UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles

première session
décembre 2000

DEUG STPI (2ème année) – IUP GSI (1ère année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1. Soit α un réel fixé. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que A est la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle inversible ?

3) On fixe dans cette question $\alpha = 0$.

- **a)** Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
- **b)** Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, et calculer P^{-1}.
- **c)** Donner la matrice D de f par rapport à la base $\mathcal{C}$.
- **d)** Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **e)** La formule trouvée ci-dessus reste-t-elle vraie pour $n = -1$?

4) Déterminer les fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = - 2y(t) \\ z'(t) = 5x(t) - 5y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

.../...

Exercice 2. On considère dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que A soit la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$.

2) Déterminer, pour chacune de valeurs propres de A, le sous-espace propre associé (en donner une ou des équations, la dimension, et une base).

3) En déduire la réduite de Jordan T de A et le polynôme minimal $\Pi_A(x)$, en justifiant avec soin les arguments utilisés pour conclure.

4) Construire une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que T soit la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{C}$. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Quelle relation a-t-on entre A, T et P ?

Exercice 3. *Test rapide sur la connaissance du cours et ses applications immédiates.* Pour chacune des questions suivantes, on demande une réponse brève et précise, avec une justification convaincante de quelques mots.

1) Rappeler la définition de $GL(n, \mathbb{R})$.

2) Rappeler la définition de deux matrices semblables.

3) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Est-il vrai que f est un automorphisme si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul ?

4) L'ensemble des solutions d'un système linéaire de n équations à n inconnues dans $\mathbb{R}$ est-il toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

5) Une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ est-elle toujours formée de n vecteurs ?

6) Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ qui soit de rang 4.

7) Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes, est-elle forcément diagonalisable ? Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable, admet-elle forcément 3 valeurs propres distinctes?

8) Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet une seule valeur propre, est-elle forcément diagonalisable?

9) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il vrai que la somme des valeurs propres de A (comptées avec leur multiplicité) est égal à la trace de A ? Est-il vrai que le produit des valeurs propres de A (comptées avec leur multiplicité) est égal au déterminant de A ?

10) Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (x-1)^2(x-2)^4$, et que son polynôme minimal est $\Pi_A(x) = (x-1)(x-2)^2$. Quelles peuvent être les formes possibles pour la réduite de Jordan de A ? Que faudrait-il pouvoir connaître en plus pour déterminer entre ces possibilités quelle est effectivement la réduite de Jordan de A ?

UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles

deuxième session
juin 2001

DEUG STPI (2ème année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Question de cours. Soit $A \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ telle que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ et le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A soient donnés par:

$$P_A(x) = (x-3)^4(x-5)^4 \qquad \text{et} \qquad \Pi_A(x) = (x-3)^2(x-5)^3.$$

Déterminer quelles sont les formes possibles de la réduite de Jordan de A (à l'ordre près des blocs), et indiquer pour chacune d'entre elles les dimensions des deux sous-espaces propres.

Exercice 1. Soient a, b, c, d, e, f des réels. On considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes (portant sur les réels a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.

.../...

Exercice 2. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites de réels définies par leurs premiers termes $u_0 = 1,\ v_0 = -1,\ w_0 = 0,$ et les relations de récurrence:

$$u_{n+1} = -4u_n - 6v_n, \quad v_{n+1} = 3u_n + 5v_n, \quad w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n.$$

1) En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2) Diagonaliser A.

3) A l'aide de la question précédente, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

5) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}; la formule donnant A^n trouvée à la question 3) reste-t-elle valable pour les entiers $n < 0$?

Exercice 3. On considère le système différentiel:

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) - z(t) - s(t) \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) - z(t) - 2s(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) - s(t) \\ s'(t) = x(t) - z(t) + 2s(t) \end{cases}$$

où $x(t), y(t), z(t), s(t)$ sont des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ du système (S).

2) a) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A.
b) Déterminer pour chaque valeur propre de A une base et la dimension du sous-espace propre associé.

3) a) Déduire de la question précédente la forme de la réduite de Jordan T de A.
b) Déterminer le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A.
c) Donner une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$.

4) En utilisant la question précédente, résoudre le système (S).

UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

première session
décembre 2001

IUP GSI (1ère année) et DEUG STPI (2ème année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit. Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante. La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Question de cours. Soient a et b deux réels, et $T \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ la matrice (réduite à la forme de Jordan):

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

1) On suppose ici $a \neq b$. On note E_a et E_b les sous-espaces propres respectivement associés aux valeurs propres a et b de T. On note F_a et F_b les sous-espaces caractéristiques respectivement associés aux valeurs propres a et b. En utilisant les résultats du cours, déterminer (sans calculs):

- **a)** le polynôme caractéristique $P(x)$ de T.
- **b)** le polynôme minimal $\Pi(x)$ de T.
- **c)** les dimensions $\dim E_a$ et $\dim E_b$.
- **d)** les dimensions $\dim F_a$ et $\dim F_b$.

2) Même question si $a = b$.

.../...

Exercice 1. On considère le système différentiel:

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 2y(t) + 2z(t) - s(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) + 2z(t) \\ s'(t) = -2x(t) + 2z(t) + s(t) \end{cases}$$

où $x(t), y(t), z(t), s(t)$ sont des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ du système (S).

2) **a)** Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A.
b) Déterminer pour chaque valeur propre de A une base et la dimension du sous-espace propre associé.

3) **a)** Déduire de la question précédente la forme de la réduite de Jordan T de A.
b) Déterminer le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A.
c) Donner une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$.

4) En utilisant la question précédente, résoudre le système (S).

Exercice 2. Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} q & 1 & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

1) Calculer, en discutant suivant les valeurs du paramètre q, le rang de la matrice A. Pour quelles valeurs de q est-elle inversible ?

2) Déterminer, suivant les valeurs de q, une base et une (ou des) équation(s) du noyau $\operatorname{Ker} f$ et de l'image $\operatorname{Im} f$. Le noyau et l'image sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3) Pour quelles valeurs de q la matrice A est-elle diagonalisable ?

4) On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$.
a) Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, et calculer P^{-1}.
c) Donner la matrice D de f par rapport à la base $\mathcal{C}$.
d) Calculer A^n dans le cas particulier où $q = 0$, pour tout entier $n \geq 1$.

DEUG STPI (2ème année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit.
Le sujet est constitué de deux exercices indépendants et d'une question de cours.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1. Soient a, b des réels quelconques fixés, que l'on suppose tous les deux non-nuls. On considère la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est M.

1) **a)** Calculer le déterminant de M.
b) Dans quels cas la matrice M est-elle inversible ?
c) Calculer, en distinguant différents cas pour a et b, le rang de la matrice M.

2) On suppose dans cette question que $a = b$.
a) Déterminer, par des équations et une base, le noyau $\operatorname{Ker} f$.
b) Déterminer, par des équations et une base, l'image $\operatorname{Im} f$.
c) Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

3) Mêmes questions en supposant que $a = -b$.

4) On suppose de nouveau dans cette question que a et b sont quelconques (mais toujours non-nuls).
a) Déterminer le polynôme caractéristique $P_M(x)$ de M.
b) Retrouver le résultat de la question 1)a).
c) Pour quelles valeurs de a et b la matrice M est-elle diagonalisable ?

.../...

Exercice 2. On considère le système différentiel:

$$
(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rclcrcrcr}
x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & - & z(t) & + & 3s(t) \\
y'(t) & = & -x(t) & - & y(t) & + & z(t) & + & 2s(t) \\
z'(t) & = & & - & 2y(t) & + & z(t) & + & 3s(t) \\
s'(t) & = & -x(t) & & & + & z(t) & + & s(t)
\end{array} \right.
$$

où $x(t), y(t), z(t), s(t)$ sont des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On appelle A la matrice de ce système.

1) Ecrire la matrice A et calculer son polynôme caractéristique $P_A(X)$.

2) Pour chacune des valeurs propres simples de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

3) *Etude de la valeur propre 1 de A.*

- **a)** Vérifier que 1 est une valeur propre double de A. Déterminer le sous-espace propre E_1 associé. Quelle est sa dimension ? La matrice A est-elle diagonalisable ?
- **b)** Calculer la matrice $B = (A - I_4)^2$. Donner une base du noyau de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ qui admet B pour matrice dans la base canonique.
- **c)** Montrer qu'une base du sous-espace caractéristique F_1 associé à la valeur propre 1 de A est constituée des deux vecteurs $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $v_1' = (1, 1, 1, 1)$.

4) *Réduction de Jordan de A.*

- **a)** Déduire des questions précédentes la forme de la réduite de Jordan J de A.
- **b)** Déterminer le polynôme minimal $\Pi_A(X)$ de A.
- **c)** Donner une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.

5) En utilisant la question précédente, résoudre le système (S).

Question de cours.

Soit $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ telle que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ et le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A soient donnés par:

$$P_A(x) = (x-1)^4(x-5)^3 \qquad \text{et} \qquad \Pi_A(x) = (x-1)^2(x-5)^2.$$

Déterminer quelles sont les formes possibles de la réduite de Jordan de A (à l'ordre près des blocs), et indiquer pour chacune d'entre elles les dimensions des deux sous-espaces propres.
La matrice A peut-elle, dans certains cas, être diagonalisable ?

IUP GSI (1ère année) et DEUG STPI (2ème année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit. Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante. La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Question de cours. On fixe un entier $n \geq 2$ et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1) Soit f un endomorphisme de E. Qu'est-ce-que le rang de f ?

2) Soit $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Qu'est-ce-que le rang de $\mathcal{C}$?

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrées d'ordre n. Qu'est-ce-que le rang de A ?

4) Que signifie pour f le fait d'être de rang égal à n ? Même question pour $\mathcal{C}$. Même question pour A.

Exercice 1.

1) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2) On considère le système différentiel:

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 9x(t) & + & 5y(t) & + & 5z(t) \\ y'(t) & = & -5x(t) & - & y(t) & - & 5z(t) \\ z'(t) & = & -5x(t) & - & 5y(t) & - & z(t) \end{array} \right.$$

où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- **a)** Ecrire la matrice A du système (S).
- **b)** Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A.
- **c)** La matrice A est-elle diagonalisable ?
- **d)** Résoudre le système (S).

3) Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.

.../...

Exercice 2. On considère dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On appelle f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1) *Valeurs propres de A.*

Montrer que A admet une valeur propre λ_1 d'ordre 4 et une valeur propre simple λ_2, que l'on déterminera.

2) *Sous-espaces propres associés.*

a) Déterminer des équations du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre λ_1. Calculer sa dimension et en donner une base.

b) Mêmes questions pour le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre λ_2.

3) *Forme de la réduite de Jordan.*

a) Déduire de la question 2)a) la forme de la réduite de Jordan T de A.

b) En déduire le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A. Quelle relation a-t-on entre $\Pi_A(x)$ et le polynôme caractéristique $P_A(x)$?

4) *Construction d'une base adaptée de $\mathbb{R}^5$.*

a) On introduit la matrice $B = A - I_5$. Calculer B, B^2, B^3, B^4.

b) Déterminer des équations de chacun des sous-espaces suivants: $N_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, $N_2 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})^2$, $N_3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})^3$, $N_4 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})^4$.

c) Montrer que $v_4 = (0, 1, 0, 1, 0)$ appartient à N_4 mais n'appartient pas à N_3.

d) Construire à partir de v_4, et en utilisant la question 2)b), une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^5$ telle que la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}'$ soit la réduite de Jordan T de la question 3)a).

e) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Quelle relation a-t-on entre A, T et P ?

IUP GSI (1ère année) et DEUG STPI (2ème année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit. Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante. La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

On note f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est M_α.

1) On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs suivants:

$$e'_1 = e_1 + e_2, \qquad e'_2 = e_3, \qquad e'_3 = e_1 + e_3.$$

- **a)** Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- **b)** Calculer P^{-1}.
- **c)** Calculer la matrice M'_α de f_α par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
- **d)** Pour quelles valeurs de α la matrice M_α est-elle diagonalisable ?
- **e)** Déduire des questions précédentes le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de M_α.

2) En appliquant les résultats de la question précédente à une valeur particulière de α, déterminer les fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel:

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

3) On suppose de nouveau dans cette question que α est quelconque dans $\mathbb{R}$.

- **a)** Pour quelle valeurs de α la matrice M_α est-elle inversible ?
- **b)** Déterminer, en discutant suivant les valeurs de α, des équations et une base du noyau $\operatorname{Ker} f_\alpha$.
- **c)** Calculer, en discutant suivant les valeurs de α, le rang de M_α.
- **d)** Déterminer, en discutant suivant les valeurs de α, une base et des équations de l'image $\operatorname{Im} f_\alpha$.
- **e)** Pour quelles valeurs de α les sous-espaces $\operatorname{Ker} f_\alpha$ et $\operatorname{Im} f_\alpha$ sont-ils supplémentaires ?

.../...

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) *Valeurs propres de A.*

a) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A.

b) En déduire que A n'admet qu'une seule valeur propre. Quel est son ordre de multiplicité ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) On note E le sous-espace propre associé à la valeur propre de A. Déterminer des équations, une base et la dimension de E.

2) *Forme de la réduite de Jordan.*

a) Au vu de la question 1)d), quelles sont a priori les formes possibles pour la réduite de Jordan T de A ?

b) On introduit la matrice $B = A - 2I_5$. Calculer B, B^2, B^3, B^4, B^5.

c) En déduire le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A.

d) Conclure en précisant quelle est la réduite de Jordan T de A.

3) *Construction d'une base adaptée de $\mathbb{R}^5$.*

a) On pose: $N_1 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}) = E$, $N_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})^2$, $N_3 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})^3$.

(i) Quelles inclusions a-t-on entre les trois noyaux N_1, N_2, N_3 ?

(ii) Déterminer des équations et la dimension de chacun de ces trois noyaux.

b) On pose: $v_3 = e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$.

(i) Calculer $v_2 = (f - 2\,\mathrm{id})(v_3)$ et $v_1 = (f - 2\,\mathrm{id})(v_2)$.

(ii) Vérifier que $v_3 \notin N_2$, $v_2 \in N_2$, $v_2 \notin N_1$, $v_1 \in N_1$.

(iii) Exprimer chacun des trois vecteurs $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ comme une combinaison linéaire des trois vecteurs v_1, v_2, v_3.

c) On pose: $w_2 = e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

(i) Calculer $w_1 = (f - 2\,\mathrm{id})(w_2)$.

(ii) Vérifier que $w_2 \in N_2$, $w_2 \notin N_1$, $w_1 \in N_1$.

(iii) Exprimer chacun des deux vecteurs $f(w_1), f(w_2)$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs w_1, w_2.

d) Montrer que la droite S_2 engendrée par v_3 est un supplémentaire de N_2 dans $\mathbb{R}^5$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^5 = N_2 \oplus S_2$.
Montrer que v_2 et w_2 engendrent un plan S_1 inclus dans N_2 qui est un supplémentaire de N_1 dans N_2, c'est-à-dire $N_2 = N_1 \oplus S_1$.

e) On pose $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, w_1, w_2)$.

(i) Déduire de la question d) que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

(ii) Montrer que la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$ est T.

(iii) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(iv) Quelle relation a-t-on entre A, T et P ?

DEUG STPI (2ème année) et IUP GSI (1ère année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1. *Test rapide sur la connaissance du cours et ses applications immédiates.*
Pour chacune des questions suivantes, on demande une réponse brève et précise, avec une justification convaincante de quelques mots.

1) Quand dit-on par définition que deux matrices carrées sont semblables ?

2) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^n$. Que signifie par définition que $E = F_1 \oplus F_2$?

3) Une famille libre dans $\mathbb{R}^n$ est-elle toujours formée de n vecteurs ?

4) Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui soit de rang 3.

5) Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant une seule valeur propre et qui soit diagonalisable, puis d'une matrice $A' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant une seule valeur propre et qui ne soit pas diagonalisable.

6) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire. Quelle relation a-t-on entre les valeurs propres de A et le déterminant de A ? Entre les valeurs propres de A et la trace de A ? Que deviennent ces résultats pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque (non nécessairement triangulaire) ?

7) Pour chacune des valeurs propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ suivante, déterminer la dimension du sous-espace propre associé. Calculer ensuite le polynôme minimal $\pi_A(x)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&2&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&3&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&3&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$$

.../...

Exercice 2. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites de réels définies par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0, et les relations de récurrence:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 5v_n \\ w_{n+1} = 6u_n + 8v_n + 3w_n \end{cases}$$

1) En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2) Diagonaliser A.

3) A l'aide de la question précédente, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n et des premiers termes u_0, v_0, w_0.

5) La formule donnant A^n trouvée à la question 3) reste-t-elle valable pour les entiers $n < 0$?

Exercice 3. On considère le système différentiel:

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + 3z(t) + 3s(t) \\ y'(t) = -3x(t) - 2z(t) + s(t) \\ z'(t) = - 3y(t) - z(t) - 3s(t) \\ s'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 2z(t) + s(t) \end{cases}$$

où $x(t), y(t), z(t), s(t)$ sont des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On appelle A la matrice de ce système et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont A est la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

1) Montrer que A admet deux valeurs propres. On convient dans la suite de noter λ_1 celle des deux qui est négative, et λ_2 celle qui est positive.

2) Pour chacune des valeurs propres λ_i (avec $i = 1$ ou 2), déterminer:
  a) la multiplicité algébrique q_i de λ_i,
  b) une ou des équations du sous-espace propre E_i associé à λ_i,
  c) la dimension r_i de E_i,
  d) le sous-espace caractéristique F_i associé à λ_i.

3) En déduire la forme de la réduite de Jordan J de A.

4) Déterminer le polynôme minimal $\pi_A(x)$ de A.

5) *(Construction d'une base adaptée)*
  a) Donner un vecteur v_2 appartenant à F_1 mais pas à E_1.
  b) Montrer que le vecteur $v_1 = (f - \lambda_1 \operatorname{id})(v_2)$ appartient à E_1.
  c) Donner deux vecteurs linéairement indépendants w_1 et w_2 dans E_2.
  d) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}'$ soit J.
  e) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

6) En appliquant les résultats de la question précédente, résoudre le système (S).

DEUG STPI (2ème année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul ou de communication (ordinateurs, calculatrices, téléphone mobile...) est interdit.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice I

(Questions de cours ou d'application immédiate du cours)

1) On fixe un entier $n \geq 2$ et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
a) Soit f un endomorphisme de E. Qu'est-ce-que le rang de f ?
b) Soit $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Qu'est-ce-que le rang de $\mathcal{C}$?
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. Qu'est-ce-que le rang de A ?
d) Que signifie pour f le fait d'être de rang égal à n ? Même question pour $\mathcal{C}$. Même question pour A.

2) Quel est le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?

3) **a)** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

b) Les matrices $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

4) **a)** Déterminer $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $P_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ et de polynôme minimal $\Pi_A(x) = (x-1)(x-2)^2$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ admettant 3 pour valeur propre simple, et 2 pour valeur propre d'ordre 4. Sachant que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 3, déterminer la réduite de Jordan de A et son polynôme minimal $\Pi_A(x)$.

5) Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est diagonalisable et inversible. Donner un exemple d'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est diagonalisable et non-inversible. Donner un exemple d'une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est inversible et non-diagonalisable. Donner un exemple d'une matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est ni diagonalisable, ni inversible.

.../...

Exercice II

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique est la matrice A_α suivante, qui dépend du paramètre α:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha-1 & -1 & 2-\alpha \\ -1 & \alpha & 1 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 2-\alpha \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Pour toute valeur de α, calculer le polynôme caractéristique $P_\alpha(x)$ de la matrice A_α.

2) a) Déterminer, en fonction du paramètre α, le déterminant de A_α.

b) Montrer qu'il existe une unique valeur du paramètre α pour laquelle l'endomorphisme f_α n'est pas bijectif.

c) Pour cette unique valeur, déterminer des équations, la dimension et une base du noyau de f_α.

d) Pour cette unique valeur, déterminer le rang de la matrice A_α, ainsi que des équations et une base de l'image de f_α.

3) On prend dans cette question $\alpha = 3$.

a) Quelles sont les valeurs propres de A_3 ? Déterminer pour chacune d'elles sa multiplicité et une base du sous-espace propre associé. La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer une base du sous-espace caractéristique associé à la valeur propre double de A_3.

c) Déterminer la réduite de Jordan T_3 de A_3, et une matrice $P \in GL(\mathbb{R}^4)$ telle que $A_3 = PT_3P^{-1}$.

d) Résoudre le système différentiel :

$$\text{(S)} \quad \left\{ \begin{array}{lcrcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & + & 2y(t) & - & z(t) & - & s(t) \\ y'(t) & = & -x(t) & + & 3y(t) & + & z(t) & - & 2s(t) \\ z'(t) & = & & + & 2y(t) & + & z(t) & - & s(t) \\ s'(t) & = & -x(t) & & & + & z(t) & + & s(t) \end{array} \right.$$

où $x(t), y(t), z(t), s(t)$ sont des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4) On suppose de nouveau dans cette question que α est quelconque dans $\mathbb{R}$. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les quatre vecteurs:

$$v_1 = (1,0,1,0),\ v_2 = (1,1,1,1),\ v_3 = (1,1,1,0),\ v_4 = (0,1,1,1).$$

a) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

b) Montrer que v_1, v_3 et v_4 sont des vecteurs propres de f_α, associés à des valeurs propres que l'on précisera. Calculer $f_\alpha(v_2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer la matrice T_α de f_α dans la base $\mathcal{B}'$.

d) Déterminer, en discutant suivant tous les cas possibles pour α:

- les valeurs propres de f_α avec leur ordre de multiplicité,
- la dimension des sous-espaces propres associés,
- le polynôme minimal $\Pi_\alpha(x)$ de f_α.

IUP GSI (1ère année)

Epreuve d'algèbre linéaire

Durée de l'épreuve: 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel de calcul (ordinateurs, calculatrices,...) est interdit.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter une question suivante.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Question de cours. Soit $A \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ telle que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ et le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A soient donnés par:

$$P_A(x) = (x-3)^4(x-5)^4 \qquad \text{et} \qquad \Pi_A(x) = (x-3)^2(x-5)^3.$$

Déterminer quelles sont les formes possibles de la réduite de Jordan de A (à l'ordre près des blocs), et indiquer pour chacune d'entre elles les dimensions des deux sous-espaces propres.

Exercice 1. Soient a, b, c, d, e, f des réels. On considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes (portant sur les réels a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.

.../...

Exercice 2. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites de réels définies par leurs premiers termes $u_0 = 1,\ v_0 = -1,\ w_0 = 0,$ et les relations de récurrence:

$$u_{n+1} = -4u_n - 6v_n, \quad v_{n+1} = 3u_n + 5v_n, \quad w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n.$$

1) En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2) Diagonaliser A.

3) A l'aide de la question précédente, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

5) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}; la formule donnant A^n trouvée à la question 3) reste-t-elle valable pour les entiers $n < 0$?

Exercice 3. On considère le système différentiel:

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) - z(t) - s(t) \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) - z(t) - 2s(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) - s(t) \\ s'(t) = x(t) - z(t) + 2s(t) \end{cases}$$

où $x(t), y(t), z(t), s(t)$ sont des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ du système (S).

2) a) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A.
b) Déterminer pour chaque valeur propre de A une base et la dimension du sous-espace propre associé.

3) a) Déduire de la question précédente la forme de la réduite de Jordan T de A.
b) Déterminer le polynôme minimal $\Pi_A(x)$ de A.
c) Donner une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$.

4) En utilisant la question précédente, résoudre le système (S).