Université Blaise Pascal,
U.F.R. Sciences et Technologies,
Département de Mathématiques et Informatique

Préparation au CAPES de Mathématiques

Année 2008-2009

Quelques notions de base de la géométrie affine

François Dumas

Ce document n'est pas un cours. Sans chercher à être complet sur les sujets abordés ni à présenter des exemples diversifiés de mise en œuvre ou d'applications, il tente simplement de résumer les notions les plus élémentaires développées lors des enseignements classiques de géométrie de licence. C'est un outil destiné aux étudiants préparant le CAPES afin de les aider dans leur travail personnel.

La matière des divers paragraphes ne saurait en aucun cas constituer le développement d'une leçon sur le sujet ; il manque pour cela tous les exemples, les applications, l'introduction motivée des notions, la mise en perspective du contexte retenu,... qui font la qualité d'un exposé de CAPES. En revanche, les pages qui suivent peuvent éventuellement permettre de resituer le contenu des leçons et dossiers d'oral, développé généralement à un niveau élémentaire, dans un contexte théorique plus vaste et plus conceptuel. Il ne s'agit pas bien sûr de faire référence de façon explicite et systématique à ce cadre théorique général dans les exposés, mais d'acquérir sur les situations particulières étudiées le recul mathématique nécessaire pour assurer des présentations pertinentes, cohérentes et bien organisées.

A ce titre, ce document peut aussi contribuer à avoir une vision synthétique claire des connaissances mobilisables pour la recherche et la rédaction des problèmes d'écrit. Il ne traite que de géométrie affine générale. Il pourra être éventuellement complété par un résumé de même nature sur la géométrie euclidienne.

Ce texte a été rédigé dans une certaine hâte. Il contient nécessairement des erreurs, des coquilles, des imprécisions, des points à améliorer. Je vous remercie par avance de bien vouloir me les signaler.

Francois.Dumas@univ-bpclermont.fr http://math.univ-bpclermont.fr/~fdumas

version du 25 septembre 2008, corrections au 25 octobre 2010

Quelques notions de base de la géométrie affine

1 Espace affine

Définition. Un *espace affine* sur $\mathbb{R}$ est la donnée d'un triplet formé par:

(i) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, (ses éléments sont des *vecteurs*; on les notera par des lettres minuscules surmontés d'une flèche $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \ldots$; en particulier le *vecteur nul* sera noté $\overrightarrow{0}$);

(ii) un ensemble non-vide $\mathcal{E}$, (ses éléments sont des *points*; on les notera par des lettres majuscules $A, B, C, M, N, P, \ldots$);

(iii) une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E, (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ satisfaisant les deux axiomes suivants:

$$\text{(A1)} \quad \boxed{\forall\, A \in \mathcal{E},\ \forall\, \overrightarrow{u} \in E,\ \exists!\ M \in \mathcal{E},\quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}},$$

$$\text{(A2)} \quad \boxed{\forall\, A, B, C \in \mathcal{E},\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}} \quad \text{(relation de Chasles).}$$

Terminologie. Dans la définition précédente, on dit par abus de langage que $\mathcal{E}$ est un espace affine sur $\mathbb{R}$, et que E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension finie n lorsque le $\mathbb{R}$-e.v. E est de dimension finie n. Au niveau du CAPES, on travaillera presque toujours dans un espace affine de dimension 2 ou 3.

Remarques. Les observations pratiques suivantes découlent directement de la définition.

• *Nullité d'un vecteur.* $\boxed{\forall\, A, B \in \mathcal{E},\quad [\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}\ ] \Leftrightarrow [\ A = B\ ]}$.

En effet: d'après (A2), $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$, donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$, ce qui implique $B = A$ par unicité dans l'axiome (A1).

• *Opposé d'un vecteur.* $\boxed{\forall\, A, B \in \mathcal{E},\quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$. *En effet*: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

• *Règle du parallélogramme.*

$\boxed{\forall\, A, B, C, D \in \mathcal{E},\quad [\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\ ] \Leftrightarrow [\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}\ ]}$.

Cela résulte immédiatement de (A2); écrire les détails à titre d'exercice.

Figure

• L'axiome (A1) équivaut au fait que, pour tout point A fixé dans $\mathcal{E}$, l'application $\varphi_A : \mathcal{E} \to E$ définie par $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est bijective ; sa bijection réciproque est alors l'application $\psi_A : E \to \mathcal{E}$ définie par $\overrightarrow{u} \mapsto \psi_A(\overrightarrow{u}) :=$ l'unique point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.

• L'axiome (A1) équivaut aussi au fait que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ fixé dans E, l'application $\tau_{\overrightarrow{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $A \mapsto \tau_{\overrightarrow{u}}(A) :=$ l'unique point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$, est bijective. Cette application est appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ (voir plus loin).

Commentaire. Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, on dit que le couple de points (A, B) est un *représentant* du vecteur $\overrightarrow{u}$, dans lequel A est l'*origine* et B l'*extrémité*. Tout autre couple de points (C, D) tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CD}$ est un autre représentant de $\overrightarrow{u}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application qui, à tout point A, associe le point B qui est l'extrémité de $\overrightarrow{u}$ lorsque son origine est en A.

Le point de vue retenu dans ce document définit un espace affine à partir de la notion supposée connue d'espace vectoriel. On peut envisager une autre présentation consistant à partir intuitivement d'un ensemble de points $\mathcal{E}$, et à considérer dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ la relation dite d'*équipollence*, définie par: $(A, B) \sim (C, D)$ lorsque $ABDC$ est un parallélogramme. On vérifie que c'est une relation d'équivalence, et un vecteur est alors défini comme une classe d'équivalence pour cette relation [i.e. $\overrightarrow{AB}$ est l'ensemble des couples de points (C, D) équipollents à (A, B), de sorte que l'on retrouve bien la règle du parallélogramme]. Il s'agit ensuite de récupérer géométriquement les diverses opérations sur les vecteurs correspondant à la structure d'espace vectoriel.

2 Sous-espace affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E.

Définition. Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ lorsqu'il existe un point A dans $\mathcal{F}$ tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ pour M décrivant $\mathcal{F}$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Il en résulte en particulier qu'un sous-espace affine n'est jamais vide, et que $\mathcal{E}$ lui-même est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Le point fondamental est que le sous-espace vectoriel dans la définition ci-dessus ne dépend en fait pas du point A.

Proposition et définition. *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$; il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout $A \in \mathcal{E}$, on ait $F = \{ \overrightarrow{AM} \ ; \ M \in \mathcal{F} \}$. On dit que F est le sous-espace vectoriel directeur du sous-espace affine $\mathcal{F}$, ou encore que $\mathcal{F}$ est dirigé par F.*

Preuve. Par hypothèse, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\varphi_A(\mathcal{F})$ est un ss-e.v. de E. Fixons $B \in \mathcal{F}$ quelconque et montrons que $\varphi_A(\mathcal{F}) = \varphi_B(\mathcal{F})$. On a $\overrightarrow{AB} = \varphi_A(B) \in \varphi_A(\mathcal{F})$. Quel que soit $M \in \mathcal{F}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ appartiennent à $\varphi_A(\mathcal{F})$ qui est un sous-espace vectoriel, donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \in \varphi_A(\mathcal{F})$. Ceci prouve que $\varphi_B(\mathcal{F}) \subseteq \varphi_A(\mathcal{F})$. Pour la réciproque, notons que l'on a aussi $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \in \varphi_A(\mathcal{F})$; il existe donc $N \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \varphi_B(\mathcal{F})$. On conclut $\varphi_A(\mathcal{F}) \subseteq \varphi_B(\mathcal{F})$, d'où l'égalité voulue. □

Réciproquement, la donnée d'un sous-espace vectoriel de E et d'un point de $\mathcal{E}$ détermine un sous-espace affine de $\mathcal{E}$:

Théorème et définition. *Soient E un sous-espace vectoriel de E et A un point de $\mathcal{E}$. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tel que A appartienne à $\mathcal{F}$ et tel que F soit le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et dirigé par F.*

Preuve. Posons $\mathcal{F} = \varphi_A^{-1}(F) = \{M \in \mathcal{E} \, ; \, \overrightarrow{AM} \in F\}$. On a $A \in \mathcal{F}$ puisque $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \in F$; de plus, par construction, $\varphi_A(\mathcal{F}) = F$, donc $\mathcal{F}$ est un ss-e.a. dirigé par F. Pour l'unicité, soit $\mathcal{F}'$ un ss-e.a. de $\mathcal{E}$ passsant par A et dirigé par F. D'après la proposition précédente, cela signifie que $\varphi_A(\mathcal{F}') = F$. Mais alors $\varphi_A(\mathcal{F}) = \varphi_A(\mathcal{F}')$ implique $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ par bijectivité de φ_A. □

En résumé, si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et si F est le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{F}$:

- $\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{E} \ ; \ \overrightarrow{AM} \in F \}$ et $F = \{\overrightarrow{AM} \ ; \ M \in \mathcal{F} \}$,
- $\forall A \in \mathcal{F}, \ \forall \ \overrightarrow{u} \in F, \ \exists! \ M \in \mathcal{F}, \ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$,
- $\forall A \in \mathcal{F}, \ \forall B \in \mathcal{F}, \ \overrightarrow{AB} \in F$.

On a une notion naturelle et évidente de dimension d'un sous-espace affine, la dimension de $\mathcal{F}$ étant définie comme la dimension du sous-espace vectoriel F de E directeur de $\mathcal{F}$. En particulier, si E est de dimension finie n, on a $\dim \mathcal{E} = \dim E = n$ et $\dim \mathcal{F} = \dim F \leq n$ pour tout sous-espace affine

$\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$. Il résulte aisément des propositions précédentes que, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux sous-espaces affines, on a:

$[\ \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}\ ] \Rightarrow [\ \dim \mathcal{F}' \leq \dim \mathcal{F}\ ]$, ainsi que $[\ \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ et $\dim \mathcal{F}' = \dim \mathcal{F}\ ] \Rightarrow [\ \mathcal{F}' = \mathcal{F}\ ]$.

Un sous-espace affine de dimension 0 est un singleton $\{A\}$ formé d'un seul point de $\mathcal{E}$. Un sous-espace affine de dimension 1 s'appelle une *droite affine*. Un sous-espace affine de dimension 2 s'appelle un *plan affine*. Dans le cadre de la géométrie du CAPES, on retiendra que:

− si l'on travaille dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2, les sous-espaces affines sont: les singletons (formés d'un seul point de $\mathcal{E}$), les droites affines contenues dans $\mathcal{E}$, et le plan $\mathcal{E}$ lui-même;

− si l'on travaille dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, les sous-espaces affines sont: les singletons (formés d'un seul point de $\mathcal{E}$), les droites affines contenues dans $\mathcal{E}$, les plans affines contenus dans $\mathcal{E}$, et l'espace $\mathcal{E}$ lui-même.

3 Parallélisme

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E.

Définition. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, de sous-espaces vectoriels directeurs respectifs F et F'. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont *parallèles* lorsque $F = F'$. On note alors $\mathcal{F} /\!/ \mathcal{F}'$.

En particulier, deux sous-espaces affines parallèles sont nécessairement de même dimension. Il est facile de vérifier que le parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$.

Proposition. *Deux sous-espaces affines parallèles sont nécessairement égaux ou disjoints.*

Preuve. Considérons comme ci-dessus $\mathcal{F} /\!/ \mathcal{F}'$, avec $F = F'$. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ne sont pas disjoints, considérons $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$. Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ passent tous les deux par A en étant dirigés par le même sous-espace vectoriel $F = F'$. On déduit de l'unicité dans le théorème de la section 2 que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. □

Attention, la réciproque est trivialement fausse en général ! Dans un espace affine de dimension 3, deux droites qui ne sont pas incluses dans un même plan sont forcément disjointes sans être parallèles. Il y a cependant des arguments de dimensions qui permettent des résultats partiels:

Observation pratique.

− *Si $\mathcal{E}$ est un plan affine, deux droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{E}$ sont parallèles si et seulement si elles sont égales ou disjointes.*

− *Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension 3, deux plans affines $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{E}$ sont parallèles si et seulement s'ils sont égaux ou disjoints.*

Preuve. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites dans un plan affine $\mathcal{E}$. La proposition précédente montre l'un des sens de l'équivalence, et il est trivial que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ implique $\mathcal{D} /\!/ \mathcal{D}'$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$ implique $\mathcal{D} /\!/ \mathcal{D}'$. Pour cela, supposons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles. Les droites vectorielles D et D' dirigeant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement sont donc distinctes. Il en résulte que si l'on choisit $\overrightarrow{u} \in D$ et $\overrightarrow{v} \in D'$ non-nuls, ils ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre du plan vectoriel E, et donc une base de E. Prenons $A \in \mathcal{D}$ et $A' \in \mathcal{D}'$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AA'} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$. Comme $\lambda \overrightarrow{u} \in D$ et $A \in \mathcal{D}$, il existe $M \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$. Donc $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AA'} = \lambda \overrightarrow{u} - \lambda \overrightarrow{u} - \mu \overrightarrow{v} = -\mu \overrightarrow{v}$. On a ainsi $\overrightarrow{A'M} \in D'$, ce qui, puisque $A' \in \mathcal{D}'$, implique $M \in \mathcal{D}'$. On conclut que $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$, ce qui achève la preuve du premier point. La preuve du second point est laissée au lecteur. □

Figure

Figure

Commentaire. Une propriété fondamentale dans la formulation axiomatique de la géométrie classique est l'axiome (ou postulat) d'Euclide :

> si $\mathcal{D}$ est une droite et A un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, alors il passe par A une droite et une seule parallèle à $\mathcal{D}$.

Dans la mesure où être parallèle signifie avoir le même sous-espace vectoriel directeur (ici la même droite vectorielle directrice), cet énoncé "traditionnel" est une formulation du théorème fondamental de la section 2. Et elle est de ce fait valable pour tout sous-espace affine. Par exemple:

> si $\mathcal{P}$ est un plan et A un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$, alors il passe par A un plan et un seul parallèle à $\mathcal{P}$.

4 Base affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E.

Proposition. *Une intersection de sous-espaces affines, à condition qu'elle soit non vide, est un sous-espace affine, dirigé par l'intersection des sous-espaces vectoriels directeurs.*

Preuve. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Pour tout $i \in I$, notons F_i le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{F}_i$. On sait que $F = \cap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. Posons $\mathcal{F} = \cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ et supposons que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Prenons $A \in \mathcal{F}$ quelconque. Parce que φ_A est injective (car bijective), on a $\varphi_A(\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i) = \cap_{i\in I}\varphi_A(\mathcal{F}_i)$, c'est-à-dire $\varphi_A(\mathcal{F}) = F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E, ceci prouve que $\mathcal{F}$ est un ss-e.a. de $\mathcal{E}$ dirigé par F. □

Il en résulte (suivant un argument classique en mathématiques !) que, pour toute partie non-vide $\mathcal{X}$ de $\mathcal{E}$, on peut considérer le sous-espace affine $\langle\mathcal{X}\rangle$ défini comme l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{X}$. On vérifie de façon immédiate que c'est le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{X}$. On l'appelle le *sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{X}$.*

Le théorème ci-dessous donne une description explicite du sous-espace affine engendré par un nombre fini de points.

Théorème. *Soient $A_0, A_1, \ldots, A_p$ des points distincts de $\mathcal{E}$, avec $p \geq 0$. Le sous-espace affine engendré par $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$ est égal au sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A_0 et dirigé par le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$. Il est de dimension $\leq p$.*

Preuve. Posons $\mathcal{X} = \{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les p vecteurs $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$. Notons $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A_0 et dirigé par F. On a $\mathcal{F} = \varphi_{A_0}^{-1}(F)$. En particulier $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$. Soit maintenant $\mathcal{H}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{X}$. Son sous-espace vectoriel directeur $H = \varphi_{A_0}(\mathcal{H})$ contient les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}$, donc le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de H. On en déduit que $\varphi_{A_0}^{-1}(F) \subseteq \varphi_{A_0}^{-1}(H)$, c'est-à-dire $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. On a ainsi montré que le sous-espace affine $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{X}$ et est inclus dans tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{X}$. On conclut $\mathcal{F} = < \mathcal{X} >$. □

En résumé et en pratique:

Un point M de $\mathcal{E}$ appartient au sous-espace affine engendré par $A_0, A_1, \ldots, A_p$	$\Leftrightarrow$	$\exists\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p,\ \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$

Il est clair que, dans ce théorème, A_0 peut être remplacé par n'importe lequel des A_i.

La question qui se pose alors est celle de savoir si la famille de vecteurs $X_0 = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$ est libre ou non, dans la mesure où il est clair que:

$$[X_0 \text{ libre}] \Leftrightarrow [X_0 \text{ base de } F] \Leftrightarrow [\dim F = p] \Leftrightarrow [\dim \mathcal{F} = p].$$

Là encore, c'est une propriété qui ne dépend pas du choix de A_0, comme le montre le lemme suivant.

Lemme. *Soient $A_0, A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathcal{E}$ deux à deux distincts. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *la famille $X_0 = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$ est libre dans E ;*

(ii) *pour tout $0 \leq j \leq p$, la famille $X_j = \{\overrightarrow{A_jA_0}, \ldots, \overrightarrow{A_jA_{j-1}}, \overrightarrow{A_jA_{j+1}}, \ldots, \overrightarrow{A_jA_p}\}$ est libre dans $\mathcal{E}$;*

(iii) *aucun des points A_i n'appartient au sous-espace affine engendré par les p autres points.*

Preuve. Supposons X_0 libre, et fixons $0 < j \leq p$. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_jA_i} = \overrightarrow{0}$. En décomposant $\overrightarrow{A_jA_i} = \overrightarrow{A_jA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}$, il vient: $\big(\sum_{i \neq j} \lambda_i\big)\overrightarrow{A_jA_0} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \overrightarrow{0}$. Parce que X_0 est libre, on déduit $\sum_{i \neq j} \lambda_i = 0$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$ distinct de j. D'où finalement $\lambda_i = 0$ pour tout $0 \leq i \leq p$ distinct de j. Ceci prouve que (i) $\Rightarrow$ (ii), et donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Supposons maintenant qu'il existe $0 \leq i \leq p$ tel que A_i appartienne au sous-espace affine engendré par $A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_p$. Alors, pour tout $0 \leq j \neq i \leq p$, il existe des coefficients $\alpha_k \in \mathbb{R}$ pour $0 \leq k \neq i, k \neq j \leq p$ tel que $\overrightarrow{A_jA_i} = \sum_k \alpha_k \overrightarrow{A_jA_k}$, ou encore $\sum_k \alpha_k \overrightarrow{A_jA_k} - \overrightarrow{A_jA_i} = \overrightarrow{0}$, ce qui prouve que la famille X_j est liée. Par contraposée, ceci montre que (ii) $\Rightarrow$ (iii). La réciproque s'obtient par des calculs analogues. $\square$

Définitions. Une famille $\mathcal{X}$ de $p+1$ points deux à deux distincts de $\mathcal{E}$ est dite *affinement libre* si elle satisfait les conditions équivalentes de la proposition précédente.
Lorsque $\mathcal{X}$ est affinement libre, on dit que $\mathcal{X}$ est une *base affine* du sous-espace affine $\mathcal{F} = \langle \mathcal{X} \rangle$ engendré par $\mathcal{X}$.

$\{A_0, A_1, \ldots A_p\}$ est une base affine du sous-espace affine $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall\ M \in \mathcal{F},\ \exists!\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p,\ \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}}$

Il est clair dans ce cas que $\mathcal{F}$ est de dimension p (puisque X_0 est alors une base du sous-espace vectoriel F directeur de $\mathcal{F}$), et que l'on peut remplacer A_0 par n'importe lequel des A_i.

• *Un premier cas particulier.* Prenons deux points A et B distincts dans $\mathcal{E}$. Alors $X = \{\overrightarrow{AB}\}$ est libre, donc le sous-espace affine engendré par $\mathcal{X} = \{A, B\}$ est de dimension 1: on l'appelle la droite affine passant par A et B, noté (AB). En particulier, deux points sont toujours alignés.
La droite affine (AB) est dirigée par la droite vectorielle Δ de base $\{\overrightarrow{AB}\}$. On a pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$[A, B, M$ alignés$] \Leftrightarrow [M \in (AB)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM} \in \Delta] \Leftrightarrow [\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\}$ liée$] \Leftrightarrow [\exists\ \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}]$.

$[A, B, M$ non alignés$] \Leftrightarrow [\{A, B, M\}$ affinement libre$]$.

• *Un second cas particulier.* Prenons trois points A, B, C non alignés dans $\mathcal{E}$. Alors $X = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est libre, donc le sous-espace affine engendré par $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$ est de dimension 2: on l'appelle le plan affine passant par A, B et C, noté (ABC). En particulier trois points sont toujours coplanaires.
Le plan affine (ABC) est dirigé par le plan vectoriel Π de base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$. On a pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$[A, B, C, M$ coplanaires$] \Leftrightarrow [M \in (ABC)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM} \in \Pi]$
$\Leftrightarrow [\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\}$ liée$] \Leftrightarrow [\exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}]$.

$[A, B, C, M$ non coplanaires$] \Leftrightarrow [\{A, B, C, M\}$ affinement libre$]$.

Figure

Figure

5 Coordonnées et représentations paramétriques des sous-espaces affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, d'espace vectoriel associé E.

DÉFINITIONS. Un *repère cartésien* de $\mathcal{E}$ est un couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ formé par un point fixé quelconque $O \in \mathcal{E}$, appelé l'*origine* du repère, et une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ de E.
Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, les composantes du vecteurs $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont appelées les *coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère $\mathcal{R}$. On note: $M(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi:

$$\boxed{[\ M(x_1, \dots, x_n) \text{ dans le repère } (O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\ ] \iff [\ \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}\ ].}$$

Pour tout $1 \le i \le n$, soit A_i le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{e_i}$. Comme $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}\}$ est libre, la famille de $n+1$ points $\mathcal{X} = \{O, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est affinement libre. Comme de plus $\mathcal{B}$ engendre l'espace vectoriel E, le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{X}$ n'est autre que $\mathcal{E}$ lui-même. En d'autres termes, *$\mathcal{X}$ est une base affine de $\mathcal{E}$.*

Une conséquence triviale mais très utile pratiquement est que:

> *si $M(x_1, \dots, x_n)$ et $N(y_1, \dots, y_n)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, alors les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.*

Le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ étant fixé, considérons un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, de dimension p, passant par un point donné A, et dont le sous-espace vectoriel directeur F est donné par une base $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p}\}$. Chaque $\overrightarrow{v_i}$ se décompose dans $\mathcal{B}$ en $\overrightarrow{v_i} = \alpha_{i,1}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{i,2}\overrightarrow{e_2} + \cdots \alpha_{i,n}\overrightarrow{e_n}$, avec $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \le j \le n$ et tout $1 \le i \le p$. Donc, pour $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, on a:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \overrightarrow{e_j} \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_{i,j} \Big) \overrightarrow{e_j}.$$

Notons $A(a_1, \dots, a_n)$, de sorte que pour tout $M(x_1, \dots, x_n)$, on a $\overrightarrow{AM} = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)\overrightarrow{e_j}$.

L'équivalence $(M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in F)$ devient donc :

$$\boxed{M \in \mathcal{F} \iff \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R},\ \boxed{x_j = a_j + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_{i,j} \text{ pour tout } 1 \le j \le n}\quad (*)}$$

On dit que les relations $(*)$ constituent une *représentation paramétrique* du sous-espace affine $\mathcal{F}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Les relations $(*)$ traduisent que $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont les coordonnées du point M de $\mathcal{F}$ dans ce repère $(A, \mathcal{C})$ de $\mathcal{F}$.

• EXEMPLE. Plaçons-nous dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 rapporté à un repère ;

une représentation paramétrique de la droite passant par $A(a_1, a_2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(\alpha_1, \alpha_2)$ est : $\boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2 \end{cases},\quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

• EXEMPLE. Plaçons-nous dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 rapporté à un repère ;

− une représentation paramétrique de la droite passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est : $\boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda\alpha_3 \end{cases},\quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

− une représentation paramétrique du plan passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et dirigé par le plan vectoriel de base $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ avec $\overrightarrow{v}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\overrightarrow{w}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est : $\boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 \end{cases},\quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$.

6 Equations cartésiennes des sous-espaces affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, d'espace vectoriel associé E. On fixe un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ d'origine $O \in \mathcal{E}$ avec $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

Définition. On appelle *hyperplan affine* dans $\mathcal{E}$ tous sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension $n-1$.

Dans un plan affine, les hyperplans sont les droites affines. Dans un espace affine de dimension 3, les hyperplans sont les plans affines. Le sous-espace directeur H d'un hyperplan affine $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E, i.e. un hyperplan vectoriel. Le théorème ci-dessous est fondé sur le fait bien connu en algèbre linéaire (conséquence évidente de la formule du rang) que les hyperplans vectoriels sont les noyaux des formes linéaires non-nulles.

Théorème.

(i) *Pour tout hyperplan affine $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$, il existe $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, tel que $\mathcal{H}$ soit l'ensemble des points $M(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{E}$ vérifiant:*

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0} \qquad (**)$$

(ii) *Réciproquement, si $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, l'ensemble des points $M(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{E}$ vérifiant $(**)$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$.*

Preuve Pour montrer (i), soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine. Son ss-e.v. directeur H est un hyperplan vectoriel de E ; donc il existe une forme linéaire non-nulle $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $H = \operatorname{Ker} f$. Si l'on note $(a_1, \dots, a_n)$ les composantes de f dans la base duale $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de E^*, on a $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et, pour tout $\overrightarrow{u}(y_1, \dots, y_n)$, on peut calculer:

$$f(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\big(\sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{e_j}\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i y_j e_i^*(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i.$$

Donc H est l'hyperplan vectoriel de E d'équation $a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0$ dans $\mathcal{B}$. Soit $B(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{H}$. On a: $[\ M(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}\ ] \Leftrightarrow [\ \overrightarrow{BM} \in H\ ] \Leftrightarrow [\ a_1(x_1 - b_1) + \cdots + a_n(x_n - b_n) = 0\ ]$, d'où le résultat en posant $a_{n+1} = -(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$.

Pour (ii), supposons donné $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des points $M(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant $(**)$. Soit $B(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{H}$; (il en existe toujours car l'un au moins des a_i est non-nul). Comme $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n + a_{n+1} = 0$, on a pour tout $M(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$:

$$[M \in \mathcal{H}] \Leftrightarrow [a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n + a_{n+1}] \Leftrightarrow [a_1(x_1 - b_1) + \cdots + a_n(x_n - b_n) = 0].$$

Ceci signifie que $M \in \mathcal{H}$ équivaut à $\overrightarrow{BM} \in \operatorname{Ker} f$, où l'on note f la forme linéaire $f = a_1e_1^* + \cdots + a_ne_n^*$, qui est non-nulle d'après l'hypothèse sur les a_i. En notant H l'hyperplan vectoriel $\operatorname{Ker} f$ dans E, on a finalement: $M \in \mathcal{H}$ ssi $\overrightarrow{BM} \in H$, ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est le sous-espace affine passant par B et dirigé par H, donc que $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine. □

La relation $(**)$ est appelée une *équation cartésienne* de l'hyperplan $\mathcal{H}$ dans le repère.
Comme on l'a vu dans la preuve, $\mathcal{H}$ est dirigé par l'hyperplan vectoriel H dans E d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. On en déduit immédiatement:

Corollaire. *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux hyperplans de $\mathcal{E}$ d'équations $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$ et $a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n + a'_{n+1} = 0$ respectivement. Alors:*

$\mathcal{H} \mathbin{/\!/} \mathcal{H}'$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, tel que $a'_i = \lambda a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, tel que $a'_i = \lambda a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$.

⋆ **Cas des droites en dimension 2.** On suppose $\mathcal{E}$ de dimension 2, rapporté à un repère cartésien. Une équation cartésienne d'une droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ est de la forme

$$\boxed{ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)}.$$

Une base de la droite vectorielle Δ dirigeant $\mathcal{D}$ est alors $\{\overrightarrow{u}\}$ avec $\overrightarrow{u}(-b, a)$.

Exemples d'applications. (Ecrire à titre d'exercice le détail des calculs correspondants).

• *Condition d'alignement.* Soients $A(\alpha,\beta)$ et $B(\alpha',\beta')$. Pour tout $M(x,y)$, on a:

$$(M,A,B) \text{ alignés } \Leftrightarrow \{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\} \text{ lié } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\alpha & \alpha'-\alpha \\ y-\beta & \beta'-\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{(\beta'-\beta)x+(\alpha-\alpha')y+(\alpha'\beta-\alpha\beta')=0},$$

ce qui, pour $A \neq B$, donne une équation de la droite (AB). Ou encore, en remarquant que les points sont alignés si et seulement si leurs coordonnées vérifient une équation de droite:

$$(M,A,B) \text{ alignés } \Leftrightarrow \exists\, a,b,c \in \mathbb{R},\ (a,b)\neq(0,0),\ \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a\alpha+b\beta+c=0 \\ a\alpha'+b\beta'+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \alpha' & \beta' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

• *Position relative de deux droites.* Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. Notons (S) le système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$, et $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ son déterminant.

(i) $(\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}') \Leftrightarrow (\exists\,\lambda\in\mathbb{R}^*,\ a'=\lambda a,\ b'=\lambda b) \Leftrightarrow (\delta=0)$.

– Si l'on a aussi $c'=\lambda c$, les deux équations sont équivalentes, donc $\mathcal{D}=\mathcal{D}'$.

– Sinon, (S) n'est pas compatible, donc $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\emptyset$.

(ii) $(\mathcal{D}$ non parallèle à $\mathcal{D}') \Leftrightarrow (\delta\neq 0) \Leftrightarrow (\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\{\Omega\})$ avec $\Omega\left(\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}, \frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)$.

• *Condition de concours de trois droites.* Soient trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ d'équations respectives $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ et $a''x+b''y+c''=0$. On suppose que les trois droites sont deux à deux non parallèles, c'est-à-dire que $ab'-a'b$, $a'b''-a''b'$ et $a''b'-a'b''$ sont tous les trois non-nuls. On dit qu'elles sont concourantes lorsqu'elles se coupent en un même point, c'est-à-dire lorsque leurs trois points d'intersection deux à deux sont confondus ; ceci équivaut à dire que les coordonnées du point d'intersection Ω de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (voir ci-dessus) sont solutions de l'équation $a''x+b''y+c''=0$. Il vient après calcul:

$$(\mathcal{D},\mathcal{D}',\mathcal{D}'' \text{ concourantes}) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c" \end{vmatrix} = 0 \right).$$

⋆ **Cas des plans en dimension 3.** On suppose $\mathcal{E}$ de dimension 3, rapporté à un repère cartésien. Une équation cartésienne d'un plan affine $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ est de la forme

$$\boxed{ax+by+cz+d=0 \quad \text{avec } (a,b,c)\neq(0,0,0)}.$$

Une base du plan vectoriel Π dirigeant $\mathcal{P}$ est $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ avec $\overrightarrow{u}(-b,a,0)$ et $\overrightarrow{v}(-c,0,a)$.

Exemples d'applications. (Ecrire le détail des calculs correspondants et faire des figures).

• *Condition de coplanarité.* Soients $A(\alpha,\beta,\gamma)$, $B(\alpha',\beta',\gamma')$, $C(\alpha'',\beta'',\gamma'')$. Pour tout $M(x,y,z)$, on a:

$$(M,A,B,C) \text{ coplanaires } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\alpha & \alpha'-\alpha & \alpha''-\alpha \\ y-\beta & \beta'-\beta & \beta''-\beta \\ z-\gamma & \gamma'-\gamma & \gamma''-\gamma \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 1 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui, quand $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ est libre, donne en développant une équation du plan passant par A,B,C.

• *Position relative de deux plans.* Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$. Notons (S) le système $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$, et $\mu = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ sa matrice.

(i) $(\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{P}') \Leftrightarrow (\exists\,\lambda\in\mathbb{R}^*,\ a'=\lambda a,\ b'=\lambda b,\ c'=\lambda c) \Leftrightarrow (\operatorname{rg}\mu=1)$.

– Si l'on a aussi $d'=\lambda d$, les deux équations sont équivalentes, donc $\mathcal{P}=\mathcal{P}'$.

– Sinon, (S) n'est pas compatible, donc $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'=\emptyset$.

(ii) Supposons que $\operatorname{rg}\mu\neq 1$. Les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont donc pas parallèles. Comme $(a,b,c)\neq(0,0,0)\neq(a',b',c')$, on a $\operatorname{rg}\mu\neq 0$, donc $\operatorname{rg}\mu=2$. Donc l'un au moins des 3 mineurs $ab'-a'b$, $bc'-c'b$, $ca'-c'a$ est non-nul. Il en résulte en particulier que $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'\neq\emptyset$.

En effet, si par exemple $ab'-a'b\neq 0$, l'ensemble des solutions de (S) est $\{(x(z),y(z),z)\,;\, z\in\mathbb{R}\}$, avec $x(z),y(z)$ donnés par les formules de Cramer dans le système $\begin{cases} ax+by=-cz-d \\ a'x+b'y=-c'z-d' \end{cases}$.

Dès lors, $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est un sous-espace affine dirigé par le ss-e.v. $\Pi\cap\Pi'$. Or $\overrightarrow{u}(x,y,z)\in\Pi\cap\Pi'$ si et seulement si (x,y,z) est solution du système homogène (S_0) $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$. On a $\operatorname{rg}(S_0)=\operatorname{rg}\mu=2$ donc l'espace vectoriel des solutions de (S_0) est de dimension $3-2=1$. On conclut que $\Pi\cap\Pi'$ est une droite vectorielle, donc que $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est une droite affine.

On retiendra que: *l'intersection de deux plans affines non parallèles est une droite affine.*

⋆ **Cas des droites en dimension 3.** On suppose $\mathcal{E}$ de dimension 3, rapporté à un repère cartésien.

Proposition. *$\mathcal{D}$ est une droite affine de $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe (a,b,c) et (a',b',c') deux triplets linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$, et deux scalaires $d, d' \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{D}$ soit exactement l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dont les coordonnées sont solutions du système (S) suivant:*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array}\right.}, \quad \text{avec } (a',b',c') \neq \lambda(a,b,c) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \ (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

Preuve Un sens résulte de ce que l'on vient de voir à la fin du paragraphe précédent. Réciproquement, soient $\mathcal{D}$ une droite affine, A un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non-nul de la droite vectorielle Δ dirigeant $\mathcal{D}$. On peut compléter $\overrightarrow{u}$ en une base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ de E. On introduit le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de sous-espace vectoriel directeur le plan vectoriel Π de base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$. De même, soit $\mathcal{P}'$ passant par A et de sous-espace vectoriel directeur le plan vectoriel Π' de base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\}$. On a $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ libre, donc $\Pi \neq \Pi'$, donc $\mathcal{P}$ non parallèle à $\mathcal{P}'$. D'après ce que l'on a vu précédemment, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est alors une droite affine, dirigée par la droite vectorielle $\Pi \cap \Pi'$. Comme $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et $\overrightarrow{u} \in \Pi \cap \Pi'$, on conclut $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$. On introduit des équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ pour achever la preuve. □

On dit que (S) est un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ dans le repère. Il exprime que: *toute droite affine de $\mathcal{E}$ est (d'une infinité de façons) l'intersection de deux plans de $\mathcal{E}$.*

Exercices d'application. (Ecrire le détail des calculs et faire des figures).

- *Position relative d'une droite et d'un plan.* Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan dans $\mathcal{E}$. En utilisant des équations cartésiennes, montrer que les seuls cas possibles sont:
  - la droite vectorielle Δ dirigeant $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel du plan vectoriel Π dirigeant $\mathcal{P}$;
    dans ce cas : ou bien $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$;
    ou bien $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{P}$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$;
  - la droite vectorielle Δ n'est pas un sous-espace vectoriel de Π ; dans ce cas $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est un singleton.
- *Position relative de deux droites.* Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites dans $\mathcal{E}$. En utilisant des équations cartésiennes, montrer que les seuls cas possibles sont:
  - les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \mathcal{D}$;
  - les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles mais non confondues, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$;
  - les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, alors: $(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset)$ ou $(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}')$ est un singleton.

7 Barycentre

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E. La notion de barycentre d'une famille de points est un outil essentiel du travail dans les espaces affines, dont le rôle est comparable à celui de combinaison linéaire d'une famille de vecteurs dans le cadre des espaces vectoriels.

Théorème. *Soit $\mathcal{A} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de points pondérés, (ceci signifie que, pour tout $1 \leq i \leq n$, A_i est un point de $\mathcal{E}$, et α_i est un réel appelé le poids ou la masse affecté à A_i). On pose : $\sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, appelée la masse totale de la famille. On suppose que $\sigma \neq 0$; alors il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ vérifiant l'une des conditions suivantes équivalentes:*

$$(1)\ \boxed{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}}, \quad (2)\ \boxed{\exists\, M_0 \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{M_0G} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M_0A_i}}, \quad (3)\ \boxed{\forall\, M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}.$$

Preuve. Soit f l'application $\mathcal{E} \to E$ définie par $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Pour $M, N \in \mathcal{E}$, on a $f(M) - f(N) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iN}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MN}$. On retient:

$$\text{pour tous } M, N \in \mathcal{E},\ \ f(M) - f(N) = \sigma \overrightarrow{MN}. \qquad (*)$$

Il en résulte que f est injective (en effet $f(M) = f(N) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{\sigma}(f(M) - f(N)) = \overrightarrow{0} \Rightarrow M = N$).

– On montre que les 3 assertions sont équivalentes. Si G vérifie (i), on a $f(G) = \overrightarrow{0}$; d'après (*) on a alors $f(M) = f(G) + \sigma\overrightarrow{MG} = \sigma\overrightarrow{MG}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$, donc (iii) est vérifié. Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Enfin, si G vérifie (ii), on a d'après (*): $f(G) = f(M_0) + \sigma\overrightarrow{GM_0} = \sigma\overrightarrow{M_0G} + \sigma\overrightarrow{GM_0} = \overrightarrow{0}$.

– On montre l'existence de G. Soit $A \in \mathcal{E}$ quelconque; alors pour le vecteur $\frac{1}{\sigma}f(A) \in E$, il existe $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sigma}f(A)$. En utilisant (*), il vient: $f(G) = f(A) + \sigma\overrightarrow{GA} = \sigma\overrightarrow{AG} + \sigma\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$.

– On montre l'unicité de G. Si G' est un autre point de $\mathcal{E}$ vérifiant (i), on a $f(G) = \overrightarrow{0} = f(G')$, d'où $G = G'$ par injectivité de f. □

DÉFINITION. Sous les hypothèses du théorème précédent, le point G est appelé le *barycentre* du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$. On le note:

$$G = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n} \qquad \text{ou} \qquad G = \mathrm{Bar}\left(\begin{smallmatrix} A_1, & \dots & A_i, & \dots & A_n \\ \alpha_1, & \dots & \alpha_i, & \dots & \alpha_n \end{smallmatrix}\right),$$

Homogénéité du barycentre. Il est clair que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Bar}(A_i, \lambda\alpha_i)_{1\leq i\leq n} = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$. Donc, quitte à multiplier chaque poids par $\frac{1}{\sigma}$, on peut toujours supposer que $\sigma = 1$.

Un cas particulier important est celui où les masses sont toutes égales. Par homogénéité, on peut les prendre égales à 1. La somme des masses est $n \neq 0$, ce qui autorise la définition suivante.

DÉFINITION. Soient $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathcal{E}$. Le barycentre $G = \mathrm{Bar}(A_i, 1)_{1\leq i\leq n}$ est appelé l'*isobarycentre* du n-uplet $(A_1, \dots, A_n)$. Il est défini par:

$$\boxed{\forall\, M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{MG} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i}}\,, \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}}$$

Comme $\mathrm{Bar}(A_i, 1)_{1\leq i\leq n} = \mathrm{Bar}(A_{s(i)}, 1)_{1\leq i\leq n}$ pour toute permutation s de $\{1, 2, \dots, n\}$, on peut parler de l'isobarycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$, indépendamment de l'ordre des points.

L'isobarycentre de 2 points de $\mathcal{E}$ s'appelle leur milieu. Si A, B sont deux points de $\mathcal{E}$,

$$[\ I \text{ milieu de } (A,B)\ ] \Longleftrightarrow [\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}\ ] \Longleftrightarrow [\ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}\ ]$$

• La propriété suivante, évidente mais précieuse sur le plan pratique, indique que l'on peut regrouper les points par paquets, et que le barycentre global est alors le barycentre des barycentres partiels, affectés des sommes partielles des masses correspondantes.

PROPOSITION (associativité du barycentre). *Soit $\mathcal{A} = (A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de points pondérés de masse totale $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ non-nulle. Notons G son barycentre. On suppose que, pour un entier $1 \leq p < n$, on ait $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i \neq 0$, et on considère le barycentre partiel $G' = \mathrm{Bar}\left(\begin{smallmatrix} A_1, & A_2, & \dots & A_p \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_p \end{smallmatrix}\right)$. Alors:*

$$G = \mathrm{Bar}\left(\begin{smallmatrix} A_1, & \dots & A_p, & A_{p+1}, & \dots & A_n \\ \alpha_1, & \dots & \alpha_p, & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Bar}\left(\begin{smallmatrix} G', & A_{p+1}, & \dots & A_n \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_p, & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{smallmatrix}\right).$$

Preuve. $\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = (\sum_{i=1}^{p}\alpha_i)\overrightarrow{GG'} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$ □

⋆ *Exemple d'application.* Dans $\mathcal{E}$ supposé de dimension ≥ 2, soient A, B, C trois points non alignés, et A', B', C' les milieux respectifs de $(B,C), (C,A), (A,B)$. Par associativité, l'isobarycentre du triangle (A,B,C) est $G = \mathrm{Bar}\left(\begin{smallmatrix} A, & B, & C \\ 1, & 1, & 1, \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Bar}\left(\begin{smallmatrix} C', & C \\ 2, & 1, \end{smallmatrix}\right)$, de sorte que $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'}$, d'où $G \in (CC')$. De même $G \in (AA')$ et $G \in (BB')$. On a prouvé: *les trois médianes d'un triangle se coupent en l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté.*

⋆ *Exercice d'application.* De la même façon, montrer que, dans $\mathcal{E}$ supposé de dimension ≥ 3, pour A, B, C, D quatre points non coplanaires, les 3 droites passant par le milieu d'une des 6 arêtes du tétraèdre et le milieu de l'arête opposée se coupent en l'isobarycentre G du tétraèdre. Montrer que G est aussi le point de concourrance des quatre droites joignant chaque sommet au centre de gravité du triangle opposé.

• On donne maintenant une caractérisation en terme de barycentre de la notion de sous-espace affine, que l'on peut résumer en disant qu'un sous-espace affine est une partie stable par barycentre.

Proposition. *Soit $\mathcal{F}$ une partie non-vide de $\mathcal{E}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$;*

(ii) *le barycentre de toute famille finie de points pondérés de $\mathcal{F}$ appartient encore à $\mathcal{F}$.*

Preuve. Supposons (i). Notons F le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{F}$. Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de points pondérés dans $\mathcal{F}$ telle que $\sigma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. Le barycentre G des (A_i, α_i) vérifie $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{MA_i} \in F$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc $\overrightarrow{MG}$ étant combinaison linéaire des $\overrightarrow{MA_i}$, on a $\overrightarrow{MG} \in F$. Comme $M \in \mathcal{F}$, ceci implique que $G \in \mathcal{F}$.

Supposons (ii). Choisissons $A \in \mathcal{F}$. Il s'agit de montrer que $F := \{\overrightarrow{AM}\,;\, M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Pour cela, considérons $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN} \in F$ quelconques, avec $M, N \in \mathcal{F}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit G le barycentre de (A, M, N) affectés des coefficients $(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta)$, dont la somme est non-nulle. D'après l'hypothèse (ii), $G \in \mathcal{F}$. Par définition du barycentre, $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN}$. Mais $\overrightarrow{AG} \in F$ puisque $G \in \mathcal{F}$. On a ainsi vérifié que: $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN} \in F$, ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et donc que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. □

• On termine par une formulation en termes de barycentre de la notion de base affine.

Proposition. *Soit $\mathcal{X} = (A_0, A_1, \ldots, A_p)$ une famille affinement libre de points de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{X}$. Alors:*

$$\forall\ M \in \mathcal{F},\ \exists !\ (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1},\ \sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 1 \ \text{ et } \ M = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{0\leq i\leq p}.$$

Preuve. Comme on l'a vu à la section 4, $\mathcal{X}$ est une base affine de $\mathcal{F}$, et $X = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$ est une base du sous-espace vectoriel F de E directeur de $\mathcal{F}$. Soit $M \in \mathcal{F}$. Donc $\overrightarrow{A_0M} \in F$. Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ les composantes de $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base X. Soit $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$. On a $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$ et $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 1$. L'unicité des α_i résulte de la liberté de X. □

La base affine $\mathcal{X}$ de $\mathcal{F}$ est parfois appelé un *repère barycentrique* de $\mathcal{F}$, et les réels $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ sont appelés les *coordonnées barycentriques* du point M de $\mathcal{F}$ relativement à $\mathcal{X}$.
Par exemple, l'isobarycentre G d'un triangle (A, B, C) a pour coordonnées barycentriques $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ dans la famille affinement libre (A, B, C). De nombreux exercices de géométrie affine se résolvent d'autant plus simplement que l'on choisit un repère barycentrique bien adapté au problème.

8 Convexité

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E.

Définition. Soient $A, B \in \mathcal{E}$. On appelle *segment* d'extrémités A et B, noté $[A, B]$, la partie de $\mathcal{E}$ formée des barycentres des deux points A, B pondérés par des masses positives dans $\mathbb{R}$.

Fixons $O \in \mathcal{E}$ quelconque. Alors:

$$\boxed{(\ M \in [A, B]\ ) \Longleftrightarrow (\ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+\ ,\ \alpha + \beta > 0,\ (\alpha + \beta)\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}\ )}.$$

Les réels $t = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ et $1 - t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ appartiennent à $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{(\ M \in [A, B]\ ) \Longleftrightarrow (\ \exists\ t \in [0, 1],\ \overrightarrow{OM} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\ )}.$$

En choisissant $O = A$, on obtient:

$$\boxed{(\ M \in [A, B]\ ) \Longleftrightarrow (\ \exists\ t \in [0, 1],\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\ )}.$$

Il en résulte en particulier que $[A, B] = [B, A]$ et $[A, A] = \{A\}$.

Figure

Observation. Pour A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, on a: $(AB) = \{M \in \mathcal{E}\,;\, \exists\, t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$ et $[AB] = \{M \in \mathcal{E}\,;\, \exists\, t \in [0,1],\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$. Définissons par ailleurs la demi-droite fermée d'origine A passant par B par: $[AB) = \{M \in \mathcal{E}\,;\, \exists\, t \in \mathbb{R}^+,\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$. Il est facile de vérifier alors (rédiger la preuve en exercice, et faire un dessin) que $[AB) \cap [BA) = [AB]$.

Définition. Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est dite *convexe* lorsque, pour tous points A, B dans $\mathcal{C}$, le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathcal{C}$.

Figure	Figure	Figure	Figure
convexe	convexe	non convexe	non convexe

Il découle immédiatement de cette définition que *l'intersection d'une famille de parties convexes est convexe.*

Théorème. *Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si le barycentre de toute famille finie de points de $\mathcal{C}$ pondérés par des masses positives dans $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{C}$.*

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$, on dira que $\mathcal{C}$ vérifie la propriété (P_n) lorsque: “ le barycentre de toute famille de n points de $\mathcal{C}$ pondérés par des masses positives dans $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{C}$ ”. Par définition, $\mathcal{C}$ est convexe si et seulement si elle vérifie (P_2). Il est donc clair que, si $\mathcal{C}$ vérifie (P_n) pour tout $n \geq 1$, alors $\mathcal{C}$ est convexe.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}$ est convexe. Donc $\mathcal{C}$ vérifie (P_2), et l'on raisonne par récurrence en supposant: (H.R.) il existe un entier $n \geq 3$ tel que $\mathcal{C}$ vérifie (P_k) pour tout $1 \leq k \leq n-1$.

Considérons n points $A_1, \ldots, A_n$ dans $\mathcal{C}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $\sigma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. On peut définir le barycentre $G = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si l'un des α_i est nul, G est le barycentre de k points, avec $k \leq n-1$ donc $G \in \mathcal{C}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Sinon, $\alpha_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier $\sigma' = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \neq 0$, et l'on peut définir $G' = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, avec $G' \in \mathcal{C}$ d'après l'hypothèse de récurrence Par associativité des barycentres, on a $G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} G', & A_n \\ \sigma', & \alpha_n \end{pmatrix}$. Comme $G' \in \mathcal{C}$, $A_n \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ convexe, on conclut que $G \in \mathcal{C}$. □

Corollaire. *Tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est une partie convexe.*

Preuve. Un sous-espace affine étant stable par barycentre, il est à fortiori stable par barycentre à masses positives, d'où le résultat. □

Proposition et définition. Soit $\mathcal{X}$ une partie de $\mathcal{E}$. L'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{X}$ est la plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{X}$. On l'appelle *l'enveloppe convexe* de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{E}$. On la note $\mathrm{Conv}\,\mathcal{X}$.

Preuve. Evidente; laissée en exercice. □

Il est clair que $\mathcal{X}$ est convexe si et seulement si $\mathrm{Conv}\,\mathcal{X} = \mathcal{X}$.

Proposition. *L'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{E}$ est égale à l'ensemble des barycentres des familles finies de points de $\mathcal{X}$ pondérés par des masses positives dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des barycentres des familles finies de points de $\mathcal{X}$ pondérés par des masses positives. On a $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ car tout point $A \in \mathcal{X}$ peut être considéré comme le barycentre de $(A, 1)$. Par associativité des barycentres, tout barycentre d'une famille finie de points de $\mathcal{C}$ pondérés par des masses positives est aussi barycentre d'une famille finie de points de $\mathcal{X}$ pondérés par des masses positives, donc appartient à $\mathcal{C}$. Ceci prouve que $\mathcal{C}$ est convexe. Ainsi $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$ convexe, d'où $\mathrm{Conv}\,\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$.

Réciproquement, comme $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Conv}\,\mathcal{X}$ et $\mathrm{Conv}\,\mathcal{X}$ est convexe, il résulte du théorème ci-dessus que $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Conv}\,\mathcal{X}$. D'où l'égalité. □

Par exemple, pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\mathrm{Conv}\{A, B\} = [A, B]$.

9 Applications affines

Bien que le contenu de cette section puisse être dans sa presque totalité rédigé pour des applications affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ vers un espace affine $\mathcal{F}$, on se limite, en vue des applications concrètes qui sont celles de la géométrie étudiée au CAPES, au cas où l'espace d'arrivée $\mathcal{F}$ est le même que l'espace de départ $\mathcal{E}$.

On se fixe pour toute la suite un espace affine $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E.

Définition. Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une *application affine*, ou un *endomorphisme affine*, lorsqu'il existe une application linéaire $f : E \to E$, dite *associée à* φ, telle que:

$$\boxed{\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = f(\overrightarrow{AB}) \quad \text{pour tous } A, B \in \mathcal{E}}$$

Le théorème fondamental suivant, très utile dans la pratique, exprime qu'une application affine est entièrement déterminée par son application linéaire associée et par l'image d'un point.

Théorème. *Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$, et f une application linéaire $E \to E$. Alors il existe une unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A) = B$ et telle que f soit l'application linéaire associée à φ.*

Preuve. Montrons d'abord l'unicité; Pour cela, soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine d'application linéaire associée f et telle que $\varphi(A) = B$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a: $\overrightarrow{B\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AM})$, ce qui définit de façon unique $\varphi(M)$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. D'où l'unicité de φ.

Réciproquement, définissons $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ en définissant, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\varphi(M)$ comme le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{B\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AM})$. Il en résulte en particulier que $\overrightarrow{B\varphi(A)} = f(\overrightarrow{AA}) = f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, ce qui implique $\varphi(A) = B$. D'autre part, pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, on a:

$$\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \overrightarrow{B\varphi(N)} - \overrightarrow{B\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AN}) - f(\overrightarrow{AM}) = f(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = f(\overrightarrow{MN}),$$

Ceci prouve que φ est affine, d'application linéaire associée f. □

Exemples. Les translations, les homothéties, les projections, les symétries, sont des endomorphismes affines, que l'on détaillera aux sections 11 et 12 suivantes. C'est aussi le cas des affinités et des transvections. Si de plus l'espace affine $\mathcal{E}$ est supposé euclidien, on voit apparaître parmi les endomorphismes affines tous les types d'isométries (rotations,...) ou de similitudes.
Avant de développer géométriquement certains de ces exemples, on donne une série de propriétés générales des applications affines, qui ne découlent en fait que de la définition.

• Proposition (Conservation des sous-espaces affines). *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire asssociée $f : E \to E$.*

(i) *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par le sous-espace vectoriel H de E. Alors $\varphi(\mathcal{H})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, dirigé par le sous-espace vectoriel $f(H)$ de E.*

(ii) *Soit $\mathcal{H}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par le sous-espace vectoriel H' de E. Si $\varphi^{-1}(\mathcal{H}') \neq \emptyset$, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, dirigé par le sous-espace vectoriel $f^{-1}(H')$ de E.*

Preuve. Soient $A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, et $B = \varphi(A) \in \varphi(\mathcal{H})$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a:

$$[M \in \varphi(\mathcal{H})] \Leftrightarrow [\exists\, N \in \mathcal{H},\ M = \varphi(N)] \Leftrightarrow [\exists\, N \in \mathcal{H},\ \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(N)}] \Leftrightarrow [\exists\, N \in \mathcal{H},\ \overrightarrow{BM} = f(\overrightarrow{AN})],$$

Ce qui, comme $A \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ dirigé par H, équivaut à l'existence de $\overrightarrow{u} \in H$ tel que $\overrightarrow{BM} = f(\overrightarrow{u})$. Ceci prouve que l'ensemble $\{\overrightarrow{BM}\,;\ M \in \varphi(\mathcal{H})\}$ est égal à $f(H)$, qui est un sous-espace vectoriel de E (car image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire). Le point (i) est démontré.

Pour (ii), supposons qu'il existe $A \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')$. Donc $\varphi(A) \in \mathcal{H}'$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a: $M \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ si et seulement si $\varphi(M) \in \mathcal{H}'$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} \in H'$ car $\varphi(A) \in \mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}'$ dirigé par H'. En résumé, $M \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ si et seulement si $f(\overrightarrow{AM}) \in H'$. On déduit que l'ensemble $\{\overrightarrow{AM}\,;\ M \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')\}$ est égal à $f^{-1}(H')$, qui est un sous-espace vectoriel de E comme image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. □

• Corollaire (Conservation du parallélisme). *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine, et $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont parallèles, alors $\varphi(\mathcal{H}_1)$ et $\varphi(\mathcal{H}_2)$ sont parallèles.*

Preuve. Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont parallèles, on a $H_1 = H_2$ dans E. Donc $f(H_1) = f(H_2)$. Or $f(H_1)$ est le sous-espace vectoriel directeur de $\varphi(\mathcal{H}_1)$, et $f(H_2)$ celui de $\varphi(\mathcal{H}_2)$. D'où $\varphi(\mathcal{H}_1)$ et $\varphi(\mathcal{H}_2)$ parallèles. □

• Corollaire. (Conservation de l'alignement). *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Quels que soient A, B, C trois points distincts alignés dans $\mathcal{E}$, les points $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ sont alignés ou confondus dans $\mathcal{E}$.*

Preuve. Si $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 1$, alors $f(\overrightarrow{AC}) = \lambda f(\overrightarrow{AB})$, et donc $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(C)} = \lambda \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$, ce qui prouve le résultat voulu. □

En particulier une bijection affine transforme trois points alignés en trois points alignés. On peut montrer par ailleurs (on ne le fera pas ici) que réciproquement, une bijection $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui conserve l'alignement est nécessairement affine.

• Proposition (Conservation des barycentres). *Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est affine si et seulement si elle vérifie la propriété suivante : pour toute famille $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points pondérés de $\mathcal{E}$ admettant un barycentre G, le point $\varphi(G)$ est le barycentre de la famille $(\varphi(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.*

Preuve. Supposons φ affine et notons $f : E \to E$ l'application linéaire associée à φ. Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de points pondérés de $\mathcal{E}$ avec $\sigma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$, et soit G son barycentre. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ donc: $f(\overrightarrow{MG}) = f\left(\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\overrightarrow{MA_i})$, c'est-à-dire: $\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(G)} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(A_i)}$. Donc $\varphi(G)$ est bien le barycentre de la famille image.

Réciproquement supposons que φ conserve les barycentres. Fixons A un point de $\mathcal{E}$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, il existe $M \in \mathcal{E}$ unique tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$. Posons alors $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)}$. On définit ainsi une application $f : E \to F$; il s'agit de montrer qu'elle est linéaire.

Soient donc $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $M, N \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AN}$. En appliquant l'hypothèse que φ conserve les barycentres, on peut considérer:

$$G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A, & M, & N \\ 1-\lambda-\mu, & \lambda, & \mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(G) = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} \varphi(A), & \varphi(M), & \varphi(N) \\ 1-\lambda-\mu, & \lambda, & \mu \end{pmatrix}$$

D'une part $\overrightarrow{AG} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{AA} + \lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$, ce qui implique par définition de f que: $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(G)}$. D'autre part, $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(G)} = (1-\lambda-\mu)\,\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A)} + \lambda\,\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} + \mu\,\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(N)} = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$. On a ainsi vérifié que $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$. □

• Proposition (Conservation de la convexité). *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On a les propriétés suivantes:*

(i) $\varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]$ pour tous $A, B \in \mathcal{E}$;

(ii) *si $\mathcal{X}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$, alors $\varphi(\mathcal{X})$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$;*

(iii) *si $\mathcal{X}'$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{X}')$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$;*

(iv) *si $\mathcal{X}$ est une partie de $\mathcal{E}$, alors $\varphi(\mathrm{Conv}\, X) = \mathrm{Conv}\, \varphi(X)$.*

Preuve. (i) résulte immédiatement de la définition d'un segment et de la proposition précédente. Les preuves de (ii), (iii), (iv) s'en déduisent. □

La détermination et l'étude géométrique concrète des applications affines passe souvent par la détermination de leurs points fixes. Avant de le voir sur des exemples, donnons quelques résultats généraux qui découlent simplement de la définition. Pour toute application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, on note:

$$\mathrm{Fix}\, \varphi = \{M \in \mathcal{E}\,;\, \varphi(M) = M\}.$$

Par ailleurs, pour toute application linéaire $f : E \to E$, on considère le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\mathrm{Fix}\, f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \{\overrightarrow{u} \in E\,;\, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}.$$

• Proposition (Points fixes d'une application affine). *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine, d'application linéaire associée f. Alors :*
– *ou bien φ n'admet aucun point fixe,*
– *ou bien* $\operatorname{Fix}\varphi$ *est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dont le sous-espace vectoriel directeur est* $\operatorname{Fix} f$.

Preuve. Supposons $\operatorname{Fix}\varphi \neq \emptyset$. Considérons un point $A \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(A) = A$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a:

$$M = \varphi(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\varphi(M)} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}.$$

En d'autres termes, $M \in \operatorname{Fix}\varphi$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in \operatorname{Fix} f$, ce qui prouve que $\in \operatorname{Fix}\varphi$ est le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et dirigé par $\operatorname{Fix} f$. □

On termine cette section par un résultat exprimant que, lorsque $\mathcal{E}$ est de dimension finie (ce qui sera toujours le cas dans la pratique), il suffit, pour connaître une application affine, de connaître les images d'un nombre fini de points formant une base affine de $\mathcal{E}$.

• Proposition (Détermination d'une application affine). *L'espace affine $\mathcal{E}$ étant supposé de dimension finie, une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est déterminée (entièrement et de façon unique) par l'image d'un repère de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire par l'image d'une base affine de $\mathcal{E}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère de $\mathcal{E}$. Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ qui est une base de E. Reprenons les observations faites à la section 4. Pour tout $1 \leq i \leq n$, notons A_i l'unique point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{e_i}$. Notons $\mathcal{X}$ la famille de $n+1$ points $\mathcal{X} = \{O, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Comme $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}\}$ est une base de E, $\mathcal{X}$ est une base affine de $\mathcal{E}$.

Ceci étant, soit $\mathcal{Y} = \{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ une famille de $n+1$ points de $\mathcal{E}$. On peut construire la famille de n vecteurs $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{B_0B_1}, \overrightarrow{B_0B_2}, \ldots, \overrightarrow{B_0B_n}\}$ de E. D'après un résultat bien connu d'algèbre linéaire, il existe une unique application linéaire $f : E \to E$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait: $f(\overrightarrow{OA_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$. En appliquant le théorème du début de cette section, on peut considérer l'unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est f, et telle que $\varphi(O) = B_0$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a: $\overrightarrow{B_0\varphi(A_i)} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A_i)} = f(\overrightarrow{OA_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$; d'où $\varphi(A_i) = B_i$. □

A titre d'exemples de conséquences pratiques de cet énoncé, citons:

(1) Deux applications affines qui coïncident en deux points distincts A et B [respectivement en trois points non alignés A, B, C] coïncident en tout point de la droite (AB) [respectivement du plan (ABC)].

(2) Une application affine qui fixe trois points non alignés dans l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 2 [respectivement quatre points non coplanaires dans l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3] est égale à $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

10 Groupe affine

$\mathcal{E}$ est toujours un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E. On commence par deux résultats élémentaires, mais fondamentaux.

Lemme 1 (Composée de deux applications affines). *Soient $\varphi, \psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications affines d'applications linéaires asssociées respectives $f, g : E \to E$. Alors $\psi \circ \varphi$ est affine d'application linéaire associée $g \circ f$.*

Preuve. Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on a: $\overrightarrow{\psi(\varphi(A))\psi(\varphi(B))} = g(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = g(f(\overrightarrow{AB}))$. □

Lemme 2 (Bijectivité d'une application affine). *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine d'application linéaire asssociée $f : E \to E$. Alors:*

$$\varphi \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ injective}, \quad \varphi \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}, \quad \varphi \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

Preuve. Supposons f injective. Soient $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Alors $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A)} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = f(\overrightarrow{AB})$. D'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire $A = B$. Supposons réciproquement que φ est injective. Soit $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker} f$. Soit $A \in \mathcal{E}$ et M l'unique point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$. Donc $\overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)}$. D'où $\varphi(A) = \varphi(M)$ et donc $A = M$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$. Le reste de la preuve est clair et laissé en exercice. □

Corollaire. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine, d'application linéaire asssociée $f : E \to E$. Alors:*

(i) *φ est bijective si et seulement si elle transforme une base affine de $\mathcal{E}$ en une base affine de $\mathcal{E}$.*

(ii) *Si φ est bijective, alors sa réciproque φ^{-1} est affine d'application linéaire associée f^{-1}.*

Preuve. Le point (i) découle du lemme 2 ci-dessus et de la dernière proposition de la section 9.

Pour (ii), considérons $M, N \in \mathcal{E}$ quelconques. Par bijectivité de φ, il existe $A, B \in \mathcal{E}$ uniques tels que $\varphi(A) = M$ et $\varphi(B) = N$. Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = f(\overrightarrow{AB})$ puisque φ est affine. Donc $\overrightarrow{AB} = f^{-1}(\overrightarrow{MN})$ puisque f est bijective d'après le lemme 2. On déduit $\overrightarrow{\varphi^{-1}(M)\varphi^{-1}(N)} = f^{-1}(\overrightarrow{MN})$. □

Définition et proposition. *Une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui est bijective est appelée un automorphisme affine de $\mathcal{E}$. L'ensemble des automorphismes affines de $\mathcal{E}$ est un groupe pour la loi de composition, appelé groupe affine de $\mathcal{E}$, et noté* $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

Preuve. $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ est un sous-ensemble du groupe des bijections de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$, non vide (il contient $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$), stable pour la loi $\circ$ d'après le lemme 1, et stable par passage à l'inverse d'après le point (ii) du corollaire. C'est donc un sous-groupe. □

En résumé, $\boxed{\mathrm{GA}(\mathcal{E}) = \{\ \varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ ;\ \varphi \text{ affine et bijective }\} \text{ est un groupe}}$

D'après le lemme 2, la bijectivité de φ équivaut à celle de l'endomorphisme vectoriel associé f:

$$\boxed{\varphi \in \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \ \Leftrightarrow\ f \in \mathrm{GL}(E)}$$

On peut donc considérer l'application $\ell : \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \to \mathrm{GL}(E)$ qui, à tout automorphisme affine φ de $\mathcal{E}$, associe son application linéaire associée qui est un automorphisme d'espace vectoriel de E. D'après le lemme 1, c'est un morphisme de groupes (si $\ell(\varphi) = f$ et $\ell(\psi) = g$, alors $\ell(\psi \circ \varphi) = g \circ f$). Le théorème fondamental ouvrant la section 9 montre que ℓ est surjective. Il reste à déterminer son noyau, c'est-à-dire l'ensemble des applications affines $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée $f = \ell(\varphi)$ est l'application identité id_E. Or on va précisément voir au début de la section suivante que les applications affines dont l'application linéaire associée est l'identité de E sont exactement les translations de $\mathcal{E}$. Donc, en anticipant sur le début de la section suivante :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\ell \ =\ \{\varphi \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})\ ;\ f = \mathrm{id}_E\} \ =\ \mathrm{T}(\mathcal{E}),\ \ \text{le groupe des translations de }\ \mathcal{E}}$$

Dès lors, l'application du premier théorème d'isomorphisme $\mathrm{GA}(\mathcal{E})/\,\mathrm{Ker}\,\ell \simeq \mathrm{Im}\,\ell$ implique :

$$\boxed{\mathrm{GA}(\mathcal{E})\,/\,\mathrm{T}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{GL}(E)}$$

11 Homothéties, translations

$\mathcal{E}$ est un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E.

• Définition. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E. On appelle *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application $\tau_{\overrightarrow{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

$$\boxed{M' = \tau_{\overrightarrow{u}}(M) \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}}$$

Remarquons que $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} = \tau_{\overrightarrow{0}}$.

Figure

Proposition.

(i) *Toute translation de $\mathcal{E}$ est une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et son application linéaire associée est id_E.*

(ii) *Réciproquement, toute application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est id_E est une translation de $\mathcal{E}$.*

Preuve. Soit $\tau = \tau_{\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u} \in E$. Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} = \overrightarrow{\tau(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\tau(B)} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, ce qui prouve le point (i). Pour (ii), considérons une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est $f = \mathrm{id}_E$. Soit $A \in \mathcal{E}$ arbitrairement choisi; posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A\varphi(A)}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a alors $\overrightarrow{M\varphi(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)}$. Or par hypothèse, $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$. On obtient donc $\overrightarrow{M\varphi(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$. On conclut que $\varphi = \tau_{\overrightarrow{u}}$. □

D'après le lemme 2 de la section 10, on déduit de (i) que toute translation est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$. Donc l'ensemble $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ de toutes les translations de $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. De plus, il résulte de (ii) que, comme on l'avait annoncé à la fin de la section 10, $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ n'est autre que le noyau du morphisme $\ell : \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \to \mathrm{GL}(E)$ qui associe à toute application affine son application linéaire. En particulier, puisque $\mathrm{T}(\mathcal{E}) = \operatorname{Ker} \ell$, $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ (et même un sous-groupe normal). Concrètement, la composée de deux translations, ainsi que la réciproque d'une translation, sont des translations. On peut préciser que, quels que soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, on a:

$$\boxed{\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} \qquad \text{et} \qquad \tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}}$$

En effet. Prenons $M \in \mathcal{E}$ quelconque, et posons:

$M' = \tau_{\overrightarrow{u}}(M)$ et $M'' = \tau_{\overrightarrow{v}}(M') = \tau_{\overrightarrow{v}}\big(\tau_{\overrightarrow{u}}(M)\big)$.

On a $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Ceci prouve que $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$. Puisque $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$, il en résulte que $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{\overrightarrow{v}}$.

Par ailleurs, pour tous $\overrightarrow{u} \in E$ et $M, M' \in \mathcal{E}$, on a:
$(M' = \tau_{\overrightarrow{u}}(M)) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow (M = \tau_{-\overrightarrow{u}}(M'))$ □

Figure

On retiendra que:

$$\boxed{\mathrm{T}(\mathcal{E}) = \{\tau_{\overrightarrow{u}}\ ;\ \overrightarrow{u} \in E\} = \operatorname{Ker} \ell \ \text{ est un sous-groupe abélien de } \mathrm{GA}(\mathcal{E})}$$

• Définition. Soit A un point de $\mathcal{E}$. Soit λ un réel non-nul. On appelle *homothétie affine* de centre A et de rapport λ l'application $\vartheta_{A,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout $M \in \mathcal{E}$, associe l'unique point $\vartheta_{A,\lambda}(M) = M'$ défini par: $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$.

$$\boxed{M' = \vartheta_{A,\lambda}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}}$$

Dans le cas particulier où $\lambda = 1$, on a $\vartheta_{A,1} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.
Dans le cas particulier où $\lambda = -1$, l'homothétie $\vartheta_{A,-1}$ est appelée la symétrie centrale de centre A ; elle associe à tout point M le point M' tel que A est le milieu de (M, M').

Figure

$\lambda > 0$

Figure

$\lambda < 0$

Figure

$\lambda = -1$

Proposition.

(i) *Toute homothétie $\vartheta_{A,\lambda}$ est une application affine, d'application linéaire associée $\lambda\,\mathrm{id}_E$.*

(ii) *Toute homothétie est une bijection, donc appartient au groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$.*

(iii) *L'ensemble des points fixes d'une homothétie $\vartheta_{A,\lambda}$ distincte de l'identité (i.e. de rapport différent de 1) est réduit au singleton $\{A\}$ formé par le centre.*

Preuve. Fixons $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et notons $\vartheta = \vartheta_{A,\lambda}$. Pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{\vartheta(M)\vartheta(N)} = \overrightarrow{A\vartheta(N)} - \overrightarrow{A\vartheta(M)} = \lambda\overrightarrow{AN} - \lambda\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MN}$, ce qui montre le point (i). Le point (ii) s'en déduit puisque $\lambda\,\mathrm{id}_E$ est une bijection de E sur E. Enfin, $\vartheta(M) = M$ équivaut à $\lambda\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM}$, donc $(\lambda-1)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$, d'où $A = M$ dès lors que $\lambda \neq 1$. □

• Définition. On appelle *homothétie-translation* tout application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée f est de la forme $f = \lambda\,\mathrm{id}_E$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le réel non-nul λ s'appelle le *rapport* de l'homothétie-translation.

Théorème.

(i) *Une homothétie-translation de rapport 1 est une translation. Une homothétie-translation de rapport $\lambda \neq 1$ est une homothétie de rapport λ, dont le centre est uniquement déterminé.*

(ii) *L'ensemble* $\mathrm{H}(\mathcal{E})$ *des homothéties-translations est un sous-groupe de* $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$*, égal à la réunion du sous-ensemble des homothéties et du sous-groupe* $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ *des translations de* $\mathcal{E}$*.*

Preuve. Soit $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$ d'application linéaire associée $f = \lambda\,\mathrm{id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a déjà montré au début de cette section que, si $\lambda = 1$, alors φ est une translation.

Supposons donc maintenant $\lambda \neq 1$. Soit $B \in \mathcal{E}$ fixé, et $B' = \varphi(B)$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{B'\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(B)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{BM}) = \lambda\overrightarrow{BM}$. En particulier $\varphi(M) = M$ si et seulement si $\overrightarrow{B'M} = \lambda\overrightarrow{BM}$, c'est-à-dire avec la relation de Chasles si et seulement si $(1-\lambda)\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB'}$. Ceci montre que φ admet un unique point fixe A, qui est défini par $\overrightarrow{BA} = (1-\lambda)^{-1}\overrightarrow{BB'}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a alors: $\overrightarrow{A\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AM}) = \lambda\overrightarrow{AM}$, ce qui prouve que φ est l'homothétie de centre A et de rapport λ. Le point (i) est démontré.

Il est clair que $\{\lambda\,\mathrm{id}_E\,;\,\lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Le fait que $\mathrm{H}(\mathcal{E})$ soit un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ résulte alors du lemme 1 de la section 10. Le point (i) se traduit par le fait que $\mathrm{H}(\mathcal{E})$ est la réunion du sous-groupe $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ des translations et du sous-ensemble des homothéties. □

Le point (i) du théorème se traduit sur le plan pratique par le fait que:
⋆ une application affine φ vérifiant $\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \overrightarrow{MN}$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ est une translation ; on trouve son vecteur en prenant un point quelconque A et en considérant le vecteur $\overrightarrow{A\varphi(A)}$,
⋆ une application affine φ pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \neq 1$, vérifiant $\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \lambda\overrightarrow{MN}$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ est une homothétie de rapport λ ; on trouve son centre en déterminant son unique point fixe.

Quant au point (ii) du théorème, il convient de préciser comment se composent entre eux les différents éléments de $\mathrm{H}(\mathcal{E})$. C'est ce qu'explicitent les assertions suivantes, dont les preuves (et les dessins qui les accompagnent !) sont laissés au lecteur à titre d'exercice. On prendra garde en particulier au fait que la composée de deux homothéties n'est pas forcément une homothétie (les homothéties ne forment pas un sous-groupe de $\mathrm{H}(\mathcal{E})$).

⋆ composée de deux translations : $\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$

⋆ composée d'une translation et d'une homothétie:

Si $\lambda = 1$, $\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \tau_{\overrightarrow{u}}$

Si $\lambda \neq 1$, $\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \vartheta_{B,\lambda}$ où B est le point défini par $\overrightarrow{AB} = (1-\lambda)^{-1}\overrightarrow{u}$

⋆ composée de deux homothéties de même centre: $\vartheta_{A,\lambda} \circ \vartheta_{A,\lambda'} = \vartheta_{A,\lambda\lambda'}$

⋆ composée de deux homothéties non nécessairement de même centre:

Si $\lambda\lambda' = 1$, $\vartheta_{A',\lambda'} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \tau_{(1-\lambda')\overrightarrow{AA'}}$

Si $\lambda\lambda' \neq 1$, $\vartheta_{A',\lambda'} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \vartheta_{B,\lambda\lambda'}$ où B est le point défini par $\overrightarrow{AB} = \frac{(1-\lambda')}{(1-\lambda\lambda')}\overrightarrow{AA'}$

12 Projections, symétries

Un rappel d'algèbre linéaire. Soit E un espace vectoriel. Soient F et H deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, i.e. tels que $E = F \oplus H$. Cela signifie que tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ se décompose de façon unique en une somme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in F$ et $\overrightarrow{w} \in H$. L'application $p : E \to E$ qui, à tout $\overrightarrow{u} \in E$ ainsi décomposé, associe sa composante $\overrightarrow{v}$ sur F s'appelle la *projection* (vectorielle) de E sur F parallèlement à H. L'application $s : E \to E$ qui, à tout $\overrightarrow{u} \in E$ ainsi décomposé, associe le vecteur $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ s'appelle la *symétrie* (vectorielle) par rapport à F parallèlement à H.

$$\boxed{\begin{gathered} E = F \oplus H, \\ \forall\, \overrightarrow{u} \in E,\ \exists!\, \overrightarrow{v} \in F,\ \exists!\, \overrightarrow{w} \in H,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \\ p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}, \quad s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \end{gathered}}$$

Figure

Il est clair que p et s sont des applications linéaires.

$$\operatorname{Ker} p = H, \qquad \operatorname{Im} p = F, \quad \operatorname{Fix} p = F, \quad p \circ p = p,$$
$$\operatorname{Ker} s = \{\overrightarrow{0}\}, \quad \operatorname{Im} s = E, \quad \operatorname{Fix} s = F, \quad s \circ s = \mathrm{id}_E.$$

On considère maintenant $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel associé E.

Lemme préliminaire. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ dont les sous-espaces vectoriels directeurs F et H vérifient $E = F + H$. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$.*

Preuve. Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{H}$. Comme $E = F + H$, il existe $\overrightarrow{v} \in F$ et $\overrightarrow{w} \in H$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. On a $A \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{v} \in F$, donc il existe $C \in F$ tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. On réécrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{w}$ sous la forme $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Ainsi, $\overrightarrow{CB} \in H$ avec $B \in \mathcal{H}$, d'où $C \in \mathcal{H}$. On conclut que $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. □

• Théorème et définition. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On suppose que leurs sous-espaces vectoriels directeurs F et H sont supplémentaires dans E. Alors*

(i) *Pour tout point M de $\mathcal{E}$, il existe un unique point $M' \in \mathcal{F}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartienne à H. Ce point M' est l'unique point d'intersection de $\mathcal{F}$ avec le sous-espace affine passant par M et parallèle à $\mathcal{H}$. Le point M' est appelé le projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{H}$.*

(ii) *L'application $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M associe son projeté M' défini ci-dessus s'appelle la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{H}$; c'est une application affine dont l'application linéaire associée est la projection vectorielle $p : E \to E$ sur F parallèlement à H.*

(iii) *On a: $\pi \circ \pi = \pi$.*

(iv) *L'ensemble des points fixes de π est $\operatorname{Fix} \pi = \mathcal{F}$.*

Preuve. Soit M un point de $\mathcal{E}$. Notons $\mathcal{H}'$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par M et parallèle à $\mathcal{H}$, c'est-à-dire dirigé par H. Comme $E = F \oplus H$ par hypothèse, on applique le lemme préliminaire pour déduire que $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}'$ n'est pas vide. C'est donc un sous-espace affine de sous-espace vectoriel directeur $F \cap H$. Or $F \cap H = \{\overrightarrow{0}\}$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}'$ est un singleton ; notons $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}' = \{M'\}$. On a $M \in \mathcal{H}'$ et $M' \in \mathcal{H}'$, donc $\overrightarrow{MM'} \in H$.

Figure

Réciproquement, si N est un point de $\mathcal{F}$ vérifiant $\overrightarrow{MN} \in H$, on a $N \in \mathcal{H}'$ (puisque $\mathcal{H}'$ passe par M et est dirigé par H), d'où $N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}'$, et donc $N = M'$. Ceci prouve le point (i).
Les points (iii) et (iv) en découlent immédiatement.
Pour (ii), considérons $A \in \mathcal{F}$, vérifiant donc $\pi(A) = A$. Soient $M \in \mathcal{E}$ quelconque, et $M' = \pi(M)$. D'une part $M' \in \mathcal{F}$ donc $\overrightarrow{AM'} \in F$. D'autre part $\overrightarrow{MM'} \in H$. Ainsi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$ avec $\overrightarrow{AM'} \in F$ et $\overrightarrow{M'M} \in H$, ce qui prouve que $\overrightarrow{AM'} = p(\overrightarrow{AM})$, i.e. $\overrightarrow{A\pi(M)} = p(\overrightarrow{AM})$.
Dès lors, pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, on a: $\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)} = \overrightarrow{A\pi(N)} - \overrightarrow{A\pi(M)} = p(\overrightarrow{AN}) - p(\overrightarrow{AM}) = p(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = p(\overrightarrow{MN})$, ce qui montre (ii) et achève la preuve. □

• Théorème et définition. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On suppose que leurs sous-espaces vectoriels directeurs F et H sont supplémentaires dans E. Alors*

(i) *Pour tout point M de $\mathcal{E}$, il existe un unique point $M'' \in \mathcal{E}$ tels que le projeté $M' = \pi(M)$ défini précédemment soit le milieu de (M, M''). Ce point M'' est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{M\pi(M)} = \overrightarrow{\pi(M)M''}$. Le point M' est appelé le symétrique de M par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{H}$.*

(ii) *L'application $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui, à tout point M associe son symétrique M'' défini ci-dessus s'appelle la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{H}$; c'est une application affine dont l'application linéaire associée est la symétrie vectorielle $s : E \to E$ par rapport à F parallèlement à H.*

(iii) *On a: $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, d'où il résulte que σ est bijective avec $\sigma^{-1} = \sigma$.*

(iv) *L'ensemble des points fixes de σ est $\mathrm{Fix}\,\sigma = \mathcal{F}$.*

Preuve. Tout à fait analogue à celle du théorème précédent ; laissée en exercice. □

Figure

• Quelques remarques.

(1) Dans le cas particulier où $\mathcal{F}$ est un singleton $\{A\}$, alors $F = \{\overrightarrow{0}\}$ et $H = E$, donc π est l'*application constante* qui envoie tout point M de $\mathcal{E}$ sur A, et σ est la *symétrie centrale* de centre A qui envoie tout point M de $\mathcal{E}$ sur le point M'' tel que A soit le milieu de (M, M'').

(2) Dans le cas particulier où $\mathcal{F}$ est l'espace $\mathcal{E}$ tout entier, alors $F = E$ et $H = \{\overrightarrow{0}\}$, donc π et σ sont égales à l'application identité de $\mathcal{E}$ (qui envoie tout point de M sur lui-même).

(3) Hormis ces cas extrêmes, les “vraies” situations que l'on rencontrera feront intervenir en dimension 2 des symétries par rapport à une droite $\mathcal{D}$ parallèlement à une autre droite $\mathcal{D}'$ non parallèle à $\mathcal{D}$, et en dimension 3 des symétries par rapport à un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une droite $\mathcal{D}$ ou par rapport à une droite $\mathcal{D}$ parallèlement à un plan $\mathcal{P}$ (avec la droite vectorielle dirigeant $\mathcal{D}$ non incluse dans le plan vectoriel dirigeant $\mathcal{P}$). De même bien sûr pour les projections.

(4) On peut vérifier aisément (la preuve est laissée en exercice) que:
   - une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une projection si et seulement si $\varphi \circ \varphi = \varphi$;
   - une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une symétrie si et seulement si $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Complément : notion d'affinité. Avec les mêmes données que dans les deux théorèmes ci-dessus, et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque, on définit l'*affinité* par rapport à $\mathcal{F}$, parallèlement à $\mathcal{H}$, et de rapport λ comme l'application φ qui, à tout point $M \in \mathcal{E}$, associe le point M' défini par: $\overrightarrow{\pi(M)\varphi(M)} = \lambda\overrightarrow{\pi(M)M}$.

Si $\lambda = 0$, φ est la projection π ; si $\lambda = -1$, φ est la symétrie σ ; si $\lambda = 1$, φ est $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

On démontre alors:

Proposition. *L'affinité φ est une application affine, d'application linéaire associée $f = \lambda\,\mathrm{id}_E + (1-\lambda)p$, où p est la projection vectorielle de E sur F parallèlement à H. En d'autres termes :*

$$f_{|F} = \mathrm{id}_F \text{ et } f_{|H} = \lambda\,\mathrm{id}_H.$$