

# Sur l'unicité de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

Hacène DJELLOUT

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, 21 avenue des Landais, 63177  
Aubière, France.

Courriel: djellout@ucfma.univ-bpclermont.fr

---

**Résumé.** Des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour que l'opérateur de Schrödinger généralisé unidimensionnel  $S = (-\frac{1}{2\phi^2} \frac{d}{dx}(\phi^2 \frac{d}{dx}), \mathcal{C}_0^\infty(D))$  soit un générateur essentiel dans  $L^p(D; \phi^2 dx)$ ; ( $p \geq 1$ ), (ceci implique l'unicité du  $C_0$ -semi-groupe dont le générateur étend  $-S$ ), en terme des propriétés de la fonction d'onde  $\phi$ , et pour un intervalle ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}$ . © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

## *On the uniqueness of the one-dimensional Schrödinger operator*

**Abstract.** Necessary and sufficient conditions are given for the one-dimensional generalized Schrödinger operator  $S = (-\frac{1}{2\phi^2} \frac{d}{dx}(\phi^2 \frac{d}{dx}), \mathcal{C}_0^\infty(D))$  to be an essential generator in  $L^p(D; \phi^2 dx)$ ; ( $p \geq 1$ ), in term of the properties of the wave fonction  $\phi$ , and for an open interval  $D$  in  $\mathbb{R}$ . This implies the uniqueness of the  $C_0$ -semigroup whose generator extends  $-S$ . © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

---

## Abridged English Version

Consider the generalized Schrödinger operator  $S = -A = (-\frac{1}{2\phi^2} \frac{d}{dx}(\phi^2 \frac{d}{dx}), \mathcal{C}_0^\infty(D))$  (or generator of Nelson's diffusion according to Meyer-Zheng [2]), where  $\phi$  is a continuous strictly positive function on an open interval  $D$  such that  $\phi' \in L^2_{loc}(D, \phi^2 dx) \cap L^p_{loc}(D, \phi^2 dx)$  (in the distribution sense), and  $\mathcal{C}_0^\infty(D)$  denotes the space of all infinitely differentiable real functions on  $D$  with compact support.

The essential self-adjointness of  $S$  in  $L^2(D, \phi^2 dx)$ , equivalent to the uniqueness of self-adjoint extension of  $S$ , or to the unique solvability of Schrödinger's equation in  $L^2(D, \phi^2 dx)$ , has been completely characterized in the work of Wielens [3]. This question has attracted much attention and many remarkable works, because of its importance in Quantum Mechanics, and very general results are known in the multidimensional case (see Wu [4], [5] for the relevant references).

Consequently of an intuitive probabilistic interpretation of the uniqueness, Wu [4] has introduced and studied extensively the notion of  $L^1(D, \phi^2 dx)$ -uniqueness, in multidimensional case. This property has important implications on the unique solvability of PDEs: resolvent and heat diffusion equations, and the eigenvalue problem of the Schrödinger operator, etc.

---

Note présentée par

We say that  $-S$  (or  $S$  with some abuse) is an **essential generator** in  $L^p(D, \phi^2 dx) = L^p$ , in abridge  $L^p$ -e-gr, if its closure in  $L^p$  is the generator of a strongly continuous semigroup of bounded operators  $(P_t)_{t \geq 0}$  (or  $C_0$  semigroup simply).

For a e-gr.  $A$ ,  $(P_t)_{t \geq 0}$  is the unique  $C_0$ -semigroupe whose generator is an extension of  $A$ . This notion, introduced in Wu [4], is exactly the counterpart in  $L^p$  of the essential self-adjointness.

A complete discussion of the  $L^p$ -e-gr of  $A$ ,  $p \geq 1$  is given in this note. We begin with

**THEOREM 1.** – *When  $D = \mathbb{R}$ , the operator  $A$  is  $L^p$ -e-gr.*

When  $D = (r_1, r_2)$ , where  $(-\infty \leq r_1 \leq r_2 \leq +\infty)$ , we use the classification of Feller of the boundaries, to characterize the  $L^p$ -e-gr of  $A$ . Let  $r_i$  an entrance boundary and  $c \in D$ . We call  $r_i$  a  **$q$ -strong entrance boundary** if

$$\left| \int_c^{r_i} \left| \int_c^x \frac{dy}{\phi^2(y)} \right|^q \phi^2(x) dx \right| = +\infty ,$$

it is called a  **$q$ -weak entrance** otherwise.

**THEOREM 2.** – *For  $1 < p < +\infty$ , we have*

(a) *If  $r_1$  and  $r_2$  are exit boundaries or natural boundaries or  $q$ -strong entrance boundaries (there are 9 cases), then the operator  $A$  is  $L^p$ -e-gr.*

(b) *If one of the boundaries  $r_1$  or  $r_2$  is regular boundary, or  $q$ -weak entrance boundary, then the operator  $A$  is not  $L^p$ -e-gr.*

*Remark :* When  $p = 1$ , the operator  $A$  is  $L^p$ -e-gr iff  $r_1$  and  $r_2$  are inaccessible, by Wu [5].

## 1. Introduction

Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $D = (r_1, r_2)$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$   $(-\infty \leq r_1 < r_2 \leq +\infty)$ , et  $\phi$  une fonction strictement positive, continue dont la dérivée au sens de distribution est dans  $L^2_{loc}(D, \phi^2 dx) \cap L^p_{loc}(D, \phi^2 dx)$ . On désigne par  $C_0^\infty(D)$  l'espace des fonctions réelles infiniment dérivables sur  $D$  et à support compact.

Considérons l'opérateur de Schrödinger généralisé  $S = -A = (-\frac{1}{2\phi^2} \frac{d}{dx}(\phi^2 \frac{d}{dx}), C_0^\infty(D))$  (ou le générateur de la diffusion de Nelson selon Meyer-Zheng [2]).

La propriété essentiellement auto-adjointe (e.a.a) de  $S$  dans  $L^2(D, \phi^2 dx)$  est équivalente à l'unicité de l'extension auto-adjointe de  $S$ , ou à l'unique solvabilité de l'équation de Schrödinger dans  $L^2(D, \phi^2 dx)$ . Elle a été caractérisée complètement dans le travail de Wielens [3], dans le cas unidimensionnel. Vue son importance en mécanique quantique, cette question a suscité beaucoup d'intérêt et des travaux remarquables, dans le cas multidimensionnel (voir Wu [4], [5] et les références correspondantes).

Partant d'une interprétation probabiliste intuitive de l'unicité Wu [4] a introduit et étudié la notion de  $L^1(D, \phi^2 dx)$ -générateur essentiel, dans le cas multidimensionnel. Cette propriété a des applications importantes à l'unicité des solutions des EDP: équation de la chaleur, et celle de la résolvente, et le problème des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger, pour de plus amples détails voir Wu [4] section 6.

**DÉFINITION 1.1.** *L'opérateur  $S$  est dit un **générateur essentiel** dans  $L^p(D, \phi^2 dx) = L^p$  (en abrégé  $L^p$ -gr-e), si sa fermeture dans  $L^p$  est le générateur d'un semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  d'opérateurs bornés fortement continu sur  $L^p$  (ou un  $C_0$ -semi-groupe simplement).*

*Remarques.*

(i) Si l'opérateur  $A$  est gr-e., alors  $(P_t)_{t \geq 0}$  est l'unique  $C_0$ -semi-groupe dont le générateur est une extension de  $A$ .

(ii) Cette notion, introduite dans Wu [4] est exactement la contre-partie dans  $L^p(D, \phi^2 dx)$  de la propriété e.a.a de  $S$ .

(iii) Si  $\phi^2(x)dx$  est une mesure finie,  $L^p \subset L^{p'}$  pour  $p' \leq p$ , la propriété  $L^p$ -gr-e est plus forte que  $L^{p'}$ -gr-e.

(iv) Eberle [1] a étudié dans sa thèse la notion de  $L^p$ -unicité.

Dans cette note, on discute la notion de  $L^p$ -gr-e pour  $A = -S$ .

Le lemme suivant montre que l'opérateur  $A$  est la restriction du générateur de la diffusion

$$dX_t = dW_t + \frac{\phi'}{\phi}(X_t)dt$$

dans  $L^p$ . Ici  $(W_t)_{t \geq 0}$  désigne le processus de Wiener standard défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x)$  tel que  $\mathbb{P}_x(W_0 = x) = 1$ . Posons

$$L_t = \int_0^t \frac{\phi'}{\phi}(W_s) dW_s, \quad \langle L \rangle_t = \int_0^t \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2(W_s) ds$$

$$\forall t < \tau_D = \inf\{s > 0; W_s \notin D\}$$

Par le Lemme 1.2 dans Wu [5] et notre hypothèse  $\phi' \in L^2_{loc}(D, \phi^2 dx) \cap L^p_{loc}(D, \phi^2 dx)$ , on déduit facilement

LEMME 1.2. – *Le semi-groupe  $T_t f(x) = \mathbb{E}^x [f(W_t) e^{L_t - \frac{\langle L \rangle_t}{2}} \mathbb{1}_{t < \tau_D}]$  est sous-markovien symétrique dans  $L^2$ , et fortement continu dans  $L^p$  pour tout  $p \in [1, \infty[$ . Son générateur dans  $L^p$  est une extension de  $A$ .*

On définit l'opérateur  $L$  par

$$Lf = \frac{1}{2}f'' + \frac{\phi'}{\phi} \cdot f' ,$$

$$\mathbb{D}(L) = \left\{ f / f \text{ est continûment différentiable sur } D, \text{ et } f' \text{ est absolument continue} \right\} .$$

Par intégration par parties, on peut montrer que l'opérateur adjoint  $A^*$  est donné par

$$A^* f = Lf = \frac{1}{2}f'' + \frac{\phi'}{\phi} \cdot f' ,$$

$$\mathbb{D}(A^*) = \left\{ f \in \mathbb{D}(L) / f \in L^q, Lf \in L^q \right\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

En appliquant le lemme 2.6 dans Wu [4], et le théorème de Hahn-Banach on a :

L'opérateur  $A$  est un  $L^p$ -gr-e ssi  $\left( (1 - L)f = 0 \text{ pour } f \in L^q \implies f = 0 \right)$ . Ainsi la question se ramène à montrer que les seules solutions de  $Lf = f$  dans  $L^q$  sont les solutions triviales. Cette propriété est en quelque sorte un théorème de Liouville.

## 2. Résultats

THÉORÈME 2.1 – *Quand  $D = \mathbb{R}$ , l'opérateur  $A$  est  $L^p$ -gr-e.*

Pour le cas général, on utilise la classification de Feller. On introduit la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. Soit  $r_i$  une borne d'entrée, et  $c \in D$ . On dit que  $r_i$  est une borne d'entrée  $q$ -forte si

$$\left| \int_c^{r_i} \left| \int_c^x \frac{dy}{\phi^2(y)} \right|^q \phi^2(x) dx \right| = +\infty ,$$

elle est dite d'entrée  $q$ -faible dans le cas contraire.

THÉORÈME 2.3 – Pour  $1 < p < \infty$ , on a

(a) Si  $r_1$  et  $r_2$  sont des bornes de sorties ou naturelles ou d'entrée  $q$ -fortes (il y a 9 cas), alors l'opérateur  $A$  est  $L^p$ -gr-e.

(b) Si l'une des bornes  $r_1, r_2$  est régulière, ou une borne d'entrée  $q$ -faible, alors l'opérateur  $A$  n'est pas  $L^p$ -gr-e.

Remarques.

(1) Une expression équivalente du théorème 2.3 est : l'opérateur  $A$  n'est pas  $L^p$ -gr-e ssi l'une des bornes  $r_1$  ou  $r_2$  est régulière ou d'entrée  $q$ -faible. C'est une extension naturelle de Wielens [3].

(2) Si  $p = 1$ , l'opérateur  $A$  est  $L^1$ -gr-e ssi  $r_1$  et  $r_2$  sont inaccessibles, voir Wu [5].

### 3. Preuves

Les idées de la preuve (pour  $1 < p < \infty$ ) reposent sur les techniques développées dans l'article de Wielens [3]. Soit  $r_1 < c < r_2$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in D$ , posons  $u_0(x) = 1$  et  $u_{n+1}(x) = \int_c^x \left( \int_c^y u_n(t) \phi^2(t) dt \right) \frac{dy}{\phi^2(y)}$ . Chacune de ces fonctions est continûment différentiable. Introduisons:

$$w(x) := \sum_0^\infty 2^n u_n(x) , \quad w_0(x) := w(x) \int_c^x \frac{dy}{w^2(y) \phi^2(y)} ,$$

$$w_1(x) := w(x) \int_{r_1}^x \frac{dy}{w^2(y) \phi^2(y)} , \quad w_2(x) := w(x) \int_x^{r_2} \frac{dy}{w^2(y) \phi^2(y)} ;$$

Ces fonctions sont bien définies et sont des solutions de l'équation  $Lf = f$  (au sens suivant:  $f$  est continûment différentiable et  $f'$  est absolument continue et  $\frac{1}{2\phi^2}(\phi^2 f')' = f$  p.s. sur  $D$ ). Toute solution de cette équation est de plus combinaison linéaire de deux de ces fonctions, voir théorème 2.1 dans [3]. On prouve que si  $f$  est une solution non triviale de  $Lf = f$ , alors pour tout  $d_1, d_2$  tel que  $r_1 < d_1 < c < d_2 < r_2$  il existe une constante  $k = k(f, d_1, d_2)$  telle que

$$\int_{r_1}^{r_2} |f(x)|^q \phi^2(x) dx \geq k \min \left\{ \int_{d_2}^{r_2} w^q(x) \phi^2(x) dx, \int_{r_1}^{d_1} w^q(x) \phi^2(x) dx \right\} \quad (1)$$

Preuve du Théorème 2.1 – Soit  $-\infty < d_1 < c < d_2 < +\infty$ . Par l'inégalité de Schwartz, on a:

$$\infty = \int_{-\infty}^{d_1} w^q(x) \phi^2(x) dx \int_{-\infty}^{d_1} \frac{dx}{w^q(x) \phi^2(x)}$$

$$\infty = \int_{d_2}^{+\infty} w^q(x) \phi^2(x) dx \int_{d_2}^{+\infty} \frac{dx}{w^q(x) \phi^2(x)}$$

On peut vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{w^q(x) \phi^2(x)} < \infty .$$

L'inégalité (1) permet de conclure, que la solution triviale est l'unique solution dans  $L^q(\mathbb{R})$  de  $Lf = f$ .  $\diamond$

*Preuve du Théorème 2.3* – Tout d'abord, on montre qu'il existe une constante  $k = k(d_1, d_2) > 0$  telle que

$$\int_{d_2}^{r_2} w^q(x) \phi^2(x) dx \geq k \int_{d_2}^{r_2} \left( \int_{d_2}^x \frac{dy}{\phi^2(y)} \right)^q \phi^2(x) dx ,$$

$$\int_{r_1}^{d_1} w^q(x) \phi^2(x) dx \geq k \int_{r_1}^{d_1} \left( \int_x^{d_1} \frac{dy}{\phi^2(y)} \right)^q \phi^2(x) dx .$$

L'inégalité (1) et les résultats suivants permettent de conclure la preuve du théorème 2.3. Soit  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ , alors :

a) Si  $r_i$  est une borne d'entrée, il existe deux constante  $k_1, k_2$  telles que :

$$\left| \int_c^{r_i} w^q(x) \phi^2(x) dx \right| \leq k_1 + k_2 \left| \int_c^{r_i} \left| \int_c^x \frac{dy}{\phi^2(y)} \right|^q \phi^2(x) dx \right| ;$$

b)  $\left| \int_c^{r_i} w_i^q(x) \phi^2(x) dx \right| < \infty$  ;

c) Si  $r_i$  est une borne régulière, alors  $\left| \int_c^{r_i} w_j^q(x) \phi^2(x) dx \right| < \infty$  ;

d) Si  $r_i$  est une borne sortie, alors  $\left| \int_c^{r_i} w^q(x) \phi^2(x) dx \right| = \infty$  ;

e) Si  $r_i$  est une borne naturelle, alors  $\left| \int_c^{r_i} w^q(x) \phi^2(x) dx \right| = \infty$  ;

f) Si  $r_i$  est une borne d'entrée  $q$ -faible, alors  $\left| \int_c^{r_i} w_j^q(x) \phi^2(x) dx \right| < \infty$  ;

g) Si  $r_i$  une borne d'entrée  $q$ -forte, alors  $\left| \int_c^{r_i} w^q(x) \phi^2(x) dx \right| = \infty$  .  $\diamond$

#### 4. Exemple

On considère  $\phi(x) = x^\gamma$ ,  $\gamma$  un nombre réel, et  $D = (0, +\infty)$  .

Le point  $+\infty$  est naturel.

Le point 0 est régulier pour  $\frac{-1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$ , point de sortie pour  $\gamma \leq \frac{-1}{2}$  et point d'entrée pour  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  , cette entrée est :  $q$ -forte pour  $\gamma \geq \frac{q+1}{2(q-1)}$  , et  $q$ -faible pour  $\gamma < \frac{q+1}{2(q-1)}$  .

Ainsi d'après ce qui précède on a :

i) L'opérateur  $A$  est  $L^1$ -gr-e ssi  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  ;

ii) L'opérateur  $A$  est e.a.a pour  $\gamma \geq \frac{3}{2}$  ou  $\gamma \leq \frac{-1}{2}$  ;

iii) L'opérateur  $A$  est  $L^p$ -gr-e ssi  $\gamma \leq \frac{-1}{2}$  ou  $\gamma \geq \frac{q+1}{2(q-1)} = \frac{2p-1}{2}$  pour  $1 < p < +\infty$  .

**Remerciement:** L'auteur remercie le professeur L. Wu de lui avoir suggéré le problème, puis d'avoir encadré ses travaux pour le résoudre.

#### Références bibliographiques

- [1] Eberle A., Uniqueness and non-uniqueness of singular diffusion operators, thèse de Doctorat de l'Université de Bielefeld, Allemagne, 1997.
- [2] Meyer P. A., Zheng W. A., Construction de processus de Nelson réversible, Sem. Probab. XIX, Lect. Notes Math. 1123 (1984) 12–26.
- [3] Wielens N., The essential self adjointness of generalized Schrödinger operators, J. Funct. Anal. 61 (1985) 98–115.
- [4] Wu L., Uniqueness of Schrödinger operators restricted in a domain, J. Funct. Anal. 153 (1998) 276-319.
- [5] Wu L., Uniqueness of Nelson's diffusions, à apparaître dans Proba. Th. Rel. Fields 114 (1999).