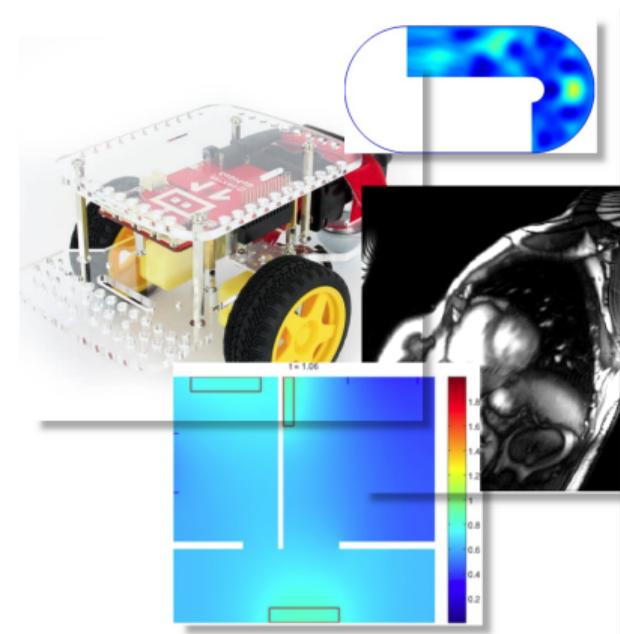


Contrôlabilité et problèmes inverses
pour quelques équations aux dérivées partielles.
Aspects théoriques et numériques

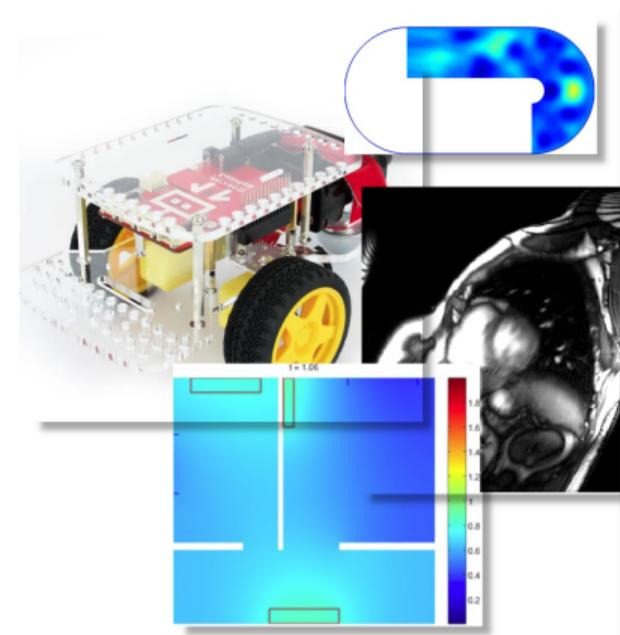
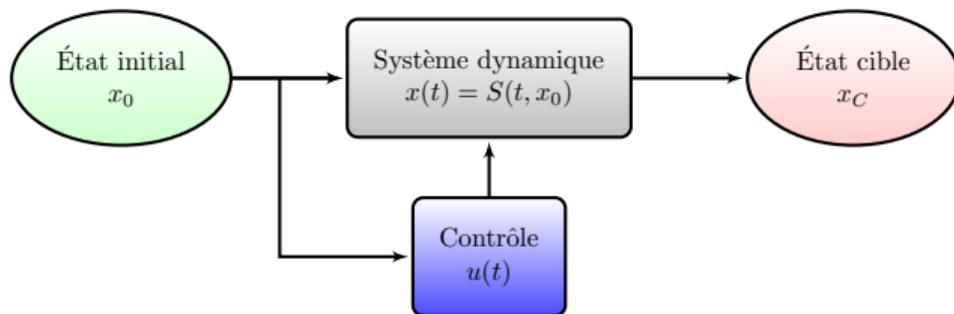
Nicolae Cîndea

21 octobre 2019

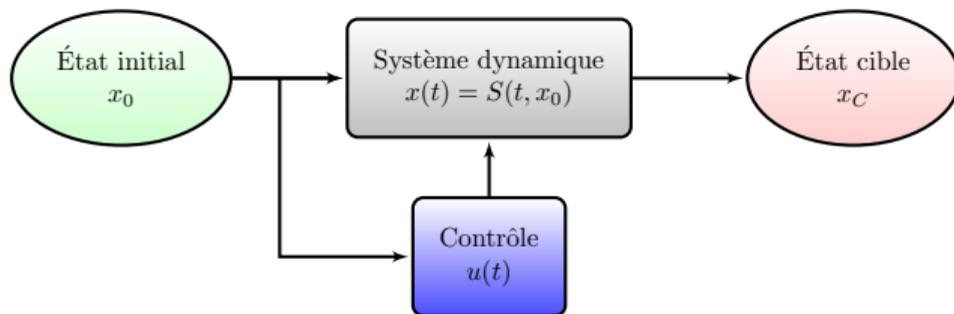
Contrôlabilité et problèmes inverses



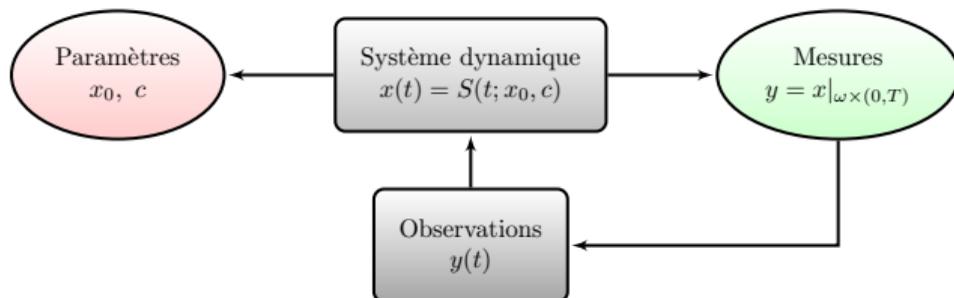
Un système contrôlé



Un système contrôlé



Un problème inverse



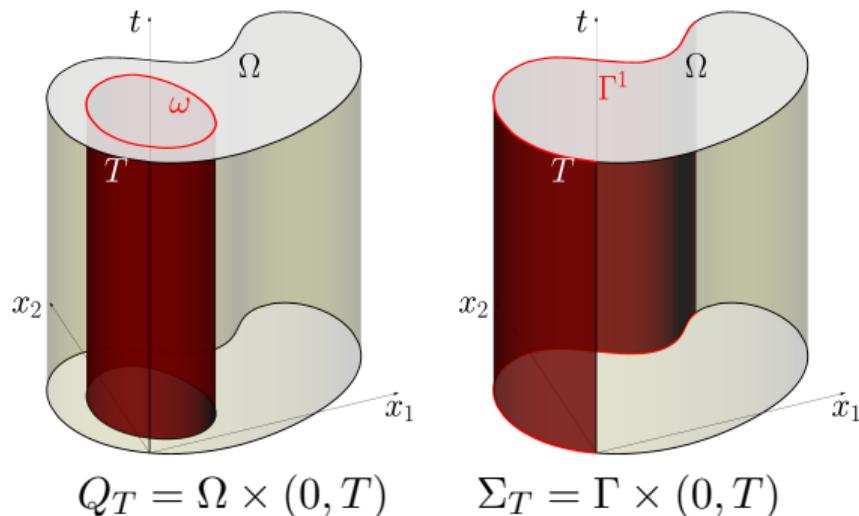
Contrôlabilité et problèmes inverses

Exemple 1 : contrôlabilité de l'équation des ondes

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = \mathbb{1}_\omega u, & \text{dans } Q_T \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y_0, \quad y_t(\cdot, 0) = y_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Trouver u tel que

$$y(\cdot, T) = z_0, \quad y_t(\cdot, T) = z_1 \text{ dans } \Omega.$$



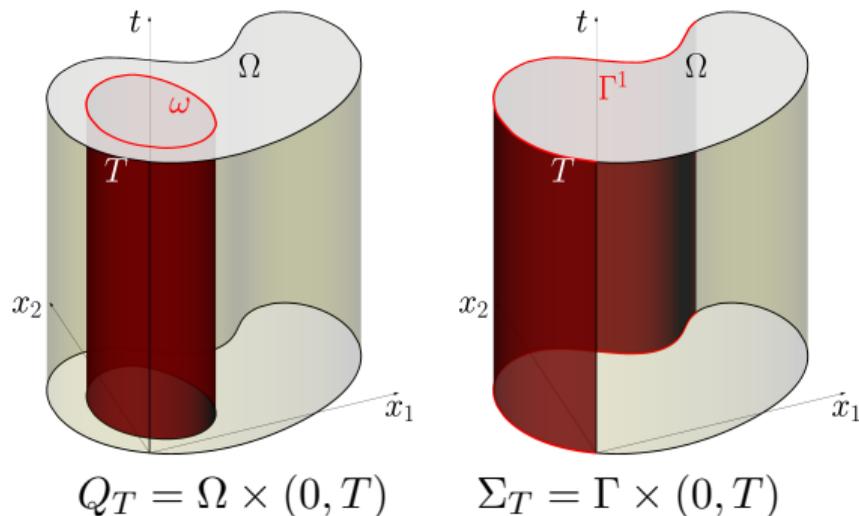
Contrôlabilité et problèmes inverses

Exemple 1 : contrôlabilité de l'équation des ondes

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0, & \text{dans } Q_T \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T \setminus (\Gamma_1 \times (0, T)) \\ y = u, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ y(\cdot, 0) = y_0, \quad y_t(\cdot, 0) = y_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Trouver u tel que

$$y(\cdot, T) = z_0, \quad y_t(\cdot, T) = z_1 \text{ dans } \Omega.$$



Contrôlabilité et problèmes inverses

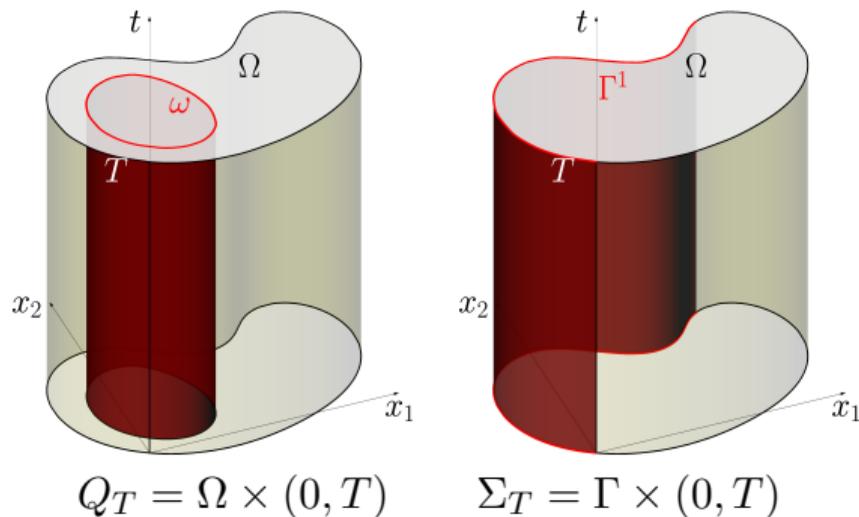
Exemple 2 : un problème inverse pour l'équation des ondes

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = f, & \text{dans } Q_T \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y_0, \quad y_t(\cdot, 0) = y_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Trouver (y_0, y_1) et/ou f

à partir des mesures de y sur :

- ▶ $\omega \times (0, T)$
- ▶ $\Gamma_1 \times (0, T)$



Plan de l'exposé

Contrôle

Problèmes inverses

Autres travaux

Contrôle

Méthodes espaces-temps pour la contrôlabilité de l'équation des ondes
Approximation des contrôles pour une équation de poutre

Problèmes inverses

Autres travaux

On considère l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} y_{tt} - (a(x)y_x)_x + b(x,t)y = 0, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = v(t), & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x), & x \in (0,1) =: \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Problème de contrôle

On dit que l'équation (1) est *contrôlable à 0 en temps T* si pour toute donnée initiale $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ il existe $v \in L^2(0,T)$ tel que

$$y(\cdot, T) = y_t(\cdot, T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Inégalité d'observabilité pour le problème adjoint

Il existe une constante $k^* > 0$ telle que toute solution ϕ du *problème adjoint* suivant :

$$\begin{cases} L\phi = 0 & \text{dans } Q_T \\ \phi = 0 & \text{sur } \Sigma_T \\ (\phi(\cdot, T), \phi_t(\cdot, T)) = (\phi_0, \phi_1) & \text{dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

vérifie

$$\|\phi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k^* \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt \quad \forall (\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

$$L\phi = \phi_{tt} - (a\phi_x)_x + b\phi$$

L'inégalité d'observabilité précédente assure la coercitivité de la fonctionnelle strictement convexe suivante :

$$J^*(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0) dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}$$

définie pour toute $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et ϕ solution du problème adjoint.

L'inégalité d'observabilité précédente assure la coercitivité de la fonctionnelle strictement convexe suivante :

$$J^*(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}$$

définie pour toute $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et ϕ solution du problème adjoint. Le contrôle de norme L^2 minimale est alors donné par

$$v(t) = a(1)\phi_x(1, t),$$

où ϕ est la solution du problème adjoint correspondant à la donnée initiale $(\phi_0^*, \phi_1^*) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ minimisant J^* .

L'inégalité d'observabilité précédente assure la coercitivité de la fonctionnelle strictement convexe suivante :

$$J^*(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}$$

définie pour toute $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et ϕ solution du problème adjoint. Le contrôle de norme L^2 minimale est alors donné par

$$v(t) = a(1)\phi_x(1, t),$$

où ϕ est la solution du problème adjoint correspondant à la donnée initiale $(\phi_0^*, \phi_1^*) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ minimisant J^* .

Difficulté numérique : en général, quand on discrétise l'équation des ondes, en général, la constante d'observabilité associée au problème discret n'est pas uniforme par rapport au paramètre de discrétisation.

L'inégalité d'observabilité précédente assure la coercitivité de la fonctionnelle strictement convexe suivante :

$$J^*(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}$$

définie pour toute $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et ϕ solution du problème adjoint. Le contrôle de norme L^2 minimale est alors donné par

$$v(t) = a(1)\phi_x(1, t),$$

où ϕ est la solution du problème adjoint correspondant à la donnée initiale $(\phi_0^*, \phi_1^*) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ minimisant J^* .

Difficulté numérique : en général, quand on discrétise l'équation des ondes, en général, la constante d'observabilité associée au problème discret n'est pas uniforme par rapport au paramètre de discrétisation.

⇒ Les contrôles discrets ne convergent pas vers le contrôle continu !

Minimiser la fonctionnelle *primale*

Idée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(y, v) = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 |y|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \rho_0^2 |v|^2 dt \\ \text{sujet à } (y, v) \in \mathcal{C}(y_0, y_1; T) \end{array} \right. \quad (\text{MP})$$

où $\mathcal{C}(y_0, y_1; T) = \{(y, v) : v \in L^2(0, T), y \text{ solution contrôlée de (1)}\}$.

Minimiser la fonctionnelle *primale*

Idée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(y, v) = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 |y|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \rho_0^2 |v|^2 dt \\ \text{sujet à } (y, v) \in \mathcal{C}(y_0, y_1; T) \end{array} \right. \quad (\text{MP})$$

où $\mathcal{C}(y_0, y_1; T) = \{(y, v) : v \in L^2(0, T), y \text{ solution contrôlée de (1)}\}$.

On définit les espaces suivants

$$P_0 = \{q \in C^2(\overline{Q_T}) : q = 0 \text{ on } \Sigma_T\}. \quad P = \overline{P_0}^{\|\cdot\|_P}$$

où

$$\langle p, q \rangle_P = \iint_{Q_T} \rho^{-2} Lp Lq dx dt + \int_0^T \rho_0^{-2} a(1)^2 p_x(1, t) q_x(1, t) dt$$

Proposition (N.C., E. Fernández-Cara, A. Münch (2013))

Soit $T > 0$ suffisamment grand. Supposons que ρ et ρ_0 sont strictement positives et vérifient $\rho \in C(Q_T)$, $\rho_0 \in C([0, T])$ et $\rho, \rho_0 \geq \underline{\rho} > 0$. Alors, pour toute donnée initiale $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ le problème (MP) admet une unique solution.

Proposition (N.C., E. Fernández-Cara, A. Münch (2013))

Soit $T > 0$ suffisamment grand. Supposons que ρ et ρ_0 sont strictement positives et vérifient $\rho \in C(Q_T)$, $\rho_0 \in C([0, T])$ et $\rho, \rho_0 \geq \underline{\rho} > 0$. Alors, pour toute donnée initiale $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ le problème (MP) admet une unique solution.

Proposition (N.C., E. Fernández-Cara, A. Münch (2013))

Il existe $p \in P$ telle que la solution $(y, v) \in \mathcal{C}(y_0, y_1; T)$ de (MP) est donnée par

$$y = -\rho^{-2}Lp, \quad v = -(a(x)\rho_0^{-2}p_x)|_{x=1}.$$

De plus, $p \in P$ est l'unique solution de la formulation variationnelle suivante :

$$\iint_{Q_T} \rho^{-2}LpLqdxdt + \int_0^T \rho_0^{-2}a^2(1)p_x(1, t)q_x(1, t)dt = \langle y_0, q_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2} - \langle y_1, q(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}$$

pour tout $q \in P$.

Minimiser la fonctionnelle *primale*

Une approximation conforme

Si on note

$$m(p, q) = \iint_{Q_T} \rho^{-2} LpLq dx dt + \int_0^T \rho_0^{-2} a^2(1) p_x(1, t) q_x(1, t) dt$$
$$l(q) = \langle \mathbf{y}_0, q_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2} - \langle \mathbf{y}_1, q(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}.$$

le problème variationnel s'écrit :

$$m(p, q) = l(q) \quad \forall q \in P.$$

Minimiser la fonctionnelle *primale*

Une approximation conforme

Si on note

$$m(p, q) = \iint_{Q_T} \rho^{-2} LpLq dx dt + \int_0^T \rho_0^{-2} a^2(1) p_x(1, t) q_x(1, t) dt$$
$$l(q) = \langle \mathbf{y}_0, q_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2} - \langle \mathbf{y}_1, q(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}.$$

le problème variationnel s'écrit :

$$m(p, q) = l(q) \quad \forall q \in P.$$

Soit $P_h \subset P$, P_h de dimension finie et

$$m(p_h, q_h) = l(q_h) \quad \forall q \in P_h.$$

Minimiser la fonctionnelle *primale*

Une approximation conforme

Si on note

$$m(p, q) = \iint_{Q_T} \rho^{-2} LpLq dx dt + \int_0^T \rho_0^{-2} a^2(1) p_x(1, t) q_x(1, t) dt$$
$$l(q) = \langle \mathbf{y}_0, q_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2} - \langle \mathbf{y}_1, q(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}.$$

le problème variationnel s'écrit :

$$m(p, q) = l(q) \quad \forall q \in P.$$

Soit $P_h \subset P$, P_h de dimension finie et

$$m(p_h, q_h) = l(q_h) \quad \forall q \in P_h.$$

$$p_h \rightarrow p \implies v_h \rightarrow v.$$

Une reformulation mixte du problème de contrôle

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\phi \in W} \hat{J}^*(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1} \quad (\text{MD})$$

avec l'espace W défini par :

$$W = \{ \phi \in L^2(Q_T), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \text{ telle que } L\phi = 0 \in L^2(Q_T), \phi_x(1, \cdot) \in L^2(0, T) \}.$$

Une reformulation mixte du problème de contrôle

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\phi \in W} \hat{J}^*(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1} \quad (\text{MD})$$

avec l'espace W défini par :

$$W = \{ \phi \in L^2(Q_T), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \text{ telle que } L\phi = 0 \in L^2(Q_T), \phi_x(1, \cdot) \in L^2(0, T) \}.$$

► W est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_W = \int_0^T a(1)^2 \phi_x(1, t) \bar{\phi}_x(1, t) dt, \quad \forall \phi, \bar{\phi} \in W.$$

Une reformulation mixte du problème de contrôle

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\phi \in W} \hat{J}^*(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1} \quad (\text{MD})$$

avec l'espace W défini par :

$$W = \{ \phi \in L^2(Q_T), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \text{ telle que } L\phi = 0 \in L^2(Q_T), \phi_x(1, \cdot) \in L^2(0, T) \}.$$

- ▶ W est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_W = \int_0^T a(1)^2 \phi_x(1, t) \bar{\phi}_x(1, t) dt, \quad \forall \phi, \bar{\phi} \in W.$$

- ▶ si $\phi \in W$, l'inégalité d'observabilité donne $(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Soit Φ l'espace suivant contenant W :

$$\Phi = \{ \phi \in L^2(Q_T), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \text{ telle que } L\phi \in L^2(Q_T), \phi_x(1, \cdot) \in L^2(0, T) \},$$

équipé du produit scalaire

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_{\Phi} = \int_0^T a(1)^2 \phi_x(1, t) \bar{\phi}_x(1, t) dt + \eta \iint_{Q_T} L\phi L\bar{\phi} dx dt, \quad \forall \phi, \bar{\phi} \in \Phi,$$

pour un réel fixé $\eta > 0$.

Soit Φ l'espace suivant contenant W :

$$\Phi = \{ \phi \in L^2(Q_T), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \text{ telle que } L\phi \in L^2(Q_T), \phi_x(1, \cdot) \in L^2(0, T) \},$$

équipé du produit scalaire

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_{\Phi} = \int_0^T a(1)^2 \phi_x(1, t) \bar{\phi}_x(1, t) dt + \eta \iint_{Q_T} L\phi L\bar{\phi} dx dt, \quad \forall \phi, \bar{\phi} \in \Phi,$$

pour un réel fixé $\eta > 0$.

Considérons formulation mixte suivante : trouver $(\phi, \lambda) \in \Phi \times L^2(Q_T)$

$$\begin{cases} \mathfrak{a}(\phi, \bar{\phi}) + \mathfrak{b}(\bar{\phi}, \lambda) = \ell(\bar{\phi}), & \forall \phi \in \Phi \\ \mathfrak{b}(\phi, \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(Q_T), \end{cases} \quad (\text{FM})$$

$$\text{où } \mathfrak{a} : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}(\phi, \bar{\phi}) = \langle \phi, \bar{\phi} \rangle_W$$

$$\mathfrak{b} : \Phi \times L^2(Q_T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}(\phi, \lambda) = \iint_{Q_T} L\phi(x, t) \lambda(x, t) dx dt$$

$$\ell : \Phi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(\phi) = - \int_0^1 y_0(x) \phi_t(x, 0) dx + \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}.$$

Théorème (N.C., A. Münch (2015))

Soit $x_0 < 0$, $a_0 > 0$ et $a \in \mathcal{A}(x_0, a_0)$. Pour tout $T > T^*(a)$ les affirmations suivantes sont vérifiées :

1. La formulation mixte (FM) est bien posée.
2. L'unique solution $(\phi, \lambda) \in \Phi \times L^2(Q_T)$ de (FM) est l'unique point selle du Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} : \Phi \times L^2(Q_T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(\phi, \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}(\phi, \phi) + \mathfrak{b}(\phi, \lambda) - \ell(\phi).$$

3. La fonction ϕ donnée par 2. satisfait $\phi \in W$ et est l'unique minimiseur de la fonctionnelle \hat{J}^* sur W . Le multiplicateur de Lagrange λ est l'état de l'équation des ondes contrôlée correspondante, vérifiée au sens faible.

$$\mathcal{A}(x_0, a_0) = \left\{ a \in C^3([0, 1]) : a(x) \geq a_0 > 0, \right. \\ \left. - \min_{x \in [0, 1]} (a(x) + (x - x_0)a'(x)) < \min_{x \in [0, 1]} (a(x) + \frac{1}{2}(x - x_0)a'(x)) \right\}.$$

Le fait que la formulation mixte est bien posée est une conséquence des propriétés suivantes :

- ▶ la forme bilinéaire \mathfrak{a} est continue sur $\Phi \times \Phi$, symétrique et positive
- ▶ la forme bilinéaire \mathfrak{b} est continue sur $\Phi \times L^2(Q_T)$
- ▶ la forme linéaire ℓ est continue sur Φ
- ▶ \mathfrak{a} est coercive sur $\mathcal{N}(\mathfrak{b})$, où par $\mathcal{N}(\mathfrak{b})$ on dénote le noyau de \mathfrak{b} :

$$\mathcal{N}(\mathfrak{b}) = \{\phi \in \Phi \text{ telle que } \mathfrak{b}(\phi, \lambda) = 0 \text{ pour tout } \lambda \in L^2(Q_T)\}.$$

- ▶ \mathfrak{b} satisfait l'inégalité *inf-sup* habituelle sur $\Phi \times L^2(Q_T)$: il existe $\delta > 0$ telle que

$$\inf_{\lambda \in L^2(Q_T)} \sup_{\phi \in \Phi} \frac{\mathfrak{b}(\phi, \lambda)}{\|\phi\|_{\Phi} \|\lambda\|_{L^2(Q_T)}} \geq \delta.$$

Discrétisation de la formulation mixte

Soit Φ_h et M_h deux espaces de dimension finie :

$$\Phi_h \subset \Phi, \quad M_h \subset L^2(Q_T).$$

On considère les problèmes suivants : trouver $(\phi_h, \lambda_h) \in \Phi_h \times M_h$ solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_r(\phi_h, \bar{\phi}_h) + \mathfrak{b}(\bar{\phi}_h, \lambda) = \ell(\bar{\phi}_h), & \forall \bar{\phi}_h \in \Phi_h \\ \mathfrak{b}(\phi_h, \bar{\lambda}_h) = 0, & \forall \bar{\lambda}_h \in M_h. \end{cases}$$

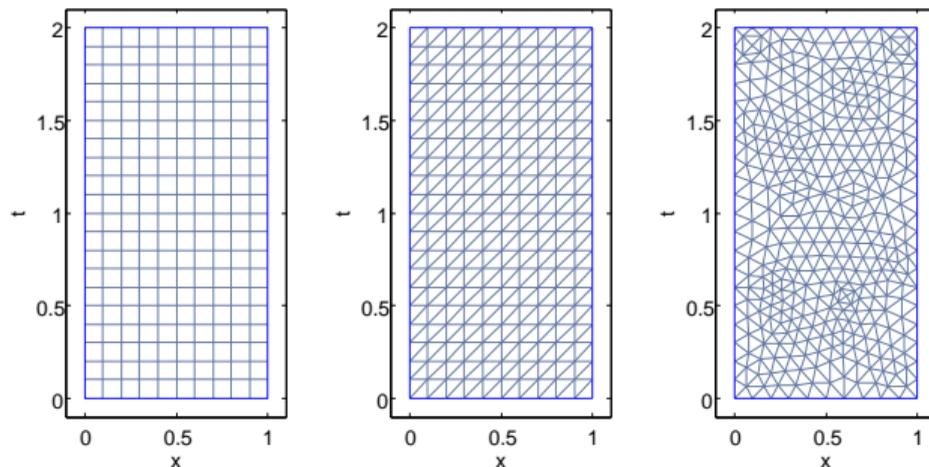
Discrétisation de la formulation mixte

Soit Φ_h et M_h deux espaces de dimension finie :

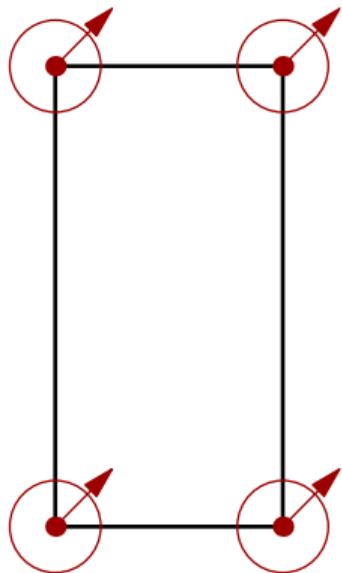
$$\Phi_h \subset \Phi, \quad M_h \subset L^2(Q_T).$$

On considère les problèmes suivants : trouver $(\phi_h, \lambda_h) \in \Phi_h \times M_h$ solution de

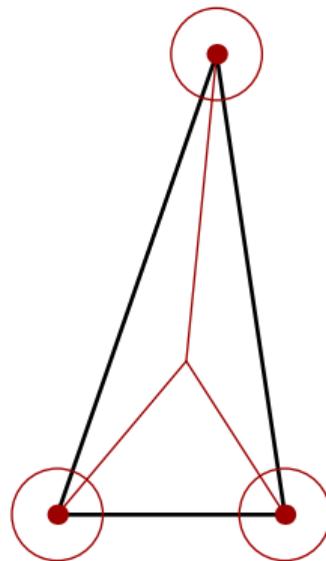
$$\begin{cases} \mathfrak{a}_r(\phi_h, \bar{\phi}_h) + \mathfrak{b}(\bar{\phi}_h, \lambda) = \ell(\bar{\phi}_h), & \forall \bar{\phi}_h \in \Phi_h \\ \mathfrak{b}(\phi_h, \bar{\lambda}_h) = 0, & \forall \bar{\lambda}_h \in M_h. \end{cases}$$



Bogner-Fox-Schmit (BFS)

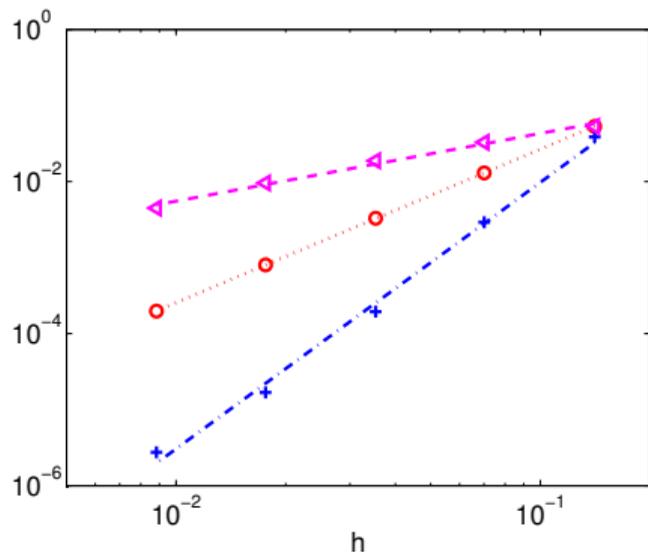


Hsieh-Clough-Tocher (HCT) réduit

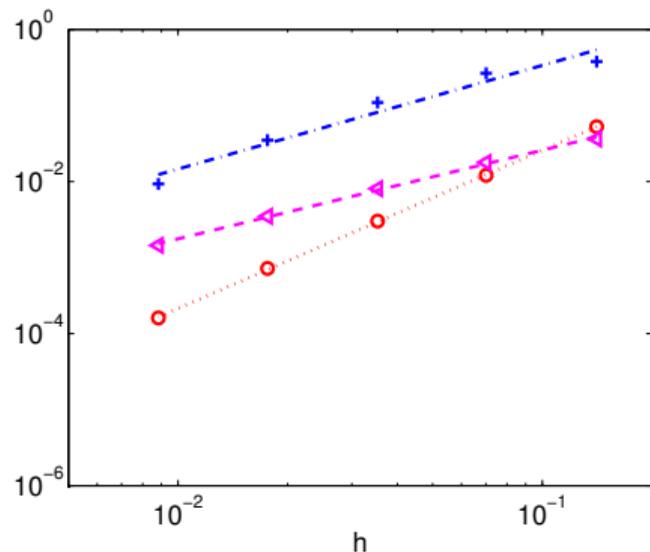


Exemple

$$y_0(x) = \sin(3\pi x), \quad y_1(x) = 0$$



(a)

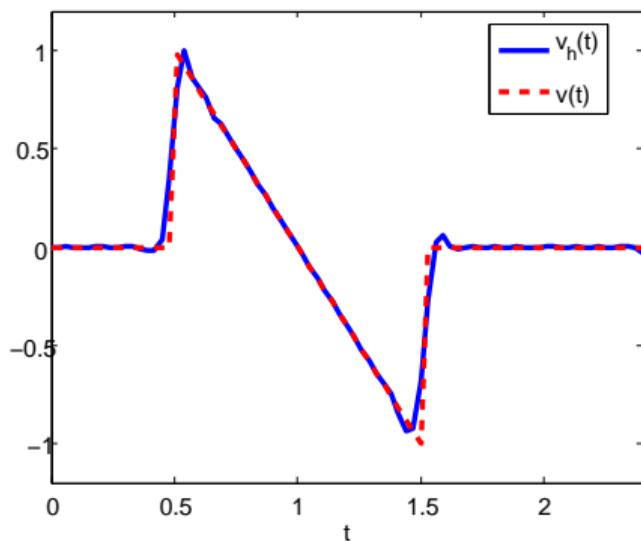


(b)

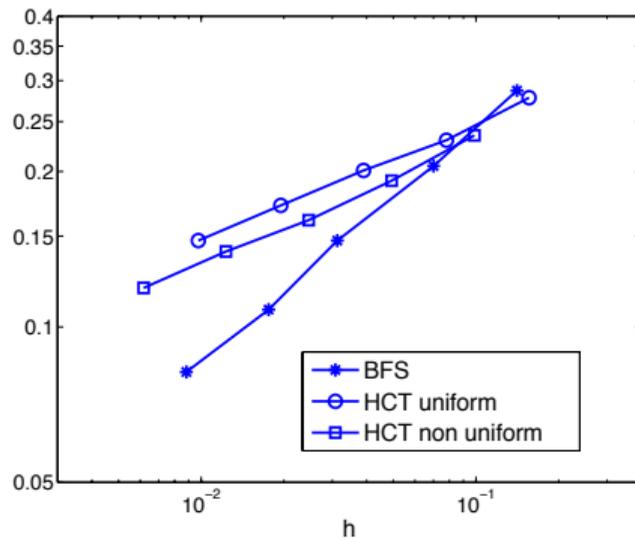
Figure – Évolution de la norme $\|v - v_h\|_{L^2(0,T)}$ par rapport à h . (a) Éléments finis BFS. (b) Éléments finis HCT sur un maillage uniforme. $r = 1$ (+), $r = 10^{-2}$ (o), $r = h^2$ (◁).

Exemple

$$(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$$



(a)



(b)

Figure – (a) Contrôle de norme L^2 minimale v et contrôle approché v_h . (b) Évolution de la norme $\|v - v_h\|_{L^2(0,T)}$ par rapport à h .

Exemple

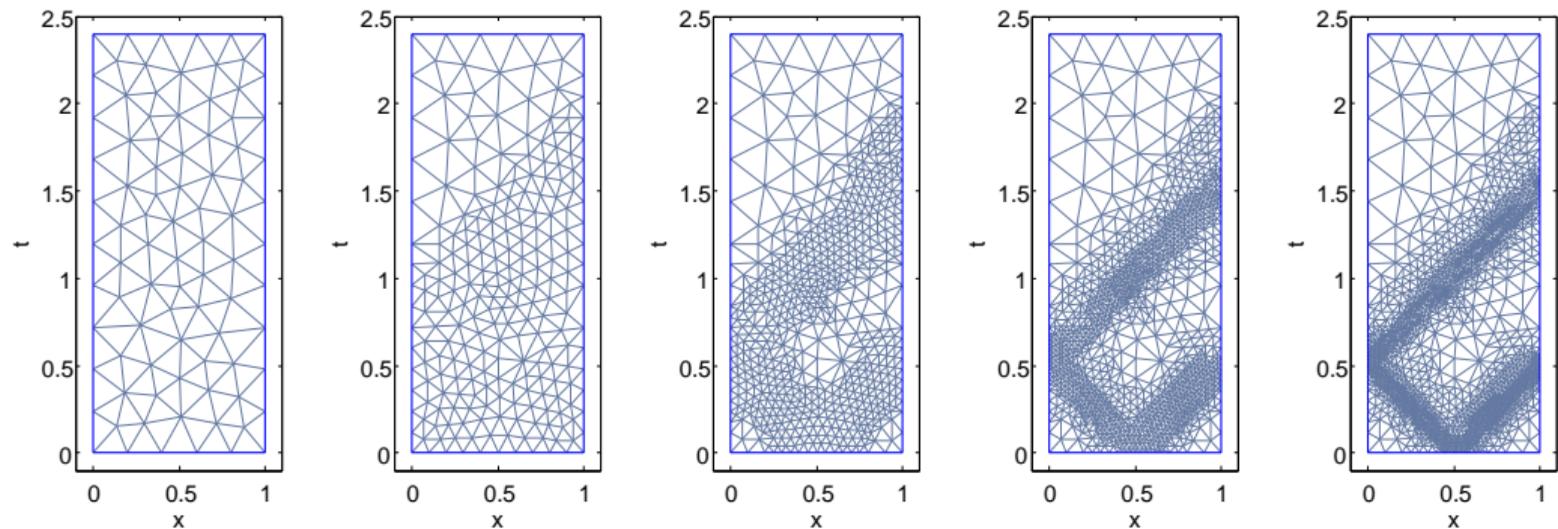


Figure – Cinq raffinements successifs du maillage adaptés pour le calcul du contrôle associé à la donnée initiale $(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$.

Exemple

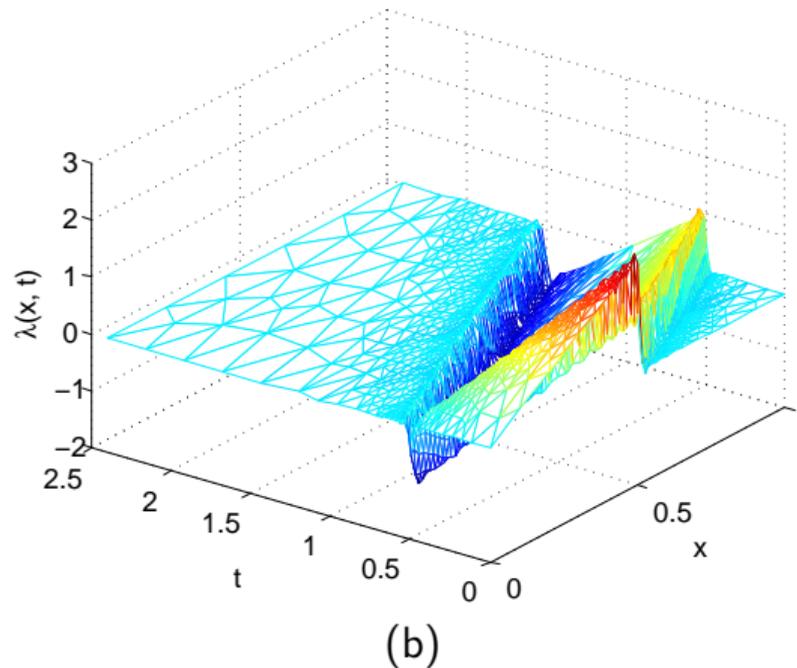
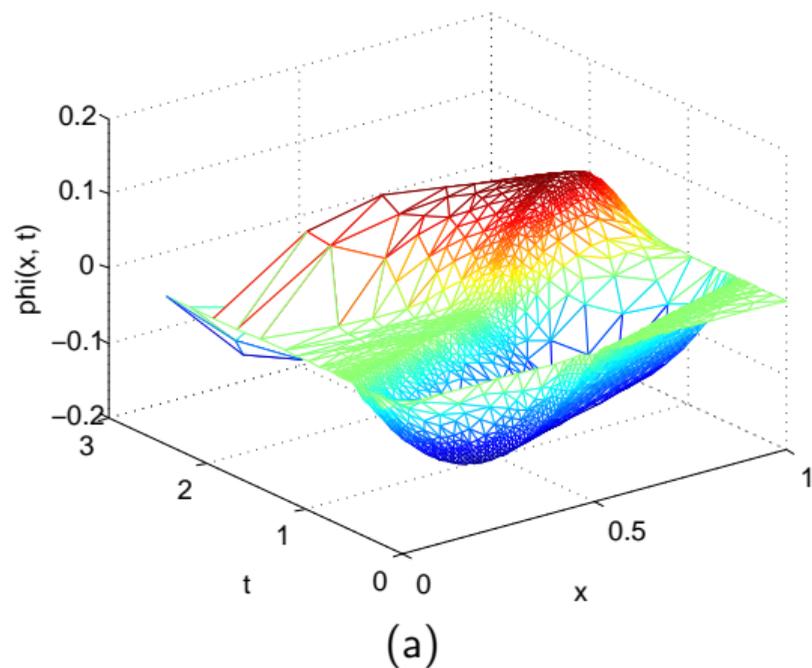
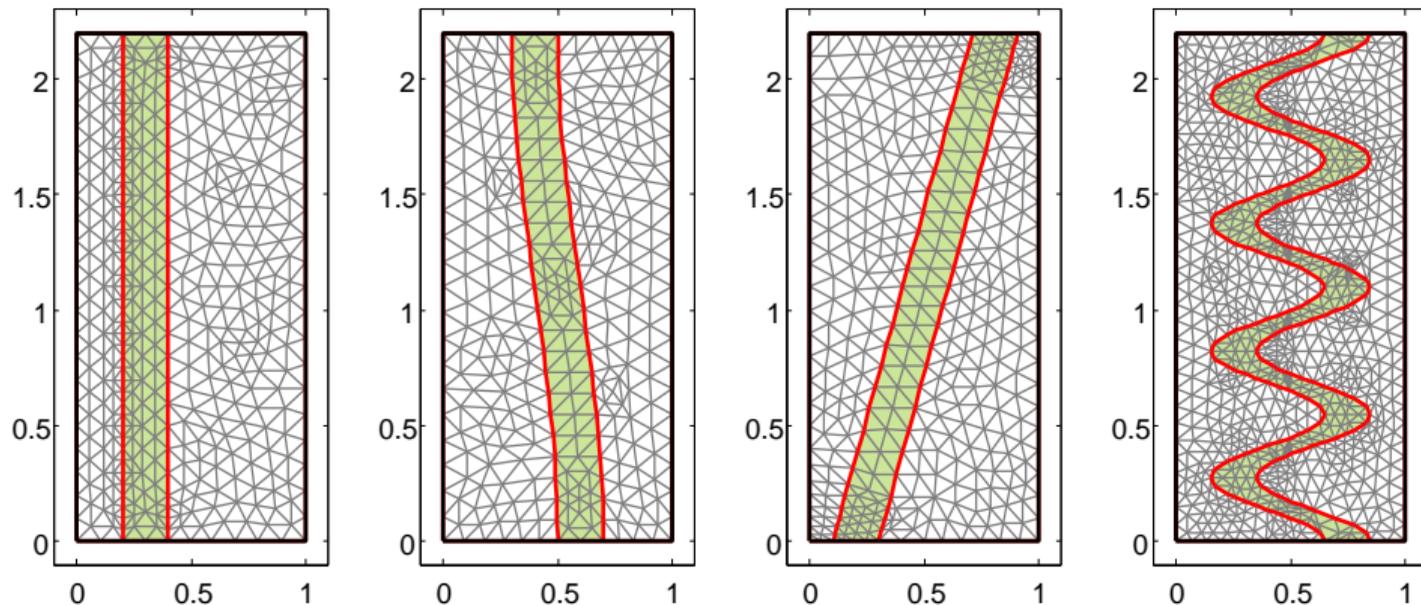


Figure – Donnée initiale $(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$ – (a) la variable duale ϕ_h et (b) la variable *primale* λ_h .

L'équation des ondes avec contrôle distribué

La même démarche est possible pour des contrôles distribués.

- ▶ en particulier, l'écriture variationnelle espace-temps est très bien adaptée pour les contrôles à support variable en temps.



Une équation de poutre

Considérons l'équation modélisant les vibrations d'une poutre élastique encastrée à sa extrémité gauche et contrôlée à droite :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, 1). \end{array} \right. \quad (\mathbf{B})$$

Une équation de poutre

Considérons l'équation modélisant les vibrations d'une poutre élastique encastrée à sa extrémité gauche et contrôlée à droite :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, 1). \end{array} \right. \quad (\text{B})$$

Le **problème de contrôle** : étant donné $T > 0$, pour chaque donnée initiale $(u_0, u_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-2}(0, 1)$ on se demande s'il existe un contrôle $v \in L^2(0, T)$ tel que :

$$u(\cdot, T) = u_t(\cdot, T) = 0 \text{ dans } (0, 1).$$

Une équation de poutre

Inégalité d'observabilité

La contrôlabilité de (B) est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|(y_0, y_1)\|_{H_0^2(0,1) \times L^2(0,1)}^2 \leq K \int_0^T |y_{xx}(1, t)|^2 dt,$$

pour tout $(y_0, y_1) \in H_0^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$, où y est la solution de l'équation adjointe :

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) + y_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y_x(0, t) = y_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Une équation de poutre

Inégalité d'observabilité

La contrôlabilité de (B) est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|(y_0, y_1)\|_{H_0^2(0,1) \times L^2(0,1)}^2 \leq K \int_0^T |y_{xx}(1, t)|^2 dt,$$

pour tout $(y_0, y_1) \in H_0^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$, où y est la solution de l'équation adjointe :

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) + y_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y_x(0, t) = y_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

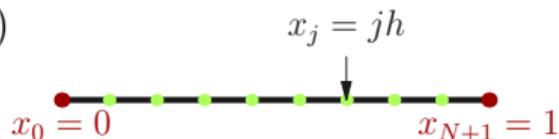
Question : la constante d'observabilité K est-elle uniforme quand on discrétise en espace ?

Une équation de poutre

Discrétisation par différence finies

N points de discrétisation dans $(0, 1)$

$$h = \frac{1}{N + 1}$$

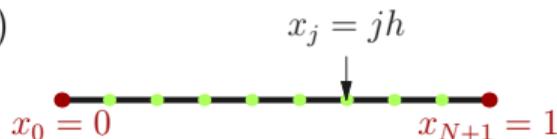


Une équation de poutre

Discrétisation par différence finies

N points de discrétisation dans $(0, 1)$

$$h = \frac{1}{N+1}$$



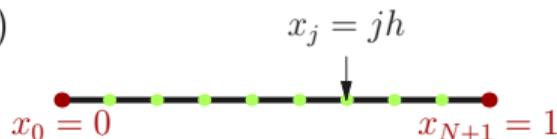
$$y_{xxxx}(x_j, t) \approx \frac{y(x_{j-2}, t) - 4y(x_{j-1}, t) + 6y(x_j, t) - 4y(x_{j+1}, t) + y(x_{j+2}, t)}{h^4}$$

Une équation de poutre

Discrétisation par différence finies

N points de discrétisation dans $(0, 1)$

$$h = \frac{1}{N+1}$$



$$y_{xxxx}(x_j, t) \approx \frac{y(x_{j-2}, t) - 4y(x_{j-1}, t) + 6y(x_j, t) - 4y(x_{j+1}, t) + y(x_{j+2}, t)}{h^4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Une inégalité d'observabilité uniforme ?

- ▶ le problème adjoint discret :

$$\begin{cases} \ddot{Y}_h(t) + A_h Y_h(t) = 0, & t \in (0, T) \\ Y_h(0) = Y_h^0, \quad Y_{h,t}(0) = Y_h^1, \end{cases} \quad \text{où } A_h = \frac{1}{h^4} A \quad (B_h)$$

Une inégalité d'observabilité uniforme ?

- ▶ le problème adjoint discret :

$$\begin{cases} \ddot{Y}_h(t) + A_h Y_h(t) = 0, & t \in (0, T) \\ Y_h(0) = Y_h^0, \quad Y_{h,t}(0) = Y_h^1, \end{cases} \quad \text{où } A_h = \frac{1}{h^4} A \quad (B_h)$$

- ▶ inégalité d'observabilité discrète : il existe K_h telle que pour tout $(Y_h^0, Y_h^1) \in \mathbb{C}^{2N}$

$$\|Y_h^0\|_2^2 + \|Y_h^1\|_0^2 \leq K_h \int_0^T \left| \frac{Y_{hN}(t)}{h^2} \right|^2 dt,$$

Une inégalité d'observabilité uniforme ?

- ▶ le problème adjoint discret :

$$\begin{cases} \ddot{Y}_h(t) + A_h Y_h(t) = 0, & t \in (0, T) \\ Y_h(0) = Y_h^0, \quad Y_{h,t}(0) = Y_h^1, \end{cases} \quad \text{où } A_h = \frac{1}{h^4} A \quad (B_h)$$

- ▶ inégalité d'observabilité discrète : il existe K_h telle que pour tout $(Y_h^0, Y_h^1) \in \mathbb{C}^{2N}$

$$\|Y_h^0\|_2^2 + \|Y_h^1\|_0^2 \leq K_h \int_0^T \left| \frac{Y_{hN}(t)}{h^2} \right|^2 dt,$$

- ▶ **question** : la constante K_h est elle uniforme par rapport à h ?

Théorème (N.C., S. Micu, I. Rovența (2017))

Soit $T > 0$ et $\gamma \in (0, 1)$. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$ l'inégalité d'observabilité discrète est vérifiée, avec K une constante positive ne dépendant pas de h , pour toute solution de l'équation adjointe avec données initiales dans l'espace $\mathcal{C}_h(\gamma)$ donné par

$$\mathcal{C}_h(\gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n \Phi^n, \quad (a_n)_{1 \leq |n| \leq \gamma N} \subset \mathbb{C} \right\}.$$

De plus,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|Y_h^0\|_2^2 + \|Y_h^1\|_0^2}{\int_0^T \left| \frac{Y_{hN}(t)}{h^2} \right|^2 dt} \mid \begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N} \text{ et } \begin{pmatrix} Y_h \\ Y_{h,t} \end{pmatrix} \text{ solution de } (B_h) \right\} = \infty.$$

Idée de la preuve

Si la donnée initiale $\begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_h(\gamma)$ est donnée par $\begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n \Phi^n$, alors la solution correspondante de (B_h) est donnée par

$$\begin{pmatrix} Y_h(t) \\ Y_{h,t}(t) \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n e^{-i \operatorname{sgn}(n) \frac{\sqrt{\lambda|n|}}{h^2} t} \Phi^n.$$

- ▶ localisation précise des valeurs propres de A :
 - ▶ théorème de Rouché pour les *hautes* valeurs propres ;
 - ▶ analyse numérique pour les *basses* valeurs propres ;
- ▶ forme et propriétés des vecteurs propres de A :
 - ▶ analyse asymptotique pour l'observabilité des vecteurs propres ;
- ▶ inégalité d'Ingham.

Contrôle

Problèmes inverses

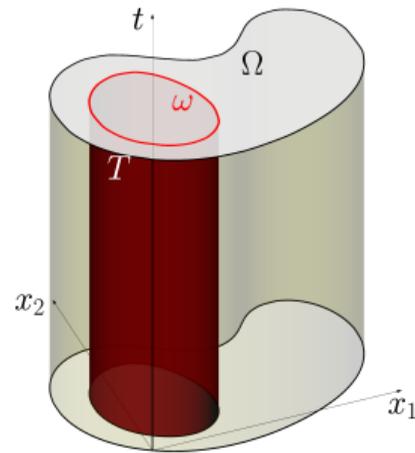
Problèmes inverses pour l'équation des ondes
Assimilation des données et observateurs

Autres travaux

Un problème inverse pour l'équation des ondes

On considère l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} y_{tt} - \nabla \cdot (a(x)\nabla y) + b(x, t)y = f, & (x, t) \in Q_T \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma_T \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$



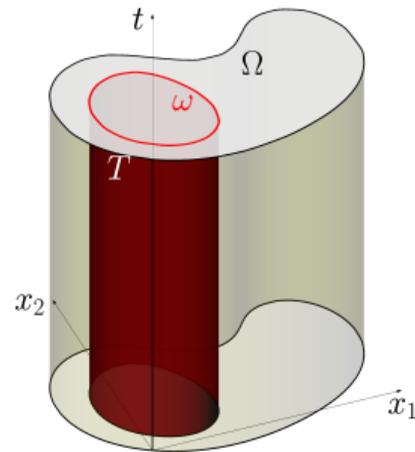
Problème inverse

Retrouver (y_0, y_1) et f à partir des observations $y_{\text{obs}} = y|_{Q_T}$.

Un problème inverse pour l'équation des ondes

On considère l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} y_{tt} - \nabla \cdot (a(x)\nabla y) + b(x, t)y = f, & (x, t) \in Q_T \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma_T \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$



Problème inverse

Retrouver (y_0, y_1) et f à partir des observations $y_{\text{obs}} = y|_{Q_T}$.

Questions : existence, unicité, stabilité, approximation numérique...

Un problème inverse pour l'équation des ondes

Cas plus simple : le terme source f est connu

On note $X = L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$. Soit $P : Z \rightarrow X \times L^2(q_T)$ l'opérateur défini par

$$P\mathbf{y} = (L\mathbf{y}, \mathbf{y}|_{q_T}),$$

où Z est l'espace suivant :

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} y \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{-1}(\Omega)) \text{ telle que} \\ Ly \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), y|_{\Sigma_T} = 0 \end{array} \right\}.$$

Le problème inverse peut être reformulé comme suit :

trouver $\mathbf{y} \in Z$ solution de $P\mathbf{y} = (f, \mathbf{y}_{\text{obs}})$.

Un problème inverse pour l'équation des ondes

Cas plus simple : le terme source f est connu

On note $X = L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$. Soit $P : Z \rightarrow X \times L^2(q_T)$ l'opérateur défini par

$$P\mathbf{y} = (L\mathbf{y}, \mathbf{y}|_{q_T}),$$

où Z est l'espace suivant :

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} y \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{-1}(\Omega)) \text{ telle que} \\ Ly \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), y|_{\Sigma_T} = 0 \end{array} \right\}.$$

Le problème inverse peut être reformulé comme suit :

$$\text{trouver } \mathbf{y} \in Z \text{ solution de } P\mathbf{y} = (f, \mathbf{y}_{\text{obs}}).$$

Ou encore, on peut considérer le problème relaxé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } J(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\text{obs}}\|_{L^2(q_T)}^2 \text{ sur } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ \text{où } \mathbf{y} \text{ est solution de l'équation des ondes.} \end{array} \right.$$

Quelques hypothèses

- ▶ En tenant compte que l'équation considérée est linéaire, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $f \equiv 0$ dans Q_T .

Quelques hypothèses

- ▶ En tenant compte que l'équation considérée est linéaire, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $f \equiv 0$ dans Q_T .
- ▶ On suppose satisfaite l'inégalité d'observabilité généralisée suivante :

il existe une constante $C_{\text{obs}} = C(\omega, T, \|a\|_{C^1(Q_T)}, \|b\|_{L^\infty(Q_T)})$ telle que :

$$\|y(\cdot, 0), y_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C_{\text{obs}} \left(\|y\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|Ly\|_X^2 \right) \quad \forall y \in Z.$$

Cette estimation est satisfaite si le triplet (ω, T, Ω) vérifie la condition d'optique géométrique, en particulier si le temps T est suffisamment grand.

- ▶ la forme bilinéaire

$$\langle y, \bar{y} \rangle_Z = \iint_{q_T} y(t) \bar{y}(t) dx dt + \eta \int_0^T \langle Ly(t), L\bar{y}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)} dt \quad \forall y, \bar{y} \in Z.$$

est un produit scalaire sur Z et Z est un espace de Hilbert avec ce produit.

Une autre écriture du problème de minimisation

Nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser } J(y) = \frac{1}{2} \|y - y_{\text{obs}}\|_{L^2(q_T)}^2, \\ \text{sujet à la contrainte } y \in W, \end{cases} \quad (\text{PI-MIN})$$

où W est le sous-espace fermé de Z défini par

$$W = \{y \in Z; Ly = 0 \text{ dans } X\}$$

et muni de la norme de Z . Ce problème est bien posé :

- ▶ J est continue sur W ;
- ▶ J est strictement convexe ;
- ▶ $J(y) \rightarrow +\infty$ quand $\|y\|_W \rightarrow +\infty$.

Idée : on traite la contrainte $y \in W$ apparaissant dans (PI-MIN) à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange.

Plus précisément, nous considérons la formulation mixte suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{a}(y, \bar{y}) + \mathfrak{b}(\bar{y}, \lambda) = \ell(\bar{y}), & \forall \bar{y} \in Z \\ \mathfrak{b}(y, \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (\text{PI-FM})$$

où

$$\mathfrak{a} : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}(y, \bar{y}) = \iint_{q_T} y \bar{y} \, dxdt,$$

$$\mathfrak{b} : Z \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}(\bar{y}, \lambda) = \int_0^T \langle \lambda(t), L\bar{y}(t) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} dt,$$

$$\ell : Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(\bar{y}) = \iint_{q_T} y_{\text{obs}} \bar{y} \, dxdt.$$

Théorème (N.C., A. Münch (2015))

Les affirmations suivantes sont vérifiées :

1. La formulation mixte (PI-FM) est bien posée.
2. L'unique solution $(y, \lambda) \in Z \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de (PI-FM) est l'unique point selle du Lagrangien $\mathcal{L} : Z \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}(y, y) + \mathfrak{b}(y, \lambda) - \ell(y).$$

3. On a l'estimation suivante :

$$\|y\|_Z = \|y\|_{L^2(q_T)} \leq \|y_{obs}\|_{L^2(q_T)}, \quad \|\lambda\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq 2\sqrt{C_{\Omega, T} + \eta} \|y_{obs}\|_{L^2(q_T)}.$$

Quelques remarques

- ▶ La formulation mixte (**PI-FM**) est très similaire à la formulation mixte permettant de calculer le contrôle de norme L^2 minimale pour l'équation des ondes :
 - ▶ mêmes difficultés pour la mise en oeuvre numérique : éléments finis de classe C^1 .
 - ▶ uniformité de la constante *inf-sup* discrète ?
 - ▶ stabilisation de la formulation mixte
 - ▶ augmentation du Lagrangien. . .

Quelques remarques

- ▶ La formulation mixte (PI-FM) est très similaire à la formulation mixte permettant de calculer le contrôle de norme L^2 minimale pour l'équation des ondes :
 - ▶ mêmes difficultés pour la mise en oeuvre numérique : éléments finis de classe C^1 .
 - ▶ uniformité de la constante *inf-sup* discrète ?
 - ▶ stabilisation de la formulation mixte
 - ▶ augmentation du Lagrangien. . .
- ▶ la même procédure peut être mise en place pour le problème inverse correspondant à des observations frontières :

$$y_{\text{obs}} = \partial_\nu y|_{\Sigma_1}.$$

- ▶ comme pour le cas du contrôle, les espaces changent. . .

Quelques remarques

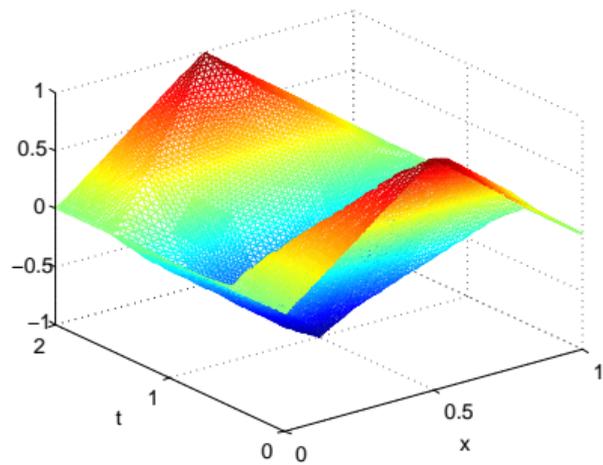
- ▶ La formulation mixte (**PI-FM**) est très similaire à la formulation mixte permettant de calculer le contrôle de norme L^2 minimale pour l'équation des ondes :
 - ▶ mêmes difficultés pour la mise en oeuvre numérique : éléments finis de classe C^1 .
 - ▶ uniformité de la constante *inf-sup* discrète ?
 - ▶ stabilisation de la formulation mixte
 - ▶ augmentation du Lagrangien. . .
- ▶ la même procédure peut être mise en place pour le problème inverse correspondant à des observations frontières :

$$y_{\text{obs}} = \partial_\nu y|_{\Sigma_1}.$$

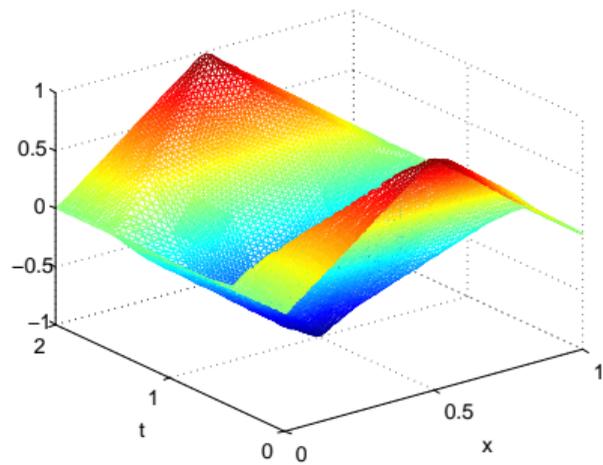
- ▶ comme pour le cas du contrôle, les espaces changent. . .
- ▶ une étude similaire a été fait si le terme source est inconnu ou pour des domaines d'observation non-cylindriques.

Simulations numériques

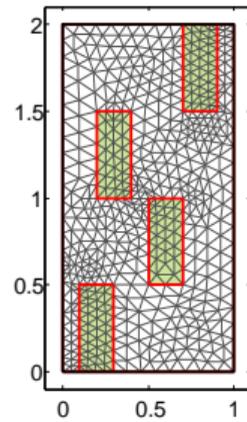
Exemple en dimension 1



(a)



(b)



(c)

Figure – (a) Solution de référence (y). (b) Solution reconstruite (y_h). (c) Domaine q_T .

Simulations numériques

Exemple en dimension 2

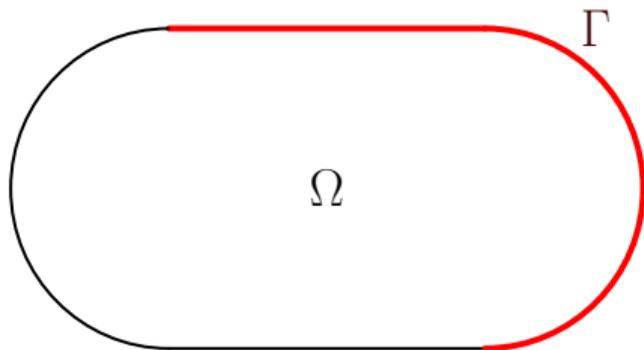


Figure – Stade de Bunimovich et partie Γ de la frontière $\partial\Omega$ où les observations sont disponibles (gauche). Exemple de maillage du domaine Q_T (droite).

Identifiant du maillage	1	2	3
Nombre d'éléments	1 860	18 060	158 280
Nombre de noeuds	1 216	10 261	84 241
Δx	1.82×10^{-1}	8.2×10^{-2}	3.95×10^{-2}
Δt (Hauteur des éléments)	0.2	0.1	0.05
h	2.7×10^{-1}	1.29×10^{-1}	6.37×10^{-2}

Table – Trois maillages de Q_T .

$$\begin{cases} -\Delta y_0 = 10, & \text{dans } \Omega \\ y_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad y_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Simulations numériques

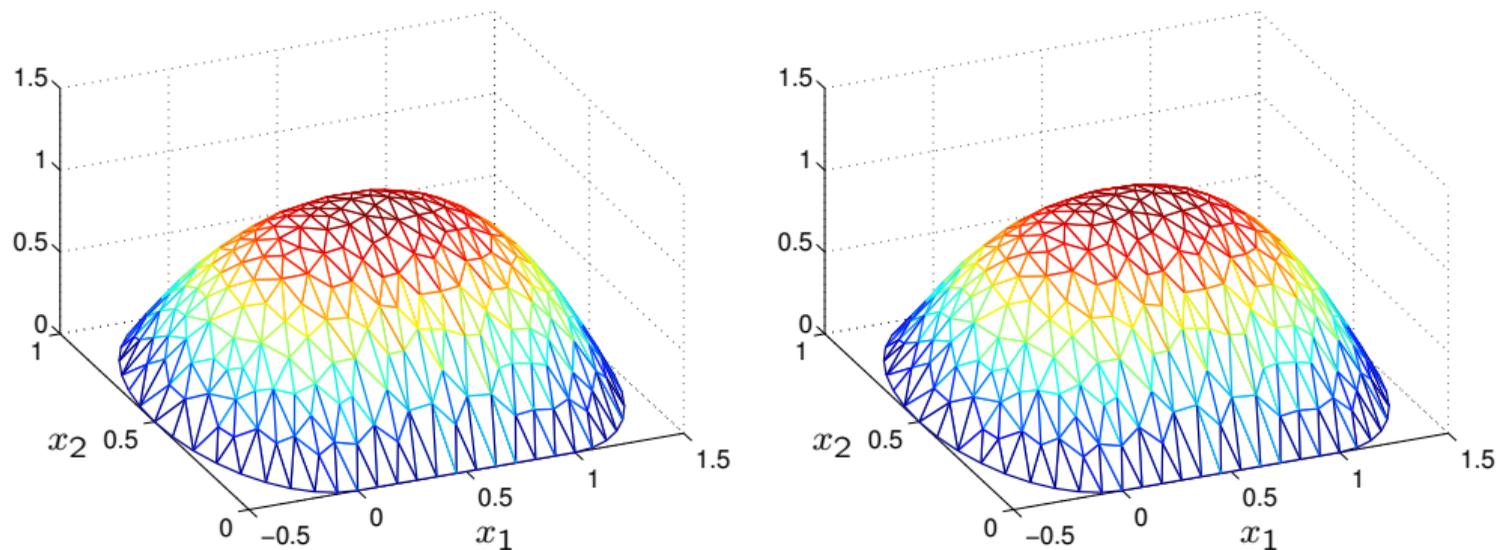


Figure – Donnée initiale y_0 (gauche). Donnée reconstruite $y_h(\cdot, 0)$ (droite).

Simulations numériques

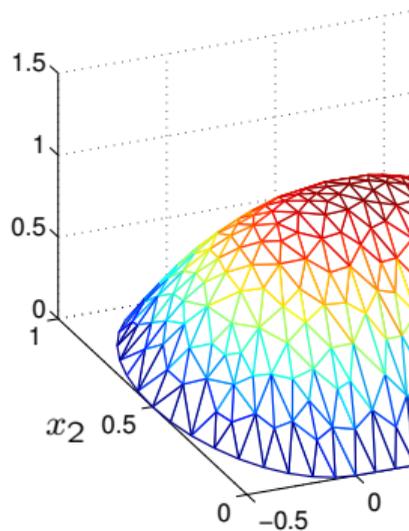
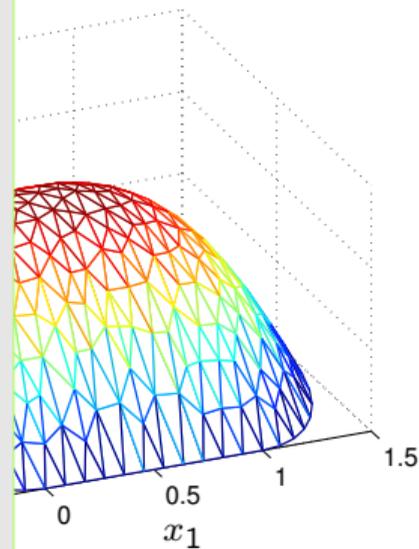
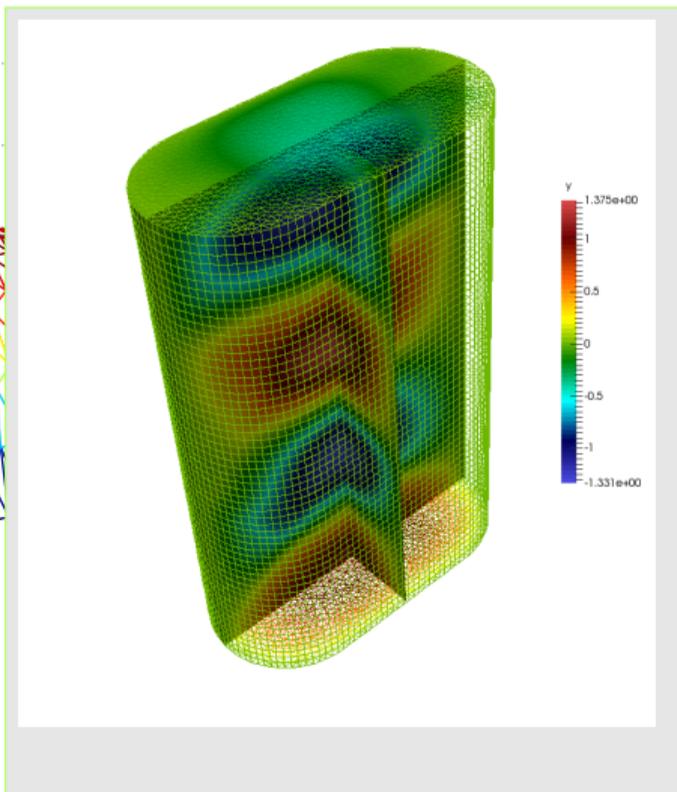


Figure – Donnée



$y_h(\cdot, 0)$ (droite).

Observateurs pour des systèmes abstraits

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} w_{tt}(t) + A_0 w(t) = 0, & t > 0, \\ w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1 \end{cases} \quad (\text{S})$$

où

- ▶ \mathcal{H} un espace de Hilbert
- ▶ $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à résolvantes compactes.

Soit \mathcal{Z} un autre espace de Hilbert, et soit $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0), \mathcal{Z})$. On considère l'observation suivante :

$$z(t) = H_0 w(t). \quad (\text{OBS})$$

Observateurs pour des systèmes abstraits

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} w_{tt}(t) + A_0 w(t) = 0, & t > 0, \\ w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1 \end{cases} \quad (\text{S})$$

où

- ▶ \mathcal{H} un espace de Hilbert
- ▶ $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à résolvantes compactes.

Soit \mathcal{Z} un autre espace de Hilbert, et soit $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0), \mathcal{Z})$. On considère l'observation suivante :

$$z(t) = H_0 w(t). \quad (\text{OBS})$$

Objectif : retrouver l'état du système (S) à partir de l'observation (OBS).

Système d'ordre 1 et observateurs de Luenberger

En posant $x(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ w_t(t) \end{pmatrix}$, on peut écrire (S) comme un système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x_t(t) = Ax(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$, $\mathcal{X} = \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \times \mathcal{H}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $x_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$ et on définit $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ par $H = (H_0 \ 0)$.

Système d'ordre 1 et observateurs de Luenberger

En posant $x(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ w_t(t) \end{pmatrix}$, on peut écrire (S) comme un système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x_t(t) = Ax(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$, $\mathcal{X} = \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \times \mathcal{H}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $x_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$ et on définit $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ par $H = (H_0 \ 0)$.

Pour approcher l'état du système en partant des observations on utilise un **observateur de Luenberger** :

$$\begin{cases} \hat{x}_t(t) = A\hat{x}(t) + \gamma H^*(z(t) - H\hat{x}(t)), & t > 0, \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \end{cases} \quad (\text{L})$$

Si le couple (A, H) est observable alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$: il existe $M > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M e^{-\mu t} \|\hat{x}_0 - x_0\|_{\mathcal{X}}.$$

Si le couple (A, H) est observable alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$: il existe $M > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M e^{-\mu t} \|\hat{x}_0 - x_0\|_{\mathcal{X}}.$$

Quelques questions :

Si le couple (A, H) est observable alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$: il existe $M > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M e^{-\mu t} \|\hat{x}_0 - x_0\|_{\mathcal{X}}.$$

Quelques questions :

- ▶ comment discrétiser l'observateur (L) de manière que le système discret obtenu conserve la convergence exponentielle (avec des taux M et μ indépendants du paramètre de discrétisation) ?

Si le couple (A, H) est observable alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$: il existe $M > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M e^{-\mu t} \|\hat{x}_0 - x_0\|_{\mathcal{X}}.$$

Quelques questions :

- ▶ comment discrétiser l'observateur (L) de manière que le système discret obtenu conserve la convergence exponentielle (avec des taux M et μ indépendants du paramètre de discrétisation) ?
- ▶ quelle stratégie adopter pour la discrétisation en temps si on dispose des observations ponctuelles en temps ?

Si le couple (A, H) est observable alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$: il existe $M > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M e^{-\mu t} \|\hat{x}_0 - x_0\|_{\mathcal{X}}.$$

Quelques questions :

- ▶ comment discrétiser l'observateur (L) de manière que le système discret obtenu conserve la convergence exponentielle (avec des taux M et μ indépendants du paramètre de discrétisation) ?
- ▶ quelle stratégie adopter pour la discrétisation en temps si on dispose des observations ponctuelles en temps ?
 - ▶ interpoler les observations en temps ;

Si le couple (A, H) est observable alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$: il existe $M > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M e^{-\mu t} \|\hat{x}_0 - x_0\|_{\mathcal{X}}.$$

Quelques questions :

- ▶ comment discrétiser l'observateur (L) de manière que le système discret obtenu conserve la convergence exponentielle (avec des taux M et μ indépendants du paramètre de discrétisation) ?
- ▶ quelle stratégie adopter pour la discrétisation en temps si on dispose des observations ponctuelles en temps ?
 - ▶ interpoler les observations en temps ;
 - ▶ prendre en compte dans la définition du gain γ le fait qu'il y a des données manquantes.

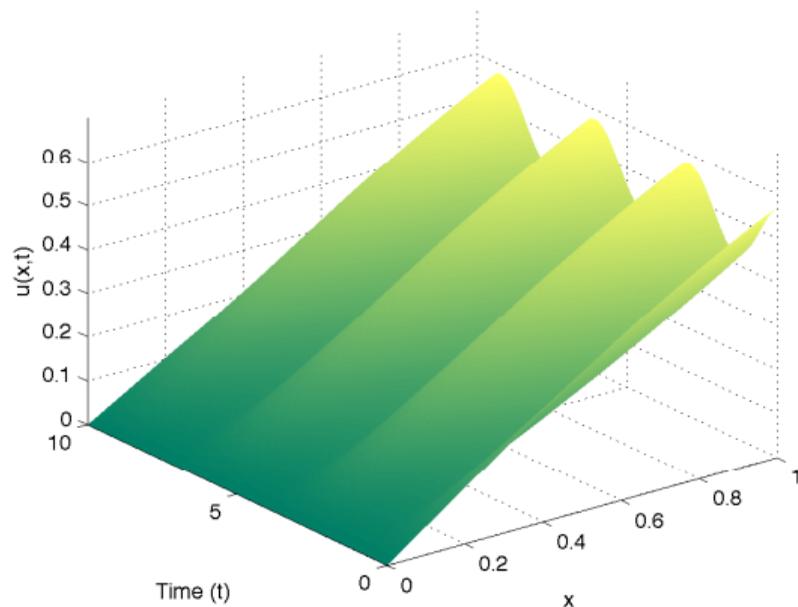
Plan de l'exposé

Contrôle

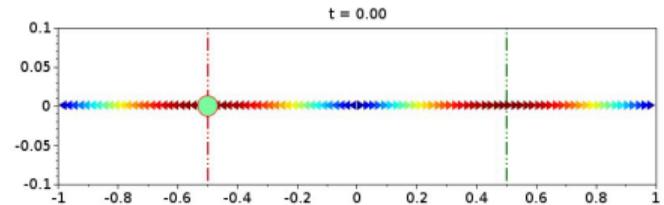
Problèmes inverses

Autres travaux

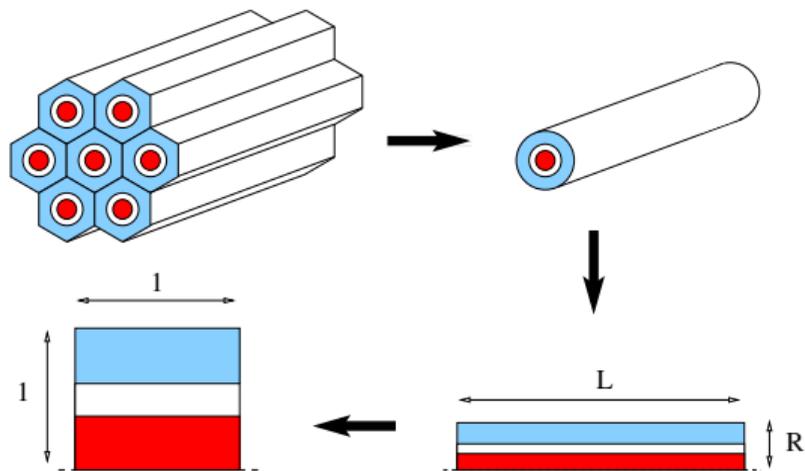
- ▶ Solutions périodiques des systèmes dissipatifs
 - ▶ équation des ondes faiblement dissipée ;
 - ▶ analyse numérique.



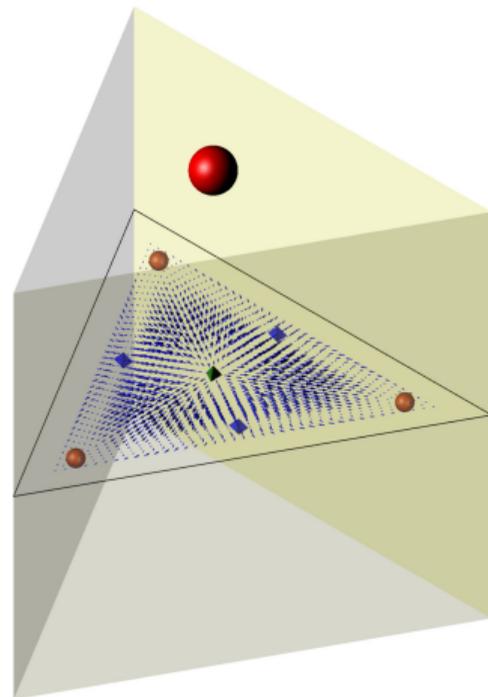
- ▶ Solutions périodiques des systèmes dissipatifs
 - ▶ équation des ondes faiblement dissipée ;
 - ▶ analyse numérique.
- ▶ Contrôlabilité d'un modèle fluide structure
 - ▶ le fluide : équation de Burgers ;
 - ▶ la structure : un point matériel.



- ▶ Solutions périodiques des systèmes dissipatifs
 - ▶ équation des ondes faiblement dissipée ;
 - ▶ analyse numérique.
- ▶ Contrôlabilité d'un modèle fluide structure
 - ▶ le fluide : équation de Burgers ;
 - ▶ la structure : un point matériel.
- ▶ Modélisation et applications
 - ▶ modélisation en dialyse ;



- ▶ Solutions périodiques des systèmes dissipatifs
 - ▶ équation des ondes faiblement dissipée ;
 - ▶ analyse numérique.
- ▶ Contrôlabilité d'un modèle fluide structure
 - ▶ le fluide : équation de Burgers ;
 - ▶ la structure : un point matériel.
- ▶ Modélisation et applications
 - ▶ modélisation en dialyse ;
 - ▶ mise en évidence de l'effet Segré-Silberberg.



▶ **Conclusion**

- ▶ contrôlabilité / problèmes inverses
 - ▶ équations des ondes
 - ▶ équations des poutres
 - ▶ ...
- ▶ analyse numérique
- ▶ modélisation et simulations numériques

▶ Conclusion

- ▶ contrôlabilité / problèmes inverses
 - ▶ équations des ondes
 - ▶ équations des poutres
 - ▶ ...
- ▶ analyse numérique
- ▶ modélisation et simulations numériques

▶ Perspectives

- ▶ travaux en cours
 - ▶ contrôlabilité de l'équation de Mindlin-Timoshenko
 - ▶ optimisation du support du contrôle pour l'équation des ondes
 - ▶ observateurs pour un système fluide / structure
- ▶ travaux à commencer
 - ▶ contrôlabilité (numérique) des fluides non-newtoniens
 - ▶ enrichir le modèle pour la dialyse
 - ▶ contrôle optimal en mécanique des solides déformables.
 - ▶ ...