{E})$, montrer que $G_{\mathcal{X}}^+$ est un sous-groupe de $G_{\mathcal{X}}$, et que l'ensemble $G_{\mathcal{X}}^-$ est soit vide, soit en bijection avec $G_{\mathcal{X}}^+$.

b) Montrer que si $\mathcal{X}$ est fini, alors l'isobarycentre des points de $\mathcal{X}$ est un point fixe de toute isométrie appartenant à $G_{\mathcal{X}}$.

c) Déterminer $G_{\mathcal{X}}$ lorsque : **(i)** $\mathcal{X}$ est un singleton formé d'un point de $\mathcal{E}$, **(ii)** $\mathcal{X}$ est une droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$, **(iii)** $\mathcal{X}$ est la réunion de deux droites sécantes dans $\mathcal{E}$ (distinguer suivant qu'elles sont ou non perpendiculaires), **(iv)** $\mathcal{X}$ est la réunion de deux droites strictement parallèles dans $\mathcal{E}$

d) Déterminer $G_{\mathcal{X}}$ lorsque $\mathcal{X}$ est un parallélogramme (distinguer suivant que c'est ou non un losange, un rectangle, un carré).

e) Déterminer $G_{\mathcal{X}}$ lorsque $\mathcal{X}$ est un polygone régulier à n sommets (avec $n \geq 3$).

Exercice 4. *(Sous-groupes finis du groupe des isométries du plan)*

On se propose de montrer que : *tout sous-groupe fini du groupe* $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ *des isométries d'un plan affine euclidien est cyclique ou diédral.*

Plus explicitement, cela signifie que, pour tout groupe fini G de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$, il existe un entier n tel que $G \simeq C_n$ (auquel cas $n = |G|$) ou $G \simeq D_n$ (auquel cas $|G|$ est pair et $n = |G|/2$).

a) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$, d'ordre n, que l'on suppose ici inclus dans $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$. Montrer que G est cyclique engendrée par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$, où O désigne l'isobarycentre de l'ensemble fini $\mathcal{X}_A = \{\varphi(A)\,;\,\varphi \in G\}$ pour $A \in \mathcal{E}$ arbitrairement choisi.

b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ tel que $G^- = G \cap \mathrm{Is}^-(\mathcal{E})$ contienne au moins un élément σ. Montrer que, si l'on note n l'ordre de $G^+ = G \cap \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$, alors il existe un point O et une droite affine $\mathcal{D}$ passant par O tels que G^+ est cyclique engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $2\pi/n$, et G est engendré par ρ et σ.

Exercice 5. *(Conservation de la distance et applications affines)*

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, d'espace vectoriel directeur E. Soit φ une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ conservant la distance. Fixons $A \in \mathcal{E}$ et considérons l'application $f : E \to E$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe $f(\overrightarrow{u}) := \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)}$, où M désigne le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.

Montrer que l'application f ainsi construite vérifie $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ et $\|f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, puis $f(\overrightarrow{u}) \cdot f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$; en déduire que f est linéaire.

Conclure que, s'il est d'usage de définir une isométrie affine de $\mathcal{E}$ comme une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ conservant la distance, on peut dans cette définition omettre le mot "affine".

Exercice 6. *(Points fixes communs à un sous-groupe d'isométries)*

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, G un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ et $G^+ = G \cap \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$. On considère les trois assertions: (i) tout élément de G admet (au moins) un point fixe ; (ii) il existe (au moins) un point fixe commun à tous les élements de G ; (iii) il existe (au moins) un point fixe commun à tous les éléments de G^+. Il est clair que $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

a) On suppose que l'on a (ii) ; on note $\mathcal{V}$ l'ensemble des points fixes communs à tous les éléments de G^+. Montrer que $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Vérifier que, pour tous $\varphi \in G^+$ et $\psi \in G \setminus G^+$, on a $\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi \in G^+$, et en déduire que $\mathcal{V}$ est stable par ψ. En déduire que toute isométrie $\theta \in G$ stabilise $\mathcal{V}$ et se restreint en une isométrie $\theta' \in \mathrm{Is}(\mathcal{V})$ de $\mathcal{V}$. Montrer que, si ψ et η sont deux isométries dans $G \setminus G^+$, alors $\eta = \psi \circ \varphi$ pour un certain $\varphi \in G^+$; vérifier qu'alors $\eta' = \psi'$ et $\psi \circ \psi' = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$; en déduire que ψ admet des points fixes dans $\mathcal{V}$. Conclure que $(ii) \Rightarrow (iii)$.

b) On suppose que l'on a (i) et que $\mathcal{E}$ est de dimension 2. Vérifier que, pour toutes $\rho_1, \rho_2 \in G^+$, l'isométrie $\tau = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1}$ est une translation. En déduire que G^+ est abélien. En déduire que le centre de toute rotation $\rho_1 \in G^+$ distincte de $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est un point fixe de toute autre rotation $\rho_2 \in G^+$. Conclure que, en dimension 2, $(i) \Rightarrow (ii)$.

Exercice 7. *(Similutudes)*

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien de plan vectoriel directeur E. On généralise la notion d'isométrie en appelant similitude de $\mathcal{E}$ toute application affine φ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ pour laquelle il existe un réel $k > 0$ tel que φ multiplie les distances par k [i.e. $\varphi(M)\varphi(N) = k\,MN$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$]. Une similitude est directe si le déterminant de son application linéaire associée est positif.

a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Sim}(\mathcal{E})$ des similitudes de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathcal{E})$ contenant $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ et l'ensemble $\mathrm{Sim}^+(\mathcal{E})$ des similitudes directes de $\mathcal{E}$ comme sous-groupes normaux.

b) Soit φ une similitude directe de $\mathcal{E}$ qui n'est pas une isométrie (i.e. de rapport $k \neq 1$). Montrer que φ s'écrit de façon unique $\varphi = \rho \circ \vartheta = \vartheta \circ \rho$ où ϑ et ρ sont respectivement une homothétie de rapport k et une rotation, de même centre.

c) Montrer que la détermination complexe d'une similitude directe est de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et reprendre en détail les exercices 3 et 4 de la série d'exercices n° 6.

II. Isométries affines de l'espace

Exercice 8 *(Déplacement).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3, d'espace vectoriel associé E. On fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$. Soit φ l'application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnés (x', y', z') associe $\varphi(M) = M'$ dont les coordonnées (x', y', z') sont:

$$x' = -z - 2, \qquad y' = -x + 1, \qquad z' = y + 1.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme affine sans points fixes, dont l'application linéaire associée $f \in \operatorname{End} E$ est une rotation vectorielle de E dont on déterminera l'axe Δ et l'angle θ (moyennant le choix d'une orientation de Δ). En déduire que $\varphi \in \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$.

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{M\varphi(M)} \in \Delta$. Montrer qu'il existe $\overrightarrow{u} \in \Delta$ tel que $\overrightarrow{M\varphi(M)} = \overrightarrow{u}$ pour tout $M \in \mathcal{D}$. En notant τ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{E}$ et $\rho = \tau^{-1} \circ \varphi$, montrer que ρ est la rotation affine d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ; conclure que φ est un vissage.

Exercice 9 *(Déplacement).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3, d'espace vectoriel associé E. On fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$. Soit φ l'application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnés (x', y', z') associe $\varphi(M) = M'$ dont les coordonnées (x', y', z') sont :

$$x' = -x + 2, \qquad y' = z + 1, \qquad z' = y + 1.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme affine sans points fixes. Exprimer pour tout point $M \in \mathcal{E}$ la distance $M\varphi(M)$ en fonction des coordonnées de M, déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M pour lesquels cette distance est minimale, et montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ stable par φ.

2) Déterminer $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{M\varphi(M)} = \overrightarrow{u}$ pour tout $M \in \mathcal{D}$. Conclure que φ est un vissage.

Exercice 10 *(Déplacement).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3, d'espace vectoriel associé E. On fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$. Soit φ l'application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnés (x', y', z') associe $\varphi(M) = M'$ dont les coordonnées (x', y', z') sont :

$$x' = \tfrac{1}{3}(-2x - 2y + z + 1), \qquad y' = \tfrac{1}{3}(-2x + y - 2z + 2), \qquad z' = \tfrac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1).$$

Montrer que φ est un vissage dont on déterminera l'axe, l'angle, le vecteur.

Exercice 11 *(Antidéplacement).* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel associé E. On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

1) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on considère $f_{a,b} \in \operatorname{End} E$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est:

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+b & -4a & 0 \\ -4a & -3a+b & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

1) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $f_{a,b} \in \mathrm{GL}(E)$? $f_{a,b} \in \mathrm{O}(E)$? Pour $a = \frac{1}{5}$ et $b = 0$, montrer que $f_{1/5,0}$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de E.

2) Soit φ l'application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnés (x', y', z') par rapport à $\mathcal{R}$ associe $\varphi(M) = M'$ dont les coordonnées (x', y', z') sont définies par:

$$x' = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y + 4, \qquad y' = -\tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y - 3, \qquad z' = z.$$

[a] Montrer que $\varphi \in \mathrm{Is}^-(\mathcal{E})$. **[b]** Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par O et dirigé par le plan vectoriel de base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$; montrer que $\mathcal{P}$ est globalement invariant par φ. On note ψ la restriction de φ à $\mathcal{P}$. Déterminer l'unique droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ et l'unique vecteur non-nul $\overrightarrow{v}$ de la droite vectorielle Δ dirigeant $\mathcal{D}$ tels que $\psi = \psi_0 \circ \tau_{\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \psi_0$ où ψ_0 désigne la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{P}$. **[c]** Soit $\mathcal{F}$ le plan affine contenant la droite $\mathcal{D}$ et dirigé par le plan vectoriel F de base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$. Déterminer l'unique vecteur $\overrightarrow{u} \in F$ tel que $\varphi = \sigma_{\mathcal{F}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma_{\mathcal{F}}$ où $\sigma_{\mathcal{F}}$ désigne la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$.

Exercice 12 *(Groupe du tétraèdre).* Dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, on considère l'ensemble $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ des sommets d'un tétraèdre régulier. On note O l'isobarycentre des points de $\mathcal{X}$. Pour tout $1 \leq i \leq 4$, la droite (OA_i) coupe la face opposée au sommet A_i en son centre de gravité (pourquoi ?) et on note ρ_i la rotation d'axe (OA_i) et d'angle $2\pi/3$. Notons par ailleurs α, β, γ les demi-tours (rotations d'angle π) d'axes respectifs la droite $\mathcal{D}$ passant par les milieux de $[A_1A_2]$ et $[A_3A_4]$, la droite $\mathcal{D}'$ passant par les milieux de $[A_1A_3]$ et $[A_2A_4]$, et la droite $\mathcal{D}''$ passant par les milieux de $[A_1A_4]$ et $[A_2A_3]$.

1) Montrer que l'ensemble G des isométries de $\mathcal{E}$ laissant stable (globalement) l'ensemble $\mathcal{X}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$. En déduire que $G^+ = G \cap \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ en est un sous-groupe, et que G^+ est en bijection avec l'ensemble $G^- = \mathrm{Is}^- \cap \mathrm{Is}(\mathcal{E})$.

2) Montrer que G^+ contient le sous-ensemble H des 12 isométries $\alpha, \beta, \gamma, \rho_1, \rho_1^2, \rho_2, \rho_2^2, \rho_3, \rho_3^2, \rho_4, \rho_4^2$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$. En déduire que $|G| \geq 24$.

3) Soit $g : G \to S_4$ l'application définie par la restriction de toute isométrie $\varphi \in G$ à la permutation qu'elle induit entre les 4 sommets A_1, A_2, A_3, A_4. Montrer que g un morphisme de groupes injectif. En déduire que G est isomorphe au groupe symétrique S_4 et que $G^+ = H$ est isomorphe au groupe alterné A_4. Décrire géométriquement chacune des isométries $g^{-1}(\sigma)$ lorsque σ décrit S_4.

Exercice 13. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3, d'espace vectoriel directeur E. On fixe $\overrightarrow{w} \in E$ non-nul et on note τ la translation de $\mathcal{E}$ de vecteur $\overrightarrow{w}$. On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des déplacements $\varphi \in \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ tels que $\varphi = \tau \circ \varphi \circ \tau$.

1) Montrer que $\varphi \in \mathcal{A}$ si et seulement l'application linéaire f associée à φ vérifie $f(\overrightarrow{w}) = -\overrightarrow{w}$.
2) Montrer qu'une application $f \in \mathrm{O}^+(\mathcal{E})$ vérifie $f(\overrightarrow{w}) = -\overrightarrow{w}$ si et seulement si f est une rotation d'angle π et d'axe Δ inclus dans le plan $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{w}\}^\perp$. En déduire l'ensemble $\mathcal{A}$.

Exercice 14 *(Décomposition d'un déplacement en produit de symétries par rapport à des droites).* Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel associé E, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{\imath}$ et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par $A(0,0,a)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\imath} + \sin\alpha\,\overrightarrow{\jmath}$, où $a, \alpha \in \mathbb{R}$ fixés. Soient φ_1, φ_2 les symétries orthogonales par rapport aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et $f_1, f_2 \in \mathrm{O}(E)$ leurs applications linéaires associées. On pose $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ et $f \in \mathrm{O}(\mathcal{E})$ l'application linéaire associée.

1) Ecrire la matrice M_1 de f_1 dans la base $\mathcal{B}$. En posant $\overrightarrow{v} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{\imath} + \cos\alpha\,\overrightarrow{\jmath}$, montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe de E ; écrire la matrice de f_2 dans la base $\mathcal{B}'$, puis la matrice M_2 de f_2 dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $M = I_3$? Quelle est alors la nature de φ ? Montrer que lorsque $M \neq I_3$, f est une rotation d'axe la droite vectorielle Δ engendrée (et orientée) par $\overrightarrow{k}$ et d'angle 2α. Quel est dans ce cas la nature de φ ?

2) Montrer que $\varphi(O)$ a pour coordonnées $(0,0,2a)$. En déduire les coordonnées (x', y', z') de $\varphi(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) de M. Montrer que, si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, alors φ est une translation (déterminer son vecteur). Montrer que, si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, alors φ est un vissage (déterminer son axe, son angle, son vecteur) ; dans quel cas est-ce une rotation ?

3) Déduire des questions précédentes que tout déplacement $\varphi \in \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites, en indiquant comment choisir ces droites en fonction de la nature de φ.

Exercice 15 *(Isométries échangeant deux droites non coplanaires).* Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non coplanaires d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, d'espace vectoriel associé E. Soit $\mathcal{D}$ la droite de $\mathcal{E}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$; on note $\{A_1\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}$ et $\{A_2\} = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}$.
Soit $\varphi \in \mathrm{Is}(\mathcal{E})$ telle que $\varphi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$ et $\varphi(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_1$. Soit $f \in \mathrm{O(E)}$ son application linéaire associée. Montrer que $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, $\varphi(A_1) = A_2$ et $\varphi(A_2) = A_1$. En déduire que φ admet un point fixe O. Déterminer φ, en distinguant suivant que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont ou non orthogonales.

série d'exercices n° 10 : Courbes paramétrées du plan

Exercice 1. *(Un exemple introductif).* Etudier la courbe définie par les équations paramétriques :

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t+1}, \qquad y(t) = \frac{t\,\mathrm{e}^t}{t+1}.$$

On montrera en particulier qu'elle admet un point limite, une asymptote et une branche parabolique que l'on déterminera. On précisera les tangentes aux points obtenus pour les valeurs 0 et 1 du paramètre, et on précisera la position de la courbe par rapport à ces tangentes. La courbe admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 2. *(Etude locale en un point).* Pour chacune des quatre courbes suivantes, déterminer si le point M_0 correspondant à la valeur t_0 donnée du paramètre est un point réculier ou singulier, et déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de M_0:

a) étude locale en $t_0 = 0$ pour $x(t) = t^3 + t^4$ et $y(t) = t^6$;

b) étude locale en $t_0 = 0$ pour $x(t) = \mathrm{e}^t - t$ et $y(t) = \cos t - \frac{t^3}{6}$;

c) étude locale en $t_0 = 1$ pour $x(t) = t - t^2$ et $y(t) = t^3$;

d) étude locale en $t_0 = 0$ pour $x(t) = \frac{t^2}{t-1}$ et $y(t) = \frac{t^3}{t-1}$.

Exercice 3. *(Détermination de points doubles).* Montrer que la courbe plane paramétrée par:

$$x(t) = t + 1 + \tfrac{1}{t-1}, \qquad y(t) = t^2 + 1 + \tfrac{1}{t},$$

admet un unique point double, que l'on déterminera.

Exercice 4. *(Quelques exemples classiques).* Etudier et tracer les courbes paramétrées suivantes:

a) Cardioïde: $x(t) = (1 + \cos t)\cos t$, $y(t) = (1 + \cos t)\sin t$.

b) Astroïde: $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, avec $a > 0$ fixé.

c) Strophoïde droite: $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y(t) = t\,\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

d) Lemniscate de Bernouilli: $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$, $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.

e) Folium de Descartes : $x(t) = \frac{1}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$.

Exercice 5. *(Longueur d'un arc de courbe).* Dans chacun des deux cas suivants, montrer que l'arc de courbe considéré est rectifiable et calculer sa longueur.

a) Astroïde (voir ci-dessus) pour $t \in [0, \pi]$.

b) Arche de cycloïde, paramétrée par: $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 6. *(Courbes en coordonnées polaires).* Dans chacun des cas suivants, étudier (intervalle d'étude, points limites et branches infinies, points multiples, études locales éventuelles,...) et tracer les courbes données par leur représentation en coordonnées polaires:

a) Cardioïde : $\rho = a(1 + \cos\theta)$, avec $a > 0$ réel fixé. Calculer de plus la longueur de la courbe.

b) Spirale logarithmique: $\rho = a\mathrm{e}^{\lambda\theta}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés.

c) Courbe d'équation polaire: $\rho = \frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$.

d) Courbe d'équation polaire: $\rho = 1+2\cos 3\theta$. Calculer de plus l'aire de la portion de plan comprise entre une petite boucle et une grande boucle de la courbe.

série d'exercices n° 11 : Coniques

On se place dans tous les exercices dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}$.

Exercice 1. *(Paraboles semblables, paraboles isométriques).*

1) Soit $\mathcal{P}$ une parabole, de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. On note $p = d(F, \mathcal{D})$ son paramètre et S son sommet. Montrer que, pour toute similitude σ du plan, $\sigma(\mathcal{P})$ est la parabole de foyer $\sigma(F)$ et de directrice $\sigma(\mathcal{D})$; montrer que son sommet est $\sigma(S)$ et que son paramètre est λp où λ désigne le rapport de la similitude σ.

2) Montrer que deux paraboles quelconques sont semblables. *Indication :* on montrera plus précisément que, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont deux paraboles quelconques, il existe exactement deux similitudes (l'une directe, l'autre indirecte) transformant $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}_1$, que si σ désigne l'une d'elles, l'autre est $\sigma \circ s$ avec s la réflexion par rapport à l'axe de $\mathcal{P}$, et que les deux similitudes sont de même rapport $\lambda = p_1 p^{-1}$ (rapport des paramètres des deux paraboles).

3) En déduire que deux paraboles sont isométriques si et seulement si elles ont le même paramètre, et que le groupe des isométries du plan conservant une parabole donnée se réduit à $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et la réflexion s par rapport à son axe.

Exercice 2. *(Tangentes à une parabole)*

On fixe une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, S le sommet de $\mathcal{P}$ (milieu de (K, F)), $p = FK$ le paramètre de $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ l'axe focal (droite orthogonale en K à $\mathcal{D}$, passant donc par S et F).
Soit $\mathcal{R} = (S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$ dont l'origine est S, tel que $\vec{\imath}$ dirige $\mathcal{A}$ avec $F(\frac{p}{2}, 0)$, et tel que $\vec{\jmath}$ dirige $\mathcal{D}$, de sorte qu'une équation de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$ est $x = -\frac{p}{2}$.
Rappeler la forme d'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$, ainsi qu'une paramétrisation naturelle de $\mathcal{P}$ (les deux pourront être utilise suivant les cas dans les questions qui suivent).

1) *(Tangente et normale en un point).* Montrer que, en tout point $M(\alpha, \beta)$ de $\mathcal{P}$, la parabole $\mathcal{P}$ admet une tangente $\mathcal{T}_M$ qui est la droite d'équation $px - \beta y + p\alpha = 0$, et une unique normale $\mathcal{N}_M$ qui est la droite d'équation $\beta x + py - p\beta - \beta\alpha = 0$.

2) *(Description géométrique de la tangente).* Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{P}$, la tangente $\mathcal{T}_M$ est la médiatrice de (F, M'), où M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Montrer que de plus, si $M \neq S$, la tangente $\mathcal{T}_M$ est la bissectrice intérieure en M du triangle isocèle $M'MF$. Montrer que, si l'on appelle T le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}_M$, alors le triangle MFT est rectangle en F.

3) En déduire que l'ensemble des images de F par toutes les réflexions par rapport aux tangentes à $\mathcal{P}$ est la droite $\mathcal{D}$, et que l'ensemble des images de F par toutes les projections orthogonales sur les tangentes à $\mathcal{P}$ est la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par S.

4) *(Tangentes passant par un point donné du plan).* Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{P}$. Montrer que, si M est intérieur à $\mathcal{P}$ (i.e. $y^2 < 2px$) , il n'existe aucune tangente à $\mathcal{P}$ passant par M. Montrer que, si M est sur $\mathcal{P}$ (i.e. $y^2 = 2px$), la droite $\mathcal{T}_M$ est l'unique tangente à $\mathcal{P}$ passant par M. Montrer que, si M est extérieur à $\mathcal{P}$ (i.e. $y^2 > 2px$) , il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par M.

5) *(Intersection de l'axe focal avec la tangente et la normale en un point).* Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de S. Montrer que la normale $\mathcal{N}_M$ coupe l'axe focal $\mathcal{A}$ en le point N tel que $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{M'M}$ (où M' désigne toujours le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$). Montrer que $\mathcal{T}_M$ coupe $\mathcal{A}$ en le point L tel que $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{M'M}$. En déduire que $M'MNF$ est un parallélogramme et que $M'MFL$ est un losange. Montrer que F est le milieu de (L, N) et que M appartient au cercle de diamètre $[L, N]$.

Exercice 3. *(Equation réduite de l'hyperbole).*

On fixe une droite $\mathcal{D}$, un point F n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, un réel $e > 1$. On considère l'hyperbole

$$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E}\,;\, MF = e\,d(M, \mathcal{D})\}$$

de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$, et d'excentricité e.

On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, $p = e\,FK = e\,d(F, \mathcal{D})$ le paramètre de $\mathcal{H}$, et $A = \mathrm{Bar}\{(F, 1), (K, e)\}$ et $A' = \mathrm{Bar}\{(F, 1), (K, -e)\}$ les sommets de $\mathcal{H}$. On note $\Delta = (AA')$.

1) *Construction géométrique "point par point".* Soit H un point quelconque de $\mathcal{D}$. Soient B et B' les projetés respectifs de A et A' sur la droite (FH) parallèlement à $\mathcal{D}$. Soient M et M' les points d'intersection du cercle de diamètre $[B, B']$ avec la parallèle à Δ passant par H. Montrer que M et M' sont les points de $\mathcal{H}$ se projetant en H orthogonalement sur $\mathcal{D}$.

2) *Equation réduite.* On pose:

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad \text{et} \quad c = ea = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

a) Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{\imath} = \frac{1}{KF}\overrightarrow{KF}$ et $\overrightarrow{OF} = c\,\overrightarrow{\imath}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) par rapport au repère $\mathcal{R}$ vérifient: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

b) En déduire les coordonnées de F et des sommets A et A'; montrer que O est le milieu de (A, A'); donner des équations dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}$.

c) Montrer que, si l'on appelle s la symétrie centrale de centre O, alors $\mathcal{H}$ est encore égale à l'hyperbole de foyer $F' = s(F)$ et de directrice associée $\mathcal{D}' = s(\mathcal{D})$.

d) Montrer que $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E}\,;\, |MF - MF'| = 2a\}$ (définition bifocale).

e) Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$, où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont les intersections respectives de $\mathcal{H}$ avec le demi-plan $\mathcal{E}_1$ de frontière $\mathcal{D}$ contenant F et le demi-plan $\mathcal{E}_2$ de frontière $\mathcal{D}'$ contenant F'. Monter que $t \mapsto (a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t)$ définit lorsque t décrit $\mathbb{R}$ un paramétrage bijectif de $\mathcal{H}_1$. Donner un paramétrage analogue pour $\mathcal{H}_2$.

f) Montrer que $\mathcal{H}$ admet deux asymptotes dont on déterminera les équations dans $\mathcal{R}$, et que ces dernières sont orthogonales si et seulement si l'excentricité e vaut $\sqrt{2}$ (hyperbole équilatère).

On pose $\overrightarrow{u} = \frac{a}{c}\overrightarrow{\imath} - \frac{b}{c}\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = \frac{a}{c}\overrightarrow{\imath} + \frac{b}{c}\overrightarrow{\jmath}$. Montrer qu'une équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est: $XY = \frac{c^2}{4}$.

Exercice 4. *(Ellipse déduite de cercles par affinité)*

Soient $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. Soient $a > b > 0$ deux réels fixés. Soient φ l'affinité orthogonale d'axe $(O, \overrightarrow{\imath})$ et de rapport $\frac{b}{a}$, et ψ l'affinité orthogonale d'axe $(O, \overrightarrow{\jmath})$ et de rapport $\frac{a}{b}$.

a) Pour tout point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, calculer les coordonnées de $\varphi(M)$ et $\psi(M)$.

b) On note $\mathcal{C}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans $\mathcal{R}$. Soient $\mathcal{C}_1$ son cercle principal et $\mathcal{C}_2$ son cercle secondaire de $\mathcal{C}$ (même centre O, rayons respectifs a et b). Montrer que $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{C}_1) = \psi(\mathcal{C}_2)$.

c) Pour tout $M_1 \in \mathcal{C}_1$, soient T_1 la tangente en M_1 au cercle $\mathcal{C}_1$ et T la tangente en $M = \varphi(M_1)$ à l'ellipse $\mathcal{C}$. Montrer que que T et T_1 sont parallèles ou sécantes en un point de l'axe des abscisses. Montrer de même que pour tout $M_2 \in \mathcal{C}_2$, la tangente T_2 en M_2 à $\mathcal{C}_2$ et la tangente T en $M = \psi(M_2)$ à $\mathcal{C}$ sont parallèles ou sécantes en un point de l'axe des ordonnées.

d) *Application au tracé de l'ellipse par la méthode dite "de la bande de papier".* On fixe un segment $[U, V]$ de longueur $a + b$ contenant un point M tel que $MV = a$ et $MU = b$. Montrer que, lorsque les extrémités U et V décrivent respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, alors M décrit l'ellipse $\mathcal{C}$. *Indication:* on pourra montrer que le point P défini par le fait que $OPMV$ soit un parallélogramme décrit le cercle principal $\mathcal{C}_1$.