Université Blaise Pascal,
U.F.R. Sciences et Technologies,
Département de Mathématiques et Informatique

version révisée novembre 2009

Préparation au CAPES de Mathématiques

Année 2008-2009

Isométries du plan, angles

François Dumas

1 Notion d'isométrie vectorielle

On fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E de dimension 2.

Définition. On appelle *isométrie vectorielle* de E, tout endomorphisme f de E conservant le produit scalaire, c'est-à-dire vérifiant:

$$f(\overrightarrow{u}) \cdot f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \quad \text{pour tous } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$$

Proposition. *Pour tout endomorphisme f de E, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est une isométrie vectorielle,*

(ii) *f conserve la norme (ce qui signifie que $||f(\overrightarrow{u})|| = ||\overrightarrow{u}||$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E$).*

Preuve. Il est clair que (i) implique (ii). La réciproque se déduit de l'égalité:

$$\tfrac{1}{2}(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}.$$ □

Théorème et définition. *Toute isométrie vectorielle f de E est une bijection de E sur E, et l'ensemble des isométries vectorielles est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E. On l'appelle le groupe orthogonal de E; on le note $O(E)$.*

Preuve. La caractérisation (ii) ci-dessus implique l'injectivité de f, qui équivaut en dimension finie à sa bijectivité. Le reste est clair. □

Rappelons qu'une matrice carrée M à coefficients réels est dite orthogonale lorsque elle est inversible et telle que $M^{-1} = {}^tM$. On peut alors énoncer:

Lemme. *Pour tout endomorphisme f de E, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est une isométrie vectorielle de E,*

(ii) *il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale,*

(iii) *pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.*

Preuve. Supposons (i). Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$. Soient $\overrightarrow{u} \in E$ un vecteur quelconque de E et (x, y) les composantes de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$. Les composantes de $f(\overrightarrow{u})$ dans la base $\mathcal{B}$ sont alors $(ax+cy, bx+dy)$. La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, l'égalité $||f(\overrightarrow{u})|| = ||\overrightarrow{u}||$ se traduit par l'égalité: $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)x^2 + (c^2 + d^2)y^2 + 2(ac + bd)xy$. Celle-ci devant être vérifiée pour tous réels x et y, on a nécessairement $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$. Ces égalités traduisent exactement l'égalité ${}^tMM = I$. Ceci prouve que (i) implique (iii). Les mêmes calculs prouvent que (ii) implique (i). D'où l'équivalence des trois assertions. □

Corollaire. *Pour toute isométrie vectorielle f de E, on a* $\det f = 1$ *ou* $\det f = -1$.

Preuve. L'égalité matricielle ${}^tMM = I$ implique $(\det f)^2 = 1$. □

Définitions et notations.

(i) On appelle isométrie vectorielle *directe* toute isométrie vectorielle f dont le déterminant est égal à 1. Il est clair par multiplicativité du déterminant que *les isométries directes forment un sous-groupe de $O(E)$*. On l'appelle le groupe spécial orthogonal, et on le note $O^+(E)$.

$$O^+(E) = O(E) \cap SL(E) = \{f \in O(E)\,;\, \det f = 1\} \text{ sous-groupe de } O(E).$$

(ii) On appelle isométrie vectorielle *indirecte* toute isométrie vectorielle f dont le déterminant est égal à -1. Leur ensemble est noté $O^-(E)$; ce n'est évidemment pas un sous-groupe de $O(E)$.

Remarque. Tous les résultats de ce paragraphe 1 restent en fait vrais pour E euclidien de dimension finie quelconque (adapter la preuve du lemme). Dans le cas où E est un plan, les éléments de $O^+(E)$ et $O^-(E)$ peuvent être explicitement décrits. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2 Réflexions et rotations vectorielles

On fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E de dimension 2.

Définition. Soit D est une droite vectorielle dans E ; tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ s'écrit de façon unique $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in D$ et $\overrightarrow{w} \in D^\perp$. Le vecteur $s_D(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ est appelé le *symétrique orthogonal* de $\overrightarrow{u}$ par rapport à D.
L'application $s_D : E \to E$ qui à tout vecteur associe son symétrique orthogonal par rapport à D est appelée la *symétrie orthogonale* par rapport à D, ou *réflexion vectorielle* d'axe D.

Figure

Proposition. *Toute réflexion vectorielle est une isométrie vectorielle. La bijection réciproque de la réflexion s_D est $s_D^{-1} = s_D$. L'ensemble des vecteurs fixés par s_D est égal à la droite D.*

Preuve. Soit $\overrightarrow{u}$ quelconque dans E. Décomposons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, avec $\overrightarrow{v} \in D$ et $\overrightarrow{w} \in D^\perp$. On a $\|s_D(\overrightarrow{u})\|^2 = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$ alors que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 + 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$. Mais $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 0$ puisque $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont par définition orthogonaux. D'où $\|s_D(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$, ce qui montre que $s_D \in O(E)$. Il est clair que $s_D \circ s_D = \mathrm{id}_E$. Enfin, $s_D(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ équivaut à $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, c'est-à-dire à $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, ce qui achève la preuve. □

Définition. On appelle *rotation* vectorielle de E toute composée de deux réflexions vectorielles.

Une rotation r est donc de la forme $r = s_D \circ s_{D'}$. Attention, dans cette écriture, il n'y a pas unicité des droites D et D'.

Remarquons que $r = \mathrm{id}_E$ si et seulement si $D = D'$.

Figure

Proposition. *Toute rotation vectorielle est une isométrie vectorielle. La bijection réciproque de la rotation $r = s_{D'} \circ s_D$ est la rotation $r^{-1} = s_D \circ s_{D'}$. L'ensemble des vecteurs fixés par r est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$ dès lors que $D \neq D'$.*

Preuve. Soient D et D' deux droites de E, et r la rotation $s_D \circ s_{D'}$. Il est clair que r est une isométrie comme composée de deux isométries, et que $r^{-1} = (s_D \circ s_{D'})^{-1} = s_{D'}^{-1} \circ s_D^{-1} = s_{D'} \circ s_D$. Soit maintenant $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. On a donc $s_D(\overrightarrow{u}) = s_{D'}(\overrightarrow{u})$. En décomposant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{w}'$ avec $\overrightarrow{v} \in D$, $\overrightarrow{w} \in D^\perp$, $\overrightarrow{v}' \in D'$ et $\overrightarrow{w}' \in D'^\perp$, on a $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}' - \overrightarrow{w}'$, d'où $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}'$, qui est donc un vecteur de D et de D'. Comme on a supposé que $D \neq D'$, on a $D \cap D' = \{\overrightarrow{0}\}$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}' = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}'$ qui appartient à $D^\perp \cap D'^\perp$. Mais on a de même $D^\perp \cap D'^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$, d'où le résultat. □

Proposition (matrice d'une réflexion ou d'une rotation dans une base orthonormée). *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit f une application linéaire de E dans E. Alors:*

(i) *f est une réflexion vectorielle si et seulement s'il existe deux réels a et b vérifiant $a^2+b^2=1$ tels que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ soit égale à $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$*

(ii) *f est une rotation vectorielle si et seulement s'il existe deux réels a et b vérifiant $a^2+b^2=1$ tels que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ soit égale à $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$*

Preuve. • Soit f une réflexion. Soit D son axe. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de D ; notons (α,β) les composantes de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme f est une isométrie, on a $\|f(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$, donc $\alpha^2+\beta^2=1$. Soit $\overrightarrow{w}$ le vecteur de composantes $(-\beta,\alpha)$. Il est unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{w}\in D^\perp$. Ainsi $\mathcal{B}'=(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une base orthonormée de E, et il est clair que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $S=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P=\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^2-\beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & -\alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

qui est de la forme voulue en posant $a=\alpha^2-\beta^2$ et $b=2\alpha\beta$, qui vérifient bien $a^2+b^2=(\alpha^2+\beta^2)^2=1$.

• Supposons maintenant qu'il existe deux réels a et b vérifiant $a^2+b^2=1$ tels que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$. On en déduit que la trace de f est nulle et que le déterminant de f vaut -1, donc le polynôme caractéristique de f est X^2-1. Ainsi f admet deux valeurs propres distinctes 1 et -1, et donc f est diagonalisable. Choisissons un vecteur unitaire $\overrightarrow{v}$ sur la droite propre $D=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$ et un vecteur unitaire $\overrightarrow{w}$ sur l'autre droite propre $D'=\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. Comme f est une isométrie, on a $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{v})\cdot f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\cdot(-\overrightarrow{w})$, ce qui implique que $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=0$, donc $D'=D^\perp$. On déduit que la matrice de f dans la base orthonormée $\mathcal{B}'=(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ de E est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Ceci prouve que f est la réflexion d'axe D.

• Supposons que f est une rotation. C'est la composée de deux réflexions. Il en résulte avec le point (i) qu'il existe des réels a,b,c,d vérifiant $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ tels que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ d & -c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$$

avec $\alpha=ac+bd$ et $\beta=ad-bc$, qui vérifient $\alpha^2+\beta^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$, ce qui montre le résultat.

• Supposons enfin qu'il existe deux réels a et b vérifiant $a^2+b^2=1$ tels que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $M=\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. On a $M=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ce qui, avec le point (i), montre que f est la composée de deux réflexions, et donc que f est une rotation. □

Théorème. *Les isométries directes du plan vectoriel E sont les rotations vectorielles. Les isométries indirectes du plan vectoriel E sont les réflexions vectorielles.*

Preuve. Il résulte de la proposition précédente que, dans une base orthonormée quelconque, toute rotation est de déterminant 1 et toute réflexion est de déterminant -1. Réciproquement, soit f une isométrie quelconque de E. Soit $M=\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. D'après le lemme du paragraphe 1, M est une matrice orthogonale. Donc $\det M = ad-bc=\varepsilon\in\{-1,1\}$ et $\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} d & -c \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) = M^{-1} = {}^tM = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, d'où $d=\varepsilon a$, $c=-\varepsilon b$, et $a^2+b^2=1$. Il suffit donc d'appliquer la proposition précédente pour conclure que f est une rotation si $\varepsilon=1$ et une réflexion si $\varepsilon=-1$. □

Observations.

• Il résulte du théorème ci-dessus que, dans le groupe $O(E)$ des isométries vectorielles du plan E, la composée d'un nombre pair de réflexions est une rotation, la composée d'un nombre impair de réflexions est une réflexion, la composé d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion, et la composée d'un nombre quelconque de rotations est une rotation. Plus précisément, les rotations vectorielles de E forment un sous-groupe de $O(E)$, qui n'est autre que le groupe $O^+(E)$ des isométries directes. On peut préciser ce dernier point.

• Il est bien connu que, si a et b sont des réels vérifiant $a^2+b^2=1$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$. La matrice d'une rotation dans une base orthonormée est donc de la forme

$$R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right), \quad \text{avec } \theta\in\mathbb{R} \text{ non unique, mais défini modulo } 2\pi$$

.

Si l'on considère pour deux réels quelconque θ et θ' les deux rotations r_θ et $r_{\theta'}$ de matrices respectives R_θ et $R_{\theta'}$ par rapport à une même base orthonormée, la matrice de $r_\theta \circ r_{\theta'}$ dans cette base est:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix},$$

et donc $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'} = r_{\theta'+\theta} = r_{\theta'} \circ r_\theta$. L'application $\mathbb{R} \to O^+(E)$ définie par $\theta \mapsto r_\theta$ est donc un morphisme de groupes, clairement surjectif, et dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$. On en déduit (premier théorème d'isomorphisme) que $O^+(E) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. A noter que, via le morphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ défini par $\theta \mapsto e^{i\theta}$, ce quotient est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1. On retiendra:

> *Le groupe $O^+(E)$ des rotations vectorielles du plan E est abélien, isomorphe au groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc au groupe des nombres complexes de module 1.*

• On peut préciser la remarque faite précédemment quant à la non-unicité de l'écriture d'une rotation comme composée de deux réflexions : *si r est une rotation vectorielle de E, alors, pour toute droite D, il existe une droite D' telle que $r = s_D \circ s_{D'}$ et une droite D'' telle que $r = s_{D''} \circ s_D$.*

Preuve. D'après la première observation ci-dessus, $s_D \circ r$ est une réflexion ; soit D' son axe. On a $s_D \circ r = s_{D'}$, d'où $r = s_D \circ s_{D''}$. De même D'' est l'axe de la réflexion $r \circ s_D$. □

On termine ce paragraphe par un dernier lemme, qui aura une très grande importance plus loin dans la définition des angles.

Lemme fondamental. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-nuls de même norme. Il existe une unique rotation vectorielle r de E telle que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.*

1. Preuve géométrique. Parce que $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$, les vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. Il en résulte que, si l'on appelle s la réflexion vectorielle d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, on a $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$. Donc, en notant s' la réflexion d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$, la rotation $r = s \circ s'$ vérifie $r(\overrightarrow{u}) = s(s'(\overrightarrow{u})) = s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.

Figure

Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux rotations r et r' telles que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} = r'(\overrightarrow{u})$. Posons $r'' = r^{-1} \circ r'$. C'est une rotation (composée de deux rotations), qui vérifie $r''(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ par construction et fixe donc un vecteur non-nul de E. On en déduit que $r'' = \mathrm{id}_E$, donc $r = r'$. □

2. Preuve analytique. Plaçons-nous dans une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient (x, y) les composantes de $\overrightarrow{u}$, et (x', y') celles de $\overrightarrow{v}$. On cherche à déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que: $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ et $a^2 + b^2 = 1$. Or le système $\left\{\begin{smallmatrix} xa - yb = x' \\ ya + xb = y' \end{smallmatrix}\right.$ a pour déterminant $x^2 + y^2 \neq 0$, donc il admet une unique solution donnée par les formules de Cramer : $a = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}$ et $b = \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$. Et l'on a alors : $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}{(x^2+y^2)^2} = 1$. D'où l'existence et l'unicité de la solution cherchée. □

On peut montrer de même qu'il existe aussi une unique réflexion s telle que $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.

3 Notion d'isométrie affine

On fixe un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension deux, de $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien associé E. On note d la distance dans $\mathcal{E}$; rappelons que $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ pour tous points A, B de $\mathcal{E}$.

Définition. Une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une *isométrie affine* si elle conserve la distance dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire vérifie:

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B) \quad \text{pour tous points } A, B \text{ de } \mathcal{E}.$$

Proposition. *Soit φ une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, d'application linéaire associée $f \in \operatorname{End} E$. Alors:*

- φ est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si f est une isométrie vectorielle de E.

- si φ est une isométrie affine, alors c'est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

Preuve. Supposons que $f \in O(E)$. Soient A, B deux points quelconques de $\mathcal{E}$; on a :

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\| = \|f(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B),$$

ce qui montre que φ est une isométrie affine. Réciproquement, supposons que φ est une isométrie affine. Soit $\overrightarrow{u} \in E$ quelconque ; il existe $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, donc:

$$\|f(\overrightarrow{u})\| = \|f(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\| = d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{u}\|,$$

et donc $f \in O(E)$. Le second point de la proposition est alors clair puisque toute isométrie vectorielle est une bijection de E sur E et que la bijectvivité d'une application affine équivaut à celle de son application linéaire associée. □

Remarque. Il est aussi possible de définir une isométrie affine comme une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ conservant la distance, et de démontrer ensuite que c'est une application affine.

Terminologie. Une isométrie affine de $\mathcal{E}$ est dite *directe* (respectivement *indirecte*) lorsque son application linéaire associée est une isométrie vectorielle directe (respectivement indirecte) de E. Une isométrie affine directe est aussi appelée un *déplacement*; une isométrie affine indirecte est aussi appelée un *antidéplacement*.

Théorème. *Les isométries affines de $\mathcal{E}$ forment un sous-groupe du groupe* $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ *des bijections affines de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$, noté* $\mathrm{Is}\,(\mathcal{E})$. *Les déplacements forment un sous-groupe de* $\mathrm{Is}\,(\mathcal{E})$, *noté* $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$. *Les antidéplacements forment un sous-ensemble de* $\mathrm{Is}\,(\mathcal{E})$ *qui n'est pas un groupe, noté* $\mathrm{Is}^-(\mathcal{E})$.

Preuve. Evident d'après la proposition précédente, et les propriétés des groupes $O(E)$ et $O^+(E)$. □

• *Exemple des translations.* Rappelons que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, la *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application $\tau_{\overrightarrow{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Rappelons aussi que : si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\tau_{\overrightarrow{u}} = \mathrm{id}_E$; si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\tau_{\overrightarrow{u}}$ n'admet aucun point fixe.

On sait (voir document CAPES sur la géométrie affine) que toute translation est une bijection affine d'application linéaire associée id_E (et même que l'on a la réciproque), et que les translations forment un sous-groupe abélien $\mathrm{T}\,(\mathcal{E})$ du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$, isomorphe au groupe additif de E puisque $\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$. Comme id_E est évidemment une isométrie vectorielle directe, on conclut avec la proposition précédente que:

Proposition. *Toute translation de $\mathcal{E}$ est un déplacement de $\mathcal{E}$, et le groupe* $\mathrm{T}\,(\mathcal{E})$ *est un sous-groupe abélien de* $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$.

Remarque. Tous les résultats de ce paragraphe 4 restent en fait vrais pour $\mathcal{E}$ euclidien de dimension finie quelconque. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un plan, les éléments de $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Is}^-(\mathcal{E})$ peuvent être explicitement décrits. C'est l'objet des paragraphes suivants.

4 Réflexions affines et symétries glissées

On fixe un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension deux, de $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien associé E.

Définition. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{E}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on appelle *projeté orthogonal* de M sur $\mathcal{D}$, noté $\pi_{\mathcal{D}}(M)$, le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par M. On appelle symétrique orthogonal de M par rapport à $\mathcal{D}$, noté $\sigma_{\mathcal{D}}(M)$, le symétrique de M par rapport au point $\pi_{\mathcal{D}}(M)$, c'est-à-dire le point de $\mathcal{E}$ tel que $\pi_{\mathcal{D}}(M)$ soit le milieu de $(M, \sigma_{\mathcal{D}}(M))$.

Figure

L'application $\sigma_{\mathcal{D}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à tout point associe son symétrique orthogonal par rapport à $\mathcal{D}$ est appelée la *symétrie affine orthogonale* par rapport à $\mathcal{D}$, ou encore la *réflexion affine* d'axe $\mathcal{D}$.

Proposition (composée de deux réflexions d'axes parallèles). *La composée de deux réflexions affines d'axes parallèles est une translation dont le vecteur appartient à la direction orthogonale à ces deux droites.*

Plus explicitement : soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles dans $\mathcal{E}$. Soit D la droite vectorielle de E dirigeant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur orthogonal à D dont la norme est égal à la distance entre les deux droites et dont le sens est de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}'$. Alors $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau_{2\overrightarrow{u}}$.

Figure

Preuve. Soit s la réflexion vectorielle d'axe D dans E. L'application linéaire associée à $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Donc $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est une translation. Notons $\overrightarrow{v}$ le vecteur de cette translation. Il suffit pour déterminer $\overrightarrow{v}$ de connaître l'image A' d'un point A donné, puisqu'alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{MM'}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Choisissons donc un point A sur $\mathcal{D}$. Appelons B le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}'$. D'une part $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ par définition de $\overrightarrow{u}$. D'autre part, $A' = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}(A) = \sigma_{\mathcal{D}'}(A)$, donc B est le milieu de (A, A'). D'où $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{u}$, ce qui achève la preuve. □

Définition (composée d'une réflexion et d'une translation dans la direction de l'axe).

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{E}$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E appartenant à la droite vectorielle D dirigeant $\mathcal{D}$.

On appelle *symétrie glissée* d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$ la composée $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$ de la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

On montre simplement que: $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$.

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, la symétrie glissée se réduit à la réflexion $\sigma_{\mathcal{D}}$.

Figure

Proposition. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine quelconque du plan affine euclidien $\mathcal{E}$. Soit $\sigma_{\mathcal{D}}$ la réflexion affine d'axe $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$. Alors :*

(i) *$\sigma_{\mathcal{D}}$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est la réflexion vectorielle s_D de E dans E d'axe la droite vectorielle D dirigeant $\mathcal{D}$;*

(ii) *$\sigma_{\mathcal{D}}$ est une isométrie affine de $\mathcal{E}$, et plus précisément un antidéplacement;*

(iii) *la bijection réciproque de $\sigma_{\mathcal{D}}$ est $\sigma_{\mathcal{D}}$;*

(iv) *l'ensemble des points fixes de $\sigma_{\mathcal{D}}$ est égal à la droite $\mathcal{D}$.*

Preuve. Notons simplement σ la réflexion affine de $\mathcal{E}$ d'axe $\mathcal{D}$. Introduisons la réflexion vectorielle s de E d'axe D, où la droite vectorielle D de E est la direction de $\mathcal{D}$. Soient M un point quelconque de $\mathcal{E}$, P son projeté orthogonal dur $\mathcal{D}$, et $M' = \sigma(M)$, de sorte que P est le milieu de (M, M'). Soient de même N un autre point de $\mathcal{E}$, $N' = \sigma(N)$ et Q le milieu de (N, N') sur $\mathcal{D}$. Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QN} - \overrightarrow{PM}$.

Figure

On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in D$ et $\overrightarrow{w} \in D^{\perp}$. Il en résulte que $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$. Mais $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{N'Q}$ et $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{M'P}$, donc $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{N'Q} - \overrightarrow{M'P}$. Il en résulte que $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN'} + \overrightarrow{M'P} = \overrightarrow{M'N'}$. On a ainsi montré que $s(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$, ce qui prouve le point (i). Le point (ii) en découle immédiatement puisque $s \in O^{-}(E)$. Il est clair que $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, d'où (iii). Le point (iv) est clair. □

Proposition. *Toute symétrie glissée est un antidéplacement. L'ensemble des points fixes d'une symétrie glissée est vide dès lors que celle-ci ne se réduit pas à une réflexion (c'est-à-dire dès lors que son vecteur n'est pas nul).*

Preuve. Evidente d'après ce qui précède. □

5 Rotations affines

$\mathcal{E}$ désigne toujours un espace affine euclidien de dimension deux, de $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien associé E.

DÉFINITION. On appelle *rotation affine* de $\mathcal{E}$ toute composée de deux réflexions affines dont les axes sont égaux ou sécants.

REMARQUES.

• Une rotation affine ρ est donc de la forme $\rho = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'}$. Attention, il n'y a pas unicité des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

• Dans la définition, est exclu le cas où les deux axes sont strictement parallèles (rappelons que dans ce cas, la composée $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est une translation de vecteur non-nul). En revanche, on autorise dans la définition le cas où les axes sont égaux, de sorte que $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est bien une rotation.

• Toute rotation $\rho = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'}$ est une application affine dont l'application linéaire associée est la rotation vectorielle $r = s_D \circ s_{D'}$ où D, D' sont les droites vectorielles dirigeant $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$.

• Toute rotation affine est bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ et $\rho^{-1} = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est aussi une rotation.

Figure

PROPOSITION. *Toute rotation affine de $\mathcal{E}$ est une isométrie affine, et plus précisément un déplacement.*

Preuve. Evidente d'après ce qui précède. □

PROPOSITION ET DÉFINITION. *Si $\rho = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'}$ est une rotation affine distincte de $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, alors le seul point de $\mathcal{E}$ fixé par ρ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On l'appelle le centre de la rotation ρ.*

Preuve. Comme $\rho \neq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes. Il en résulte que les droites vectorielles D et D' de E qui les dirigent sont distinctes, et donc que la rotation vectorielle r associée à ρ n'est pas id_E. Soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{O\}$. On a $\rho(O) = \sigma_{\mathcal{D}}(\sigma_{\mathcal{D}'}(O)) = \sigma_{\mathcal{D}}(O) = O$, donc O est un point fixe de ρ. Soit M un point fixe de ρ. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\rho(O)\rho(M)} = r(\overrightarrow{OM})$. Comme $r \neq \mathrm{id}_E$, on déduit de la seconde proposition du paragraphe 2 que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$, donc $O = M$. □

THÉORÈME. *La composée de deux rotations affines est soit une translation, soit une rotation.*

Preuve. Soient ρ et ρ' deux rotations affines, de centres respectifs O et O'. Notons r et r' les rotations vectorielles respectivement associées à ρ et ρ'. Posons $\rho'' = \rho' \circ \rho$. C'est une isométrie affine d'application linéaire associée $r' \circ r$. On sait (voir paragraphe 2) que $r' \circ r$ est une rotation vectorielle de E.

Si $r' \circ r = \mathrm{id}_E$, alors ρ'' est une translation (rappelons que toute application affine dont l'application linéaire associée est id_E est une translation).

On suppose maintenant que $r' \circ r \neq \mathrm{id}_E$. Montrons d'abord que ρ'' admet un unique point fixe. Pour cela, considérons un point A quelconque et posons $A' = \rho(A)$ et $A'' = \rho'(A') = \rho''(A)$. On a : $\overrightarrow{O'A''} = \overrightarrow{\rho'(O')\rho(A')} = r'(\overrightarrow{O'A'}) = r'(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA'}) = r'(\overrightarrow{O'O}) + r'(\overrightarrow{\rho(O)\rho(A)}) = r'(\overrightarrow{O'O}) + (r' \circ r)(\overrightarrow{OA})$. Donc:

$$(\rho' \circ \rho)(A) = A \quad \Leftrightarrow \quad (r' \circ r)(\overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'O} - r'(\overrightarrow{O'O}).$$

Plaçons-nous dans une base orthonormée de E, notons $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ la matrice de la rotation vectorielle $r' \circ r$, avec $a^2 + b^2 = 1$. Remarquons que $a \neq 1$, car on aurait sinon $b = 0$ et donc $r' \circ r = \mathrm{id}_E$, ce qui exclu. Notons (α, β) les composantes du vecteur $\overrightarrow{O'O} - r'(\overrightarrow{O'O})$. D'après ce qui précède, le point A fixé par ρ'' si et seulement si les composantes (x, y) de $\overrightarrow{OA}$ sont solutions du système: $\left\{\begin{smallmatrix} (a-1)x - by = \alpha \\ bx + (a-1)y = \beta \end{smallmatrix}\right.$. Le déterminant de ce système est $a^2 + 1 - 2a + b^2 = 2(1 - a) \neq 0$. Il admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}^2$, ce qui prouve qu'il existe un et un seul point A fixé par ρ''.

Ceci étant, puisque $r' \circ r$ est une rotation vectorielle de E distincte de id_E, il existe des droites vectorielles distinctes D et D' telles que $r' \circ r = s_{D'} \circ s_D$. Introduisons la droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ passant par A et dirigée par D, et la droite affine $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{E}$ passant par A et dirigée par D'. Elles sont sécantes en A. Donc on peut considérer la rotation affine $\rho_0 = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$, qui a pour centre A. Par construction, les applications affines ρ'' et ρ_0 ont la même application linéaire associée (à savoir $r' \circ r = s_{D'} \circ s_D$), et fixent toutes les deux le point A. On a alors $\rho'' = \rho_0$, et donc ρ_0 est une rotation affine. □

A noter que ce théorème, dont nous avons tenu à donner une preuve géométrique directe, sera une conséquence immédiate des résultats sur la structure du groupe des déplacements du plan $\mathcal{E}$ que nous allons voir au paragraphe suivant. On termine auparavant en donnant quelques précisions (utiles pour la suite) sur les translations et les rotations comme produits de deux réflexions.

Lemme.

(1) *Toute translation de $\mathcal{E}$ distincte de $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est la composée de deux réflexions dont les axes sont parallèles et de direction orthogonale à la direction du vecteur de la translation, et dont l'un peut être choisi arbitrairement.*

(2) *Toute rotation de $\mathcal{E}$ distincte de $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est la composée de deux réflexions dont les axes sont sécants en le centre de la rotation, et dont l'un peut être choisi arbitrairement.*

Preuve. Soit τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ non-nul. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine quelconque dans $\mathcal{E}$ dont la direction D est orthogonale à celle de $\overrightarrow{u}$. Soit $\mathcal{D}'$ la droite affine de $\mathcal{E}$ paralllèle à $\mathcal{D}$, telle que la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ soit égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\|$, et telle que le sens de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}'$ soit celui de $\overrightarrow{u}$. Il résulte alors immédiatement de la premiè e proposition du paragraphe 4 que $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau$.

Soit maintenant ρ une rotation affine distincte de $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ de centre A. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine quelconque dans $\mathcal{E}$ passant par A. Soit D la droite vectorielle de E dirigeant $\mathcal{D}$ et soit r la rotation vectorielle de E associée à ρ. Comme on l'a démontré vers la fin du paragraphe 2, il existe une droite vectorielle D' de E telle que $r = s_D \circ s_{D'}$. Si l'on appelle $\mathcal{D}'$ la droite affine de $\mathcal{E}$ passant par A et dirigée par D', la rotation $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'}$ a la même application linéaire associée que ρ et fixe comme ρ le point A: elle lui est donc égale (voir paragraphe 9 du document CAPES sur la géométrie affine). □

6 Groupe des isométries affines du plan

$\mathcal{E}$ désigne toujours un espace affine euclidien de dimension deux, de $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien associé E. L'objet de l'étude qui suit est de donner une description explicite (et une classification suivant les points fixes) de toutes les isométries affines du plan $\mathcal{E}$.

Lemme 1. *Si φ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui fixe trois points non alignés, alors $\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.*

Preuve. Voir par exemple document CAPES sur la géométrie affine, fin du paragraphe 9. □

Lemme 2. *Si φ est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ distincte de $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ qui fixe au moins deux points distincts A et B, alors φ est la réflexion d'axe (AB).*

Preuve. Soit C un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à la droite (AB). Notons $C' = \varphi(C)$. Comme φ est une isométrie, on a $d(A,C) = d(\varphi(A),\varphi(C)) = d(A,C')$ et de même $d(B,C) = d(B,C')$. Donc la droite (AB) est la médiatrice du segment $[C,C']$. Il en résulte que, si l'on note σ la réflexion d'axe (AB), on a $\sigma(C) = C'$. Posons $\psi = \sigma \circ \varphi$, qui est une isométrie de $\mathcal{E}$ comme composée de deux isométries. On a $\psi(A) = \sigma(A) = A$, $\psi(B) = \sigma(B) = B$ et $\psi(C) = \sigma(C') = C$. On applique le lemme 1 pour conclure que $\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, et donc $\varphi = \sigma$. □

Figure

Lemme 3. *Si φ est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ qui fixe un unique point A, alors φ est une rotation de centre A.*

Preuve. Soit B un point de $\mathcal{E}$ distinct de A. Posons $B' = \varphi(B)$, qui est donc distinct de A et considérons la médiatrice $\mathcal{D}$ de $[B,B']$. On a $d(A,B) = d(\varphi(A),\varphi(B)) = d(A,B')$, d'où $A \in \mathcal{D}$. Si l'on note σ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et $\psi = \sigma \circ \varphi$, on a donc $\psi(A) = \sigma(A) = A$ et $\psi(B) = \sigma(B') = B$. Ainsi, ψ fixe au moins deux points distincts. D'après les deux lemmes précédents, deux cas seulement peuvent se présenter : le cas $\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est impossible car on aurait alors $\varphi = \sigma$ ce qui contredit l'hypothèse que φ n'a qu'un seul point fixe ; on est donc forcément dans le cas où ψ est la réflexion σ' d'axe (AB). On en déduit que $\varphi = \sigma \circ \sigma'$, et comme les axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécants en A, on conclut que φ est une rotation de centre A. □

Figure

Lemme 4. *Si φ est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ qui ne fixe aucun point de $\mathcal{E}$, alors φ est une translation ou une symétrie glissée.*

Preuve. Soit A un point quelconque de $\mathcal{E}$. On a $A' = \varphi(A) \neq A$, donc le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'A}$ est non-nul. La translation τ de vecteur $\overrightarrow{u}$ vérifie $\tau(A') = A$ donc l'isométrie $\psi = \tau \circ \varphi$ vérifie $\psi(A) = A$. Elle satisfait donc aux hypothèses de l'un des trois lemmes précédent.

• Dans le cas où $\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, on conclut que $\varphi = \tau^{-1}$ est une translation.

• Le cas où ψ est une rotation ρ de centre A conduit à $\varphi = \tau^{-1} \circ \rho$. Soit alors $\mathcal{D}$ la droite affine passant par A et de direction orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AA'}$ de la translation τ^{-1}. D'après le lemme final du paragraphe 4, il existe d'une part une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ telle que $\tau^{-1} = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ et d'autre part une droite $\mathcal{D}''$ sécante à $\mathcal{D}$ en A telle que $\rho = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}''}$. On conclut que $\varphi = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}''} = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}''}$ qui est une rotation puisque par construction $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont sécantes. Ceci contredisant le fait que φ est sans point fixe, ce cas est impossible.

Figure

• Reste le cas où ψ est une réflexion σ d'axe $\mathcal{D}$ passant par A. On a donc $\varphi = \tau^{-1} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$. Décomposons le vecteur $-\overrightarrow{u}$ de la translation τ^{-1} sous la forme $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in D$ et $\overrightarrow{w} \in D^{\perp}$, où D désigne la droite vectorielle de E dirigeant $\mathcal{D}$. Comme $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à D, il existe d'après le lemme final du paragraphe 5 une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ telles que $\tau_{\overrightarrow{w}} = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$. Ainsi $\varphi = \tau_{-\overrightarrow{u}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{w}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'}$ ce qui, puisque $\overrightarrow{v}$ appartient à la direction D de $\mathcal{D}'$ (rappelons que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles), montre que φ est une symétrie glissée. □

Théorème. *Les déplacements du plan affine euclidien $\mathcal{E}$ sont les rotations et les translations. Les antidéplacements sont les réflexions et les symétries glissés.*

Preuve. Il suffit de synthétiser les résultats précédents. □

Corollaire. *Les réflexions engendrent le groupe* $\mathrm{Is}\,(\mathcal{E})$ *du plan affine euclidien $\mathcal{E}$. Plus précisément, tout déplacement de $\mathcal{E}$ est le produit de deux réflexions, et tout antidéplacement de $\mathcal{E}$ est une réflexion ou un produit de trois réflexions.*

Corollaire. *La classification des isométries du plan affine euclidien $\mathcal{E}$ suivant leurs ensembles de points fixes est donné par le tableau suivant:*

ensemble des points fixes	*déplacement*	*antidéplacement*
$\mathcal{E}$	$\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$	$\star$
droite $\mathcal{D}$	$\star$	réflexion d'axe $\mathcal{D}$
singleton $\{A\}$	rotation de centre A	$\star$
$\emptyset$	translation de vecteur non-nul	symétrie glissée de vecteur non-nul

7 Angles de vecteurs

On revient au contexte vectoriel en fixant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E de dimension deux.

Lemme. *Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E. La relation $\sim$ définie sur $\mathcal{U}$ par:*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') \text{ s'il existe une rotation } r \text{ telle que } r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}' \text{ et } r(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}',$$

est une relation d'équivalence.

Preuve. Vérification évidente de la réflexivité, de la symétrie et de la transitivité. □

Définition. Pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathcal{U}$, la classe d'équivalence de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour la relation $\sim$ est appelé l'*angle* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On le note $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Plus généralement, pour tout couple de vecteurs non-nuls $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de E, on appelle *angle* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'angle des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{||\overrightarrow{u}||}\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{||\overrightarrow{v}||}\overrightarrow{v}$.

En résumé, pour tout couple de vecteurs non-nuls $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}}), \quad \text{avec } (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}) \in \mathcal{U} \text{ défini par } \overrightarrow{u_1} = \frac{1}{||\overrightarrow{u}||}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v_1} = \frac{1}{||\overrightarrow{v}||}\overrightarrow{v}.$$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles de vecteurs de E.

Théorème. *L'application $\psi : \mathcal{A} \to O^+(E)$ qui, à tout $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \in \mathcal{A}$, associe l'unique rotation $f \in O^+(E)$ telle que $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1}$, est bien définie (indépendamment des représentants choisis pour l'angle). De plus elle est bijective de $\mathcal{A}$ sur $O^+(E)$.*

Preuve. Considérons deux couples $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ de vecteurs non-nuls de E. On peut sans restriction supposer qu'ils appartiennent à $\mathcal{U}$. En appliquant le lemme fondamental de la fin du paragraphe 2, il existe d'une part deux rotations f et g telles que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $g(\overrightarrow{u}') = \overrightarrow{v}'$, et d'autre part deux rotations r et r' telles que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}'$ et $r'(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}'$. La rotation $r' \circ f$ envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}'$, de même que la rotation $g \circ r$. Par unicité dans le lemme fondamental, on a $r' \circ f = g \circ r$, ou encore, puisque $O^+(E)$ est abélien, $r' \circ f = r \circ g$. On en déduit que $r = r'$ si et seulement si $f = g$. Dès lors:

Figure

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') \Leftrightarrow r = r' \Leftrightarrow f = g \Leftrightarrow \psi(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \psi(\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'}),$$

ce qui prouve le résultat voulu. □

Remarques.

1. Il résulte du théorème ci-dessus que, pour tous couples de vecteurs unitaires:

$$\left| \begin{array}{c} \text{l'unique rotation qui envoie} \\ \overrightarrow{u} \text{ sur } \overrightarrow{u}' \text{ est égale à} \\ \text{l'unique rotation qui} \\ \text{envoie } \overrightarrow{v} \text{ sur } \overrightarrow{v}' \end{array} \right| \Leftrightarrow \left[(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'}) \right] \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \text{l'unique rotation qui envoie} \\ \overrightarrow{u} \text{ sur } \overrightarrow{v} \text{ est égale à} \\ \text{l'unique rotation qui} \\ \text{envoie } \overrightarrow{u}' \text{ sur } \overrightarrow{v}' \end{array} \right|$$

2. La bijection réciproque ψ^{-1} est l'application $O^+(E) \to \mathcal{A}$ qui, à une rotation vectorielle f quelconque, associe l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u})})$, et ceci quel que soit $\overrightarrow{u}$ non-nul dans E.

Définition (Addition des angles). On appelle *somme* de deux angles $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'})$ de $\mathcal{A}$ l'angle:

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'}) = \psi^{-1}\left[\,\psi(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \circ \psi(\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'})\,\right].$$

Explicitons cette définition:

si f est la rotation telle que $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et g la rotation telle que $g(\overrightarrow{u_1}') = \overrightarrow{v_1}'$,

alors $(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{u_1}', \overrightarrow{v_1}'}) = (\widehat{\overrightarrow{u}'', \overrightarrow{v}''})$ pour $\overrightarrow{u}''$ unitaire quelconque et $\overrightarrow{v}'' = g \circ f(\overrightarrow{u}'')$.

Théorème. *L'ensemble $\mathcal{A}$ des angles de vecteurs de E est un groupe pour l'addition définie ci-dessus, et la bijection ψ est un isomorphisme de groupes de $\mathcal{A}$ sur $O^+(E)$.*

Preuve. C'est immédiat par transport de structure par la bijection ψ, qui devient alors un isomorphisme de groupes. □

Proposition. (Relation de Chasles pour les angles)

Pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ non-nuls dans E, on a:

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}})$$

Preuve. Soit $f = \psi(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}})$ et $g = \psi(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}})$. Donc $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et $g(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{w_1}$, de sorte que $(g \circ f)(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{w_1}$. Le résultat est alors immédiat par la définition de la somme de deux angles □

Figure

Définitions et remarques.

- L'*angle nul* est par définition $\psi^{-1}(\mathrm{id}_E)$. Tout couple de la forme $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u}$ non-nul en est un représentant. On le note $\widehat{0}$. Il vérifie: $\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})} + \widehat{0} = \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}$ pour tout angle $\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}$.

- L'*opposé d'un angle* $\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}$ est $\widehat{(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})}$, puisque $\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})} + \widehat{(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} = \widehat{0}$.

- L'*angle plat* est par définition $\psi^{-1}(-\mathrm{id}_E)$. Tout couple de la forme $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u}$ non-nul en est un représentant. On a: $\widehat{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})} + \widehat{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})} = \widehat{0}$ puisque $(-\mathrm{id}_E) \circ (-\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$.

- Un angle $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ est un *angle droit* lorsque $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ est l'angle plat.

  La rotation f image par ψ d'un angle droit vérifie alors $f \circ f = -\mathrm{id}_E$. Sa matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ étant de carré égal à $-I_2$, elle ne peut être que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Il y a donc deux angles droits. Si l'un est $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$, l'autre est $\widehat{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})}$. Un angle $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ est droit si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

8 Orientation du plan, mesures d'angles

E désigne toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension deux.

Remarques et définitions (Orientation du plan E).

Soit $f \in O(E)$; il est clair que f transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E. (En effet, f transforme toute base en une base puisque c'est un automorphisme, et f conserve la norme et l'orthogonalité des vecteurs puisqu'il conserve le produit scalaire). Réciproquement, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. On sait qu'il existe un unique automorphisme $f \in GL(E)$ qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$. Parce que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormées, il est facile de vérifier que l'on a nécessairement $f \in O(E)$. On peut donc donner la définition suivante:

> deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont dites *de même orientation* lorsque l'unique isométrie vectorielle $f \in O(E)$ qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ est une isométrie directe. Sinon, on dira que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientations opposées.

Il résulte immédiatement de ces définitions que:

> une isométrie $f \in O(E)$ est directe si et seulement si elle conserve l'orientation, c'est-à-dire qu'elle transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de même orientation.

Orienter le plan E consiste à choisir arbitrairement une base orthonormée de référence $\mathcal{B}$; toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ ayant la même orientation que $\mathcal{B}$ sera dite *directe*, toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ ayant l'orientation opposée à celle de $\mathcal{B}$ sera dite *indirecte*.

> En particulier une isométrie $f \in O(E)$ du plan E orienté est directe si et seulement si elle transforme toute base orthonormée directe de E en une base orthonormée directe.
>
> Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E et f l'unique isométrie vectorielle qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$. La matrice P de f par rapport à $\mathcal{B}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Puisque $f \in O(E)$, la matrice P est orthogonale (voir le lemme du paragraphe 1). Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation si et seulement si de plus $\det P = 1$.

On suppose dans la suite que <u>le plan vectoriel E est orienté.</u>

On précise tout d'abord le seconde observation faite au paragraphe 2 sur la forme de la matrice d'une rotation vectorielle dans une base orthonormée en montrant que celle-ci ne dépend pas de la base, mais seulement de l'orientation.

Théorème. *Soit $r \in O^+(E)$ une rotation vectorielle.*

(i) *Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de r dans toute base orthonormée directe de E soit égale à*
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) *La matrice de r dans toute base orthonormée indirecte de E est alors égale à $R_{-\theta}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Comme on l'a vu au paragraphe 2, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $a^2+b^2=1$ tel que la matrice de r dans $\mathcal{B}$ soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. D'après un résultat d'analyse bien connu (mais non trivial !), l'égalité $a^2+b^2=1$ implique qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, non unique mais unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Donc la matrice de r par rapport à la base $\mathcal{B}$ ets R_θ ; ceci n'est rien d'autre que ce que l'on avait déjà observé au paragraphe 2.

Considérons maintenant une autre base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E, notons f l'isométrie transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ qui n'est autre que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, et M' la matrice de r par rapport à $\mathcal{B}'$. Par formule de changement de base, $M' = P^{-1}R_\theta P$. Supposons d'abord que $\mathcal{B}'$ est directe; alors $f \in O^+(E)$, et comme $O^+(E)$ est abélien, l'égalité $M' = P^{-1}R_\theta P$ devient $M' = R_\theta$. Ceci achève de prouver le (i). Pour (ii), supposons maintenant que $\mathcal{B}'$ est indirecte. On a $f \in O^-(E)$, donc $r \circ f \in O^-(E)$, d'où $r \circ f \circ r \circ f = \mathrm{id}$ et $f^2 = \mathrm{id}$ puisque $r \circ f$ et f sont des réflexions vectorielles (voir le théorème du paragraphe 2). Il en résulte que $f^{-1} \circ r \circ f = f \circ r \circ f = r^{-1}$, ce qui se traduit matriciellement par $M' = P^{-1}R_\theta P = R_\theta^{-1}$. Il est évident de vérifier que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. □

Notation. Pour tout réel θ, notons r_θ l'unique rotation dont la matrice par rapport à toute base orthonormée directe est la matrice R_θ. On l'appelle la rotation d'angle θ (on devrait, conformément à ce qui suit, l'appeler la rotation dont l'angle a pour mesure θ). Par définition, on a:
$$\forall\ \theta, \theta' \in \mathbb{R},\ (r_\theta = r_{\theta'}) \ \Leftrightarrow\ (R_\theta = R_{\theta'}) \ \Leftrightarrow\ (\exists\ k \in \mathbb{Z},\ \theta' = \theta + 2k\pi).$$
Remarquons en particulier que $r_0 = \mathrm{id}_E$ et $r_\pi = r_{-\pi} = -\mathrm{id}_E$.

Rappelons aussi que, comme on l'a vu au paragraphe 2, on a alors:
$$\text{pour tous } \theta, \theta' \in \mathbb{R},\ \ R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'} \quad \text{et} \quad r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'},$$

Corollaire. *L'application $r : \mathbb{R} \to O^+(E)$ définie par $\theta \mapsto r_\theta$ est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.*

Preuve. La surjectivité résulte du théorème ci-dessus, le calcul du noyau et la propriété de morphisme se déduisent des remarques précédentes. □

Définition. On appelle *mesure* d'un angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ tout réel θ tel que l'unique rotation qui envoie le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ soit la rotation r_θ définie ci-dessus.

En d'autres termes, en rappelant l'application $\psi : \mathcal{A} \to O^+(E)$ définie au paragraphe 7 :
$$[\ \ \theta \text{ est une mesure de } (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})\ \ ] \ \Leftrightarrow\ [\ \ r_\theta = \psi(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})\ \ ] \ \Leftrightarrow\ [\ \ r_\theta(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1}\ \ ].$$
La mesure d'un angle n'est pas unique, mais défini modulo 2π :

si θ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, ses autres mesures sont tous les réels $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Il résulte directement de la définition que:
- les mesures de l'angle nul sont tous les $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- les mesures de l'angle plat sont tous les $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- les mesures d'un angle droit sont les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base orthonormée directe de E si et seulement si une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est $\frac{\pi}{2}$.

Remarque. Dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, la rotation affine de centre O (où $O \in \mathcal{E}$ quelconque) et d'angle θ (où $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque) est la rotation ρ défini par: $\rho(O) = O$ et, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ distinct de O, le point $M' = \rho(M)$ vérifie:

$OM' = OM$, et une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ est θ.

Figure

Remarque (Somme et mesure d'angles).

Soient $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \in \mathcal{A}$ un angle et θ une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, de sorte que $\psi((\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})) = r_\theta$.
Soient $(\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'}) \in \mathcal{A}$ un autre angle, θ' une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'})$, avec $\psi((\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'})) = r_{\theta'}$.
On a vu au paragraphe 7 que $\psi((\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} + (\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'})) = r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$, et donc

$$\theta + \theta' \text{ est une mesure de l'angle somme } (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'}).$$

On a plus précisément le théorème suivant:

Théorème. *L'application qui, à un angle de vecteurs, associe la classe modulo $2\pi\mathbb{Z}$ de ses mesures définit un isomorphisme de groupes additifs de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Preuve. Considérons les morphismes $\psi^{-1} : O^+(E) \to \mathcal{A}$ et $r : \mathbb{R} \to O^+(E)$ introduits précédemment. Leur composé $\psi^{-1} \circ r : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$, surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. L'isomorphisme de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{A}$ qui s'en déduit est la réciproque de l'isomorphisme cherché. □

Remarques. C'est ce théorème qui est à la base des systèmes pratiques de mesure des angles. Comme il établit que la mesure de la somme de deux angles est la somme de leurs mesures respectives, il permet de définir à partir d'une valeur arbitraire d'un angle donné (généralement l'angle plat) de calculer la mesure des différentes fractions de cet angle (suivant l'unité choisie: π en radians, 180 en degrés, 200 en grades).

Observons que, dans le théorème ci-dessus, l'additivité de la mesure des angles ne peut être correctement exprimée qu'au niveau des classes déquivalence. Même s'il est parfois utile de ramener toute mesure à une mesure dite *principale* (ie. choisie dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$), il est clair que la somme de deux angles de mesure principale $3\pi/4$ aura pour mesure principale $-\pi/2$, qui n'est pas la somme des mesures principales.

Définition (sinus et cosinus d'un angle). Comme les différentes mesure d'un même angle diffèrent d'un multiple entier de 2π, on peut sans ambiguïté définir *le cosinus et le sinus d'un angle* comme le cosinus et le sinus de l'une quelconque de ses mesures. On note:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \sin\theta, \quad \text{où } \theta \text{ est une mesure de l'angle } (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}).$$

Définition (produit mixte). Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donc orthogonale, et directe ($\det P = 1$). Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ non-nuls ; notons M la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et M' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. Alors $M = PM'$, d'où $\det M = \det M'$.

En résumé, le réel $\det \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est indépendant de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie; on l'appelle le *produit mixte* de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$, noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \det \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \quad \text{pour toute base orthonormée directe } \mathcal{B} \text{ de } E.$$

Proposition. *Pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs non-nuls de E, on a:*

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \frac{\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \frac{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|}.$$

Preuve. Rappelons que $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}$ sont unitaires définis par: $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|} \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \overrightarrow{v}$

Soit θ une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.
Donc $r_\theta(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1}$.

Soit $\overrightarrow{w_1}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ tel que la base othonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w_1}\}$ soit directe.

Alors, dans la base $\mathcal{B}$:
d'une part les composantes de $\overrightarrow{u_1}$ sont $(1, 0)$,
d'autre part les composantes de $\overrightarrow{v_1}$ sont $(\cos\theta, \sin\theta)$,
(car formant la première colonne de R_θ puisque $\overrightarrow{v_1} = r_\theta(\overrightarrow{u_1})$ et $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(r_\theta) = R_\theta$).

Donc $\overrightarrow{u_1} . \overrightarrow{v_1} = \cos\theta$ et $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}] = \det \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}) = \sin\theta$.
D'où le résultat. □

Figure

Remarque finale.

En synthétisant le contenu des paragraphes 7 et 8 relatifs aux angles, on peut dégager de la démarche retenue les principales étapes suivantes (notion de rotation, notion d'angle, addition des angles via la composition des rotations, mesure des angles via la représentation matricielle des rotations) :

- On part de la notion de rotation (vectorielle, ou bien affine puis vectorielle) définie comme composée de deux réflexions (ou bien comme isométrie vectorielle directe).

- On définit la notion d'angle d'un couple de vecteurs non-nuls de même norme, puis d'un couple de vecteurs non-nuls quelconques ; on en déduit une bijection (la bijection ψ) entre l'ensemble des angles de vecteurs (l'ensemble $\mathcal{A}$) et l'ensemble des rotations vectorielles du plan (l'ensemble $O^+(E)$). La rotation associée (par ψ) à un angle donné est l'unique rotation qui, pour tout couple de vecteurs unitaires choisi pour représenter cet angle, envoie le premier vecteur du couple sur le second.

- Comme $O^+(E)$ est un groupe abélien, on en déduit une addition dans $\mathcal{A}$ construite de telle façon que, par définition même, la somme de deux angles admette comme rotation associée (par ψ) la composée de la rotation associée au premier angle par la rotation associée au deuxième angle ; en clair, la bijection ψ devient un isomorphisme entre les groupes abéliens $(\mathcal{A}, +)$ et $(O^+(E), \circ)$.

- Via la représentation matricielle dans toute base orthonormée directe, on sait associer à toute rotation vectorielle un réel θ (non unique mais défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$) ; ceci permet de définir une mesure d'un angle donné comme l'un des réels θ ainsi associé à la rotation correspondant (via ψ) à cet l'angle ; une mesure de la somme de deux angles est alors la somme d'une mesure du premier et d'une mesure du second ; en clair, on obtient un isomorphisme entre les groupes abéliens $(\mathcal{A}, +)$ et $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$.