Examen Première Session 15 Octobre 2004

Epreuve de Mathématiques

Durée: deux heures.
Documents autorisés: polycopié du cours et exercices faits en T.D.
Calculatrices, ordinateurs, téléphones mobiles, etc... interdits
Les cinq exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut.

Premier Exercice.

1. Déterminer une primitive de $f(t) = \ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$; (on pourra faire une intégration par parties). Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.
2. En déduire que l'intégrale généralisée $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\cos t\,dt$ est absolument convergente.
3. Peut-on en déduire que J est convergente ?

Deuxième Exercice.

On considère les séries de terme général:

$$u_n = \frac{2^n - 1}{5^n + 1}\,\mathrm{e}^{in} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

1. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.
2. Calculer $|u_n|$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Troisième Exercice.

Soit f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ pour tout $t \in]-\pi, \pi]$ et 2π-périodique.

1. f est-elle paire ? impaire ? continue sur $\mathbb{R}$?
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ déterminer la série de Fourier $\mathrm{SF}_f(x)$ de f en x; (on pourra pour calculer les coefficients de Fourier faire deux intégrations par parties successives).
3. On considère la série de réels $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Montrer qu'elle est convergente, puis calculer sa somme en appliquant la question précédente pour une valeur bien choisie de x.
4. A l'aide de la formule de Plancherel-Parseval et de la question 2), calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

.../...

Quatrième Exercice.

On fixe un paramètre réel α et on considère la fonction vectorielle $\vec{F}_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$\vec{F}_\alpha(x,y,z) = (\, yz \,,\, 2y + \alpha xz \,,\, xy \,).$$

1. Calculer le rotationnel de $\vec{F}_\alpha$. En déduire qu'il existe une unique valeur du paramètre α pour laquelle ce rotationnel est nul en tout point de $\mathbb{R}^3$.

   Pour cette valeur de α, déterminer une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{F}_\alpha = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

2. Calculer la divergence de $\vec{F}_\alpha$.

   Peut-on déterminer une fonction vectorielle $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{G}$?

3. Déterminer la matrice jacobienne de $\vec{F}_\alpha$ en un point quelconque (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$. Calculer son déterminant.

Cinquième Exercice.

On considère le système différentiel suivant, dans lequel x, y, z désignent trois fonctions d'une variable réelle t dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) &= 17x(t) - 4y(t) - 12z(t) \\ y'(t) &= 32x(t) - 7y(t) - 24z(t)\,. \\ z'(t) &= 16x(t) - 4y(t) - 11z(t) \end{cases}$$

1. On note A la matrice de ce système.

   1.a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

   1.b. Déterminer les valeurs propres de A en précisant quelle est leur multiplicité algébrique.

   1.c. Déterminer pour chaque valeur propre de A une base du sous-espace propre associé.

   1.d. Montrer que la matrice A est diagonalisable; donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $A = PDP^{-1}$. (On ne demande pas de calculer la matrice P^{-1}).

2 Résoudre le système différentiel (S).

Examen Première Session 6 Octobre 2005

Epreuve de Mathématiques

Durée: deux heures.
Documents autorisés: polycopié du cours et exercices faits en T.D.
Calculatrices, ordinateurs, téléphones mobiles, etc... interdits
Les cinq exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut.

Premier Exercice.

Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt$ converge, et calculer dans ce cas sa valeur.

Deuxième Exercice.

1. Montrer que la série numérique : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et 2π-périodique définie par $f(t) = 1$ si $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ et $f(t) = \frac{1}{2}$ si $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

2.a. Tracer le graphe de la fonction f.

2.b. Calculer le coefficient de Fourier $a_0(f)$, puis les coefficients de Fourier $a_n(f)$ pour tout $n \geq 1$.

2.c. Déterminer la série de Fourier $\mathrm{SF}_f(x)$.

2.d. En déduire la valeur de la somme de la série : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3. Déterminer la nature (convergente ou divergente) de chacune des séries numériques suivantes, en justifiant avec soin les réponses (sans cherche à calculer la somme de celles qui convergent):

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^{in}}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Troisième Exercice.

Soit $y(x)$ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, telle que $y(x)$ soit la somme d'une série entière:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{R}.$$

1. Ecrire le développement en série entière de $y'(x)$ et $y''(x)$. Calculer $y(0)$ et $y'(0)$.

2. Déterminer la suite des coefficients $(a_n)_{n\geq 0}$ de sorte que $y(x)$ vérifient:
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \quad \text{avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1.$$
Montrer que $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$ pour tout $n \geq 1$. Reconnaître alors la fonction $y(x)$ solution.

3. Par une autre méthode, résoudre l'équation différentielle
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0,$$
et retrouver le résultat de la question précédente.

.../...

Quatrième Exercice.

On considère la fonction vectorielle $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$\vec{F}(x,y,z) = (\, 2xz^3 + 6y \,,\, 6x - 2yz \,,\, 3x^2z^2 - y^2 \,).$$

1. Calculer le rotationnel de $\vec{F}$. Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

3. Déterminer la matrice jacobienne de $\vec{F}$ en un point quelconque (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

Cinquième Exercice.

On considère le système différentiel suivant, dans lequel x, y, z désignent trois fonctions d'une variable réelle t dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = -4x(t) - 2y(t) - 5z(t) \\ y'(t) = 5x(t) + 3y(t) + 5z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

1. On note A la matrice de ce système.

   1.a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

   1.b. Déterminer les valeurs propres de A.

   1.c. Déterminer pour chaque valeur propre de A une base du sous-espace propre associé.

   1.d. Montrer que la matrice A est diagonalisable; donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $A = PDP^{-1}$. (On ne demande pas de calculer la matrice P^{-1}).

2. Résoudre le système différentiel (S).