Nombres complexes - Equations et systèmes d'équations

Feuille n°1

Exercice 1

1. Calculer sous forme algébrique $(3-2i)^2$, $\dfrac{1}{3+4i}$, $\dfrac{1+i}{1-i}$.
2. Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les complexes $1+i\sqrt{3}$, $4i$, $1+i$, -2.
3. Ecrire sous forme algébrique les complexes $\sqrt{3}e^{i\pi/3}$, $2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$, $2e^{4i\pi}$, $\overline{\frac{1}{2}e^{2i\pi/3}}$.
4. Déterminer $(\sqrt{3}+i)^7$, $\left(e^{-3i\pi/4}\right)^3$.

Exercice 2

1. Linéariser la fonction $\sin^4(x)$.
2. Exprimer $\sin(5x)$ comme une somme de puissances de $\sin(x)$ et/ou de $\cos(x)$.

Exercice 3

On pose $z = -\ln 2 + i\frac{5\pi}{6}$. Déterminer e^z sous sa forme exponentielle, trigonométrique et algébrique.

Exercice 4

Déterminer la distance entre le point A d'affixe $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et le point B d'affixe $-2+i$.

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+16=0$. Représenter graphiquement les solutions de cette équation dans le plan complexe.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Représenter graphiquement les solutions de cette équation dans le plan complexe.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3x^2+2x-1=0$;
2. $4x^2-12x+9=0$;
3. $x^2+x+1=0$;
4. $x^2-(1+i)x+i=0$.

Exercice 7

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 3 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & - & 3y & + & z & = 0 \\ 2x & + & y & - & z & = 0 \\ x & + & 11y & - & 5z & = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8

Résoudre, en fonction du paramètre m, les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrl} x & + & my & = 1 \\ m^2x & - & y & = 1 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & & & = m \\ & & y & + & z & = 2 \\ x & + & 2y & + & z & = 3 \end{array}\right.$$

Et pour s'entraîner :

Exercice 9

1. Ecrire sous forme algébrique et exponentielle le complexe $\dfrac{1}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.
2. Déterminer sous forme exponentielle $(-\sqrt{3}+i)^4$ et e^z, avec $z=\pi\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
3. Linéariser $\cos^5(x)$.
4. Exprimer $\cos(4x)$ comme une somme de puissances de $\sin(x)$ et/ou de $\cos(x)$.

Exercice 10

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(a) : 3x^2+3x+1=0 \qquad (b) : x^2+x=\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad (c) : x^5=16+16i\sqrt{3}.$$

2. Résoudre les systèmes suivants (éventuellement en fonction du paramètre m) :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & z & =0 \\ 2x & + & y & - & z & =0 \\ 5x & + & 4y & - & z & =0 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & my & - & z & =0 \\ mx & + & y & - & z & =0 \\ x & + & y & + & (m-2)z & =0 \end{array}\right.$$

Solutions de l'exercice 9 :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}e^{-i\pi/4}$;
2. $(-\sqrt{3}+i)^4=16e^{-i2\pi/3}$; $e^z=-e^{\pi}$.
3. $\cos^5(x)=\frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x)$;
4. $\cos(4x)=\cos^4(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)$.

Solutions de l'exercice 10 :

1. $(a) : x=\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{6}$; $(b) : x=\frac{-1\pm(\sqrt{3}+i)}{2}$; $(c) : x=2e^{i\pi/15+2k\pi/5}$, k variant de 0 à 4.
2. $(S_1) : \mathcal{S}=\{(z,-z,z); z\in\mathbb{R}\}$; (S_2) : on a $\mathcal{S}=\{(0,0,0)\}$ si $m\neq 0$ et $m\neq 1$; $\mathcal{S}=\{(z,z,z); z\in\mathbb{R}\}$ si $m=0$; $\mathcal{S}=\{(x,y,x+y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ si $m=1$.

Développements limités - Intégrales et primitives

Feuille n°2

Exercice 11

1. Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2} - \sin(x)$
2. Ecrire le développement limité de $\exp(x-1)$ à l'ordre 3 en 0. En déduire le développement limité de $\exp(x)$ à l'ordre 3 au point -1.

Exercice 12

1. Trouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $x \longmapsto \exp(2\ln(1+x))$.
3. On pose $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Calculer $f'(x)$, et en déduire le développement limité de f à l'ordre 5 au voisinage de 0.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.

Exercice 13

1. Trouver la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x - \tan x}{\mathrm{th} x - \tan x}$.
2. Soit α un réel. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^x$.
3. Trouver la limite de la suite de terme général $\left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 14

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 (x^3 - 2x + 1)dx \qquad \int_0^1 2^x dx \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(e^{i3x} + \frac{2i}{1+x^2}\right) dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x)dx$$

2. On pose $G(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} t^3 e^t \cos(t)dt$. Déterminer la dérivée de la fonction G.

Exercice 15

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)dt$ (on différentiera les cas $n = -1$ et $n \neq -1$).
2. Déterminer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \arctan(t)dt \qquad \int_0^1 (t^2 + 2t + 3)e^t dt \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx.$$

Exercice 16

A l'aide de la formule de changement de variables, déterminer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)dx \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\arctan(x)^2}{1+x^2}dx \qquad \int_0^a \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}dx$$

(pour la dernière intégrale, on effectuera le changement de variables $t = e^x$).

Et pour s'entraîner :

Exercice 17

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \cos x \ln(1+x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$;
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$;
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$.

Exercice 18

1. Déterminer les intégrales suivantes

$$\int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)}dt \quad (\text{avec } 0 < x < \frac{\pi}{2}) \qquad \int_0^{\pi/2} \cos(t)e^t dt \qquad \int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln t}dt$$

2. En utilisant un changement de variable approprié, déterminer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt \qquad \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}}dt.$$

Solutions de l'exercice 17 :

1. $\cos x \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$;
2. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$;
3. $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$;
4. On a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$.

Solutions de l'exercice 18 :

1. $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)}dt = x\tan(x) + \ln(\cos x)$; $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)e^t dt = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}$; $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$; $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}}dt = 1 - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$;

Equations différentielles - Intégrales généralisées
Feuille n°3

Exercice 19

1. Résoudre les équations différentielles du 1er ordre suivantes :

$$(x^2+1)y'(x)+y(x)=0; \qquad y'(x)+y(x)-x=0.$$

2. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle $y'(x)+\tan(x)\,y(x)=e^x\cos(x)$ et déterminer la solution de cette équation vérifiant $y(0)=0$.
3. Résoudre sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ l'équation différentielle $xy'(x)+y(x)=e^x$.
Existe-t-il une solution de cette équation différentielle définie et continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, la déterminer.

Exercice 20

Résoudre les équations différentielle du 2ème ordre suivantes :

1. $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=(x-2)e^x$;
2. $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=2x^2-9+e^{2x}$;

Exercice 21

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=0$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=-2$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y''(t)-y'(t)-2y(t)=-3e^{-t}$. Déterminer l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0)=-1$ et de limite finie quand $t\to+\infty$.

Exercice 22

1. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\ln t}dt; \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin t-t}{t^3}dt; \qquad \int_{-1}^{0}\frac{1}{\ln(1+t)}dt \qquad \int_0^{+\infty}t^5e^{-t}dt.$$

2. Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha}dt \qquad \int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha e^{it}}{1+t}dt \qquad \int_0^1\frac{\ln(1+t^\alpha)}{1-\cos t}dt$$

Exercice 23

1. Montrer que pour tout $M>0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^M\frac{\sin t}{t}dt$ est convergente.
2. Montrer en intégrant par parties que pour tout $M>0$ on a l'égalité

$$\int_0^M\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1-\cos M}{M}+\int_0^M\frac{1-\cos t}{t^2}dt.$$

3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ est convergente.

Et pour s'entraîner :

Exercice 24

1. Résoudre l'équation différentielle $y'(x)-\dfrac{y(x)}{x}=x^2$ sur $]0,+\infty[$.

2. Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'(x) + \dfrac{1}{x+1}y(x) = \sin x$ vérifiant $y(0) = 0$.
3. Résoudre l'équation différentielle $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2 - 4x$;
4. Trouver la solution de l'équation différentielle $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 6x\,\mathrm{ch}(x)$ vérifiant $y(0) = \dfrac{7}{2}$ et $y(-1) = 0$.

Exercice 25

1. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \qquad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\, t - 1}{e^{2t} - 1}dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{e^t - 1}\right)^3}dt.$$

2. Pour quelles valeurs de α les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}dt$$

Solutions de l'exercice 24 :

1. On a $y(x) = Ax + \dfrac{x^3}{2}$, $A \in \mathbb{R}$;
2. La solution est $y(x) = \dfrac{1}{1+x} - \cos x + \dfrac{\sin x}{x+1}$.
3. On a $y(x) = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) + x^2 - 1$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
4. La solution est $y(x) = (x+2)e^x + x^3e^x + \dfrac{3}{2}(x+1)e^{-x}$.

Solutions de l'exercice 25 :

1. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente (par exemple parce que $t^2e^{-t^2} \longrightarrow_{t\to\pm\infty} 0$).
   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ est convergente (car $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 1$ et $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|^2 \leq \dfrac{1}{t^2}$).
   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\, t - 1}{e^{2t} - 1}dt$ est convergente (car $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{ch}\, t - 1}{e^{2t} - 1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^t\frac{\mathrm{ch}\, t - 1}{e^{2t} - 1} = 1$).
   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{e^t - 1}\right)^3}dt$ est divergente (car $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^{3/2}}{\left(\sqrt{e^t - 1}\right)^3} = 1$).
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt$ converge pour tout $\alpha > -1$.
   $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.

Séries numériques - Séries entières
Feuille n°4

Exercice 26
Déterminer la nature des séries suivantes

$$1)\, u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}; \qquad 2)\, u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad 3)\, u_n = \frac{1}{n - \ln n} \qquad 4)\, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$5)\, u_n = \frac{2}{3^n} \qquad 6)\, u_n = n^3 e^{-n} \qquad 7)\, u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \qquad 8)\, u_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n^3+4}} \qquad 9)\, u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 27
Soit $a > 0$ un réel. On pose $u_n = \dfrac{2 \operatorname{ch} n}{a^n}$. Pour quelles valeurs de a la série de terme général u_n est-elle convergente ? Dans ce cas, déterminer sa somme.

Exercice 28
Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$1)\, u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad 2)\, u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \quad 3)\, u_n = n\sqrt{n}\left(\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right) \quad 4)\, u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Exercice 29

1. Déterminer l'intervalle de convergence des séries entières suivantes :

$$1)\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2+1} \qquad 2)\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n2^n} \qquad 3)\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)z^n}{n!}.$$

2. Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0. Sur quel intervalle ce développement est-il correct ?

$$1)\, f(x) = x^2 e^x \qquad 2)\, f(x) = \frac{1}{2-x} \qquad 3)\, f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

Exercice 30
Soit $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n!)}$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière définissant f. Que vaut $f(0)$?
2. On pose $g(x) = x^2 f(x)$. Calculer $g'(x)$.
3. En déduire une expression de $g(x)$, puis de $f(x)$.
4. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31
On cherche à résoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y''(x) - 2y(x) = 0$. On suppose qu'il existe une solution $y(x)$ qui soit la somme d'une série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

1. Montrer que les coefficients satisfont les relations de récurrence suivantes :

$$a_2 = a_0 \qquad 3a_3 = a_1 \qquad a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2} a_n \text{ pour tout } n \geq 2.$$

2. En déduire que si $n \geq 2$ alors $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1} a_1}{(2n+1)(2n-1)}$.
3. En déduire que les solutions développables en série entière de l'équation considérée sont

$$y(x) = A(1+x^2) + B \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)} \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Et pour s'entraîner :

Exercice 32

1. Déterminer les natures des séries de terme général u_n suivantes :

$$1)\, u_n = \frac{\cos n}{n^2} \qquad 2)\, u_n = e^{-n^2} \qquad 3)\, u_n = n 2^{-n} \qquad 4)\, u_n = \sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1.$$

2. Pour quelles valeurs de $\alpha \geq 0$ les séries suivantes sont-elles convergentes ?

$$1)\, u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n^\alpha} \qquad 2)\, u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \qquad 3)\, u_n = \frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 33

1. Quels sont les rayons de convergence des séries entières suivantes

$$1) \sum_{n \geq 0} (n + \cos n) x^n \qquad 2) \sum_{n \geq 0} (n+1)(3x)^n \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(2n)!} x^n.$$

2. Montrer qu'il existe une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$. Déterminer son développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ? Que vaut $f(0)$?
3. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$. Quel est le rayon de convergence R de cette série entière. Montrer que $f'(x) = \ln(1+x^2)$ sur $]-R, R[$. En déduire la valeur de $f(x)$.

Solutions de l'exercice 32 :

1. 1) convergente (car $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$) ; 2) convergente (car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0$) ; 3) convergente (utiliser la règle de Cauchy ou d'Alembert) ; 4) divergente (car $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$).
2. 1) $\alpha > \dfrac{3}{2}$ (car $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha - \frac{1}{2}}}$) ; 2) $\alpha > 0$ (car si $\alpha > 1$ la série est absolument convergente, si $0 < \alpha \leq 1$ la série est une série alternée convergente, si $\alpha = 0$ u_n ne tend pas vers zéro) ; 3) $\alpha > \dfrac{1}{3}$ (car $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{6n^{3\alpha}}$).

Solutions de l'exercice 33 :

1. 1) $R = 1$; 2) $R = \dfrac{1}{3}$; 3) : $R = \infty$.
2. On a $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$, $R = 1$, $f(0) = 1$.
3. $R = 1$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x^2)^n = \ln(1+x^2)$. Donc $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2) dt = x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x)$ car $f(0) = 0$ (pour déterminer l'intégrale, on intègre par parties en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$).

Séries de Fourier - Fonctions de plusieurs variables
Feuille n°5

Exercice 34
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$.

1. Dessiner l'allure du graphe de f.
2. Calculer la série de Fourier de f. En déduire la formule
$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \qquad \text{pour tout } x \in]-\pi, \pi[.$$
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Au fait, pourquoi cette série est-elle convergente ?
4. Déterminer la somme de la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 35
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sup(\sin(x), 0)$.

1. Dessiner l'allure du graphe de g, et vérifier que g est continue et 2π-périodique.
2. Calculer la série de Fourier de g.
3. En déduire qu'on a l'égalité $\sup(\sin x, 0) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire les sommes des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1}$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(4m^2-1)^2}$.

Exercice 36
Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Calculer les dérivées partielles de f au point (x_0, y_0).
2. On décide de passer en coordonnées polaires, en posant $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. A l'aide de la formule de changement de variables, déterminer les dérivées partielles de F. Le résultat vous étonne-t-il ?

Exercice 37
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et soit g la fonction définie par $g(x, y, z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$. Déterminer les dérivées partielles de g, et montrer que si $a = (t, t, t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ alors on a $\frac{\partial g}{\partial x}(a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a) + \frac{\partial g}{\partial z}(a) = 0$.

Exercice 38
Calculer la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x^2y - 2z, y^3 + \cos(xz), ze^{xy})$.

Exercice 39
Soit $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (xz, xyz, -y^2)$. Calculer $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{F}$. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$? Existe-t-il une fonction $\overrightarrow{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{G}$?

Et pour s'entraîner :

Exercice 40

Soit a un réel non entier, donc $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique f par $f(x) = \cos(ax)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Calculer la série de Fourier de f.
2. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{a^2 - n^2}$ est convergente.
3. Montrer qu'on a la formule $\dfrac{\pi}{\tan(\pi a)} = \dfrac{1}{a} + 2a \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a^2 - n^2}$.

Exercice 41

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction. On pose $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$. Montrer que g vérifie l'équation $t\dfrac{\partial g}{\partial s} + s\dfrac{\partial g}{\partial t} = 0$.
2. Soit $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2x, 2z, 2y)$. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}$. En déduire qu'il existe f, et déterminer une telle fonction f, telle que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f$.

Solutions de l'exercice 40 :

1. f est paire, donc $b_n(f) = 0$. On trouve $a_n(f) = (-1)^n \dfrac{2a\sin(\pi a)}{\pi(a^2 - n^2)}$. La série de Fourier de f est donc
$$\mathrm{SF}_f(x) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi a)}{a^2 - n^2} \cos(nx).$$
2. Pour $n > a$ on a $\dfrac{1}{a^2 - n^2} < 0$, et on a l'équivalent $\dfrac{1}{a^2 - n^2} \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{n^2}$, qui est une série convergente. On conclut grâce au critère d'équivalence pour les séries de signe constant.
3. On applique le théorème de Dirichlet (f est continue ici) : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a
$$\cos(ax) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi a)}{a^2 - n^2} \cos(nx).$$
On prend $x = \pi$ (donc $\cos(nx) = (-1)^n$), on divise des deux côtés par $\sin(\pi a)$ ($\neq 0$ car $a \notin \mathbb{Z}$) et on obtient le résultat.

Solutions de l'exercice 41 :

1. On calcule les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f : $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = 2s\frac{\partial f}{\partial x}(s^2 - t^2, t^2 - s^2) - 2s\frac{\partial f}{\partial y}(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ et $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = -2t\frac{\partial f}{\partial x}(s^2 - t^2, t^2 - s^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$, ce qui montre la formule.
2. On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} = (0,0,0)$. Donc une telle fonction f existe, $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel. En regardant les dérivées partielles et en primitivant chacune, on trouve qu'une solution est $f(x,y,z) = x^2 + 2yz$.

Vecteurs - Matrices
Feuille n°6

Exercice 42
Montrer que les sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ sont des ss-e.v. de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base et la dimension.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y - 2z = 0\right\}, \quad E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}\right\}.$$

Exercice 43
On définit trois sous-ensembles du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 5x + 2y - 3z = 0\right\}, \quad F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\right\},$$
$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \exists \alpha \in \mathbb{R}, (x,y,z) = \alpha(-2,1,-1)\right\}$$

1. Vérifier que E, F et G sont des ss-e.v. de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la dimension de E et celle de F. Peut-on avoir $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus G = F \oplus G$.

Exercice 44
1. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Sont-elles liées ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

   1) $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,2,-1)$ 2) $u_1 = (1,3,-2), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (2,3,-1)$
   3) $u_1 = (0,2,1), u_2 = (0,1,2), u_3 = (1,2,0)$ 4) $u_1 = (1,1,-2), u_2 = (0,0,0), u_3 = (2,-2,-2)$
   5) $u_1 = (1,0,-1), u_2 = (2,0,1), u_3 = (0,1,0)$

2. Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels engendrés par chacune de ces familles de vecteurs.

Exercice 45
1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Peut-on calculer le produit AB ? le produit BA ? Si oui, les calculer.
2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer les produits AB et BA.

Exercice 46
Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 47
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible.

2. Calculer AP et PB. Que peut-on en déduire sur A et B ?
3. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 0$ (on pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$).

Exercice 48

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 4e_3$, $f(e_2) = 3e_1 - 2e_2 - e_3$, $f(e_3) = e_2 + 2e_3$.

1. Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Que vaut $f(x, y, z)$?
2. Déterminer la matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer $\operatorname{Ker} f$. La matrice A est-elle inversible ?

Et pour s'entraîner :

Exercice 49

1. Montrer que $E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer la dimension et une base de ce sous-espace.
2. La famille $\{(1, 1, 1), (-1, 2, 1), (2, 5, 4)\}$ est-elle libre ? liée ? génératrice de $\mathbb{R}^3$? une base de $\mathbb{R}^3$?
3. On considère le plan P d'équation $3x + y - 4z = 0$. Trouver une base de P, et déterminer un sous-espace vectoriel F tel que $\mathbb{R}^3 = P \oplus F$.

Exercice 50

1. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(2e_1 - e_2 - e_3)$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$. M est-elle inversible ?

Solutions de l'exercice 8 :

1. $\dim E_1 = 1$, une base est par exemple $u = (2, 1, -1)$.
2. La famille n'est pas libre, car $(2, 5, 4) = 3 \cdot (1, 1, 1) + (-1, 2, 1)$. Donc elle est liée, elle n'est ni génératrice ni une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Une base de P est par exemple $\{(1, -3, 0), (0, 4, 1)\}$. Par des arguments de dimension, F est nécessairement de dimension 1, donc est une droite, et une base de F est un vecteur u tel que $\{u, (1, -3, 0), (0, 4, 1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On peut donc choisir n'importe quel vecteur $u \notin P$. Par exemple, F peut être la droite engendrée par $(1, 0, 0)$.

Solutions de l'exercice 9 :

1. On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On a $f(e_1) = (1, 2, 0), f(e_2) = (3, -1, 2), f(e_3) = (-2, -3, -1)$ et $f(2e_1 - e_2 - e_3) = (1, 8, -1)$. On a $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0)\}$, donc M est inversible.

Changement de bases - Déterminants
Feuille n°7

Exercice 51
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ la famille définie par

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 - e_3, \qquad e'_2 = -e_2 + e_3, \qquad e'_3 = e_1 + 2e_3.$$

1. Montrer que la famille $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3, \qquad f(e_2) = e_2 - 3e_3, \qquad f(e_3) = e_1 + 2e_2.$$

   Déterminer l'action de f sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 52
On cherche à déterminer les solutions du système différentiel linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rclcl} x'(t) & = & -y(t) & - & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & z(t) \\ 5z'(t) & = & -6x(t) & + & 8y(t). \end{array}\right.$$

1. Déterminer la matrice A de ce système. On note f l'endomorphisme dont la matrice est A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
2. On pose $e'_1 = 3e_1 - 4e_2 + 5e_3$, $e'_2 = 3e_1 + e_2 - 2e_3$ et $e'_3 = -e_1 - 2e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice C de f dans cette base.
3. Résoudre le système $U'(t) = CU(t)$, où $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.
4. En déduire les solutions du système (S).

Exercice 53
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & -6 \\ -9 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme dont la matrice est A dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. On pose $e'_1 = e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = 2e_1 + 3e_3$.

1. Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base, et déterminer la matrice Δ de f dans cette base.
2. Soit n un entier positif. Déterminer Δ^n.
3. En déduire la valeur de A^n.

Exercice 54
Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 978639626547895214 & 978639626547895215 \\ 978639626547895216 & 978639626547895217 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 55

1. Soit $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1+\lambda & -2 & \lambda \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de λ la matrice A_λ est-elle inversible ?
   Pour ces valeurs, déterminer la matrice $\mathrm{Com}\, A_\lambda$ et en déduire A_λ^{-1}.

2. Résoudre à l'aide des formules de Cramer le système suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ -x & + & 4y & + & 3z & = & 1 \end{array} \right. .$$

Exercice 56

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle inversible ?

Et pour s'entraîner :

Suite de l'exercice 56 :

1. Trouver une base de $\ker(f - \mathrm{id}_3)$ et une base de $\ker(f + I_3)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - \mathrm{id}_3) \oplus \ker(f + \mathrm{id}_3)$.
3. Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f - \mathrm{id}_3) \oplus \ker(f + \mathrm{id}_3).$$

4. En déduire sans calcul la valeur de A^2, puis de A^n pour tout $n \geq 0$.

Solutions :

1. On a $\dim \ker(f - \mathrm{id}_3) = 2$, une base est donnée par $\{u_1, u_2\}$ où $u_1 = (1, 2, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$. On a $\dim \ker(f + \mathrm{id}_3) = 1$, une base est donnée par $\{u_3\}$ où $u_3 = (-1, 1, 2)$.
2. On a bien $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f - \mathrm{id}_3) + \dim \ker(f + \mathrm{id}_3)$. De plus, on a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base.
3. Par définition, $(f - \mathrm{id}_3)(u_1) = f(u_1) - u_1 = 0$, donc $f(u_1) = u_1$. De même, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = -u_3$. Donc la matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $A = PDP^{-1}$, et donc pour tout $n \geq 0$ on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Or $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, donc $D^n = I_3$ si n est pair et $D^n = D$ si n est impair. On en déduit que $A^n = I_3$ si n est pair, et $A^n = A$ si n est impair.

Diagonalisation

Feuille n°8

Exercice 57

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha+2 & -2\alpha-1 & -2\alpha \\ \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$Â·

1. Pour quelles valeurs de α cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de α cette matrice est-elle inversible ?
3. On considère $\alpha = 0$. Déterminer la matrice A_0^n pour tout n entier positif.

Exercice 58

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 5 \\ -30 & -28 & -10 \\ 30 & 30 & 12 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 59

Soit m un réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de A ? Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{lclclcl} x'(t) & = & x(t) & & & + & z(t) \\ y'(t) & = & -x(t) & + & 2y(t) & + & z(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & & \end{array} \right.$.

Exercice 60

Trouver l'ensemble des solutions du système différentiel suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lclclcl} x'(t) & = & & & & & z(t) \\ y'(t) & = & 5x(t) & - & y(t) & - & 5z(t) \\ z'(t) & = & -3x(t) & + & y(t) & + & 4z(t) \end{array} \right. .$$

Solutions de l'exercice 58 :

1. A a 3 valeurs propres distinctes, -1, 0 et 1, donc A est diagonalisable. On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On a $P_B(x) = -(x-2)^2(x+3)$, et $\dim E_2 = 2$, donc B est diagonalisable. On a $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.
3. On a $P_C(x) = -(x-1)^3$, et on n'a pas $\dim E_1 = 3$ car C n'est pas la matrice identité. Donc C n'est pas diagonalisable.

Solutions de l'exercice 60 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, on a $P_A(x) = -(x-1)(x-(1-i))(x-(1+i))$. Donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1+2i & -1-2i \\ 1 & 1-i & 1+i \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$.

Les solutions complexes de (S) sont $\alpha \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^{(1-i)t} \\ (-1+2i)e^{(1-i)t} \\ (1-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ (-1-2i)e^{(1+i)t} \\ (1+i)e^{(1+i)t} \end{pmatrix}$ avec α, β, γ éléments de $\mathbb{C}$.

Les solutions réelles de S sont donc les combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \qquad t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t(-\cos t + 2\sin t) \\ e^t(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \qquad t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ e^t(-\sin t - 2\cos t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

(les deux dernières fonctions étant respectivement égales à $\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} e^{(1-i)t} \\ (-1+2i)e^{(1-i)t} \\ (1-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ (-1-2i)e^{(1+i)t} \\ (1+i)e^{(1+i)t} \end{pmatrix}\right]$ et à $\frac{1}{2i}\left[\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ (-1-2i)e^{(1+i)t} \\ (1+i)e^{(1+i)t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{(1-i)t} \\ (-1+2i)e^{(1-i)t} \\ (1-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix}\right]$).