4 La méthode des éléments finis Une EDP d'ordre 2 et conditions de type Neumann

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0,1[\\ \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0, & \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in C([0,1])$ (ou bien $f \in L^2(0,1)$) et $c \in C([0,1])$ avec $c(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que le problème (1) peut s'écrire sous la forme variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,\varphi) = L(\varphi), \qquad \text{pour tout } \varphi \in V. \tag{2}$$

   a) Donner explicitement a, L et V.
   Indication : $V = H^1(0,1)\ldots$
   b) Justifier l'existence et l'unicité des solutions de (2).

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \dfrac{1}{N+1}$ et $x_i = ih$ pour $0 = 1, 2, \ldots, N+1$. On considère la famille de fonctions $\varphi_i \in H^1(0,1)$ ($i \in \{0, 1, \ldots, N+1\}$) définie par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i[\\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a) Soit $c(x) \equiv 1$. Calculer $a(\varphi_i, \varphi_j)$ pour tout $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, N+1\}$. Pour $f(x) = (\pi^2 + 1)\cos(\pi x)$, calculer $f_i = L(\varphi_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, N+1\}$.
   b) Pour tout $h > 0$ nous allons approcher le problème (2) par

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, \varphi_h) = L(\varphi_h), \qquad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h, \tag{3}$$

   où $V_h = \mathrm{span}\,(\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N+1}\})$.
   Montrer que ce problème s'écrit sous la forme matricielle $AU = B$ avec
   $A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{0 \le i,\ j \le N+1}$ et $B = (f_i)_{0 \le i \le N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$.

3. Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function [A] = matriceA(N)`, ayant comme objectif assembler la matrice A obtenue à la question précédente.

4. Résoudre l'équation matricielle $AU = B$ et représenter sur un même graphique la solution exacte $u_{ex}(x) = \cos(\pi x)$ et la solution approchée U. Évaluer l'erreur entre la solution exacte et celle ainsi obtenue dans la norme de $L^2(0,1)$ et dans la norme de $H^1(0,1)$.

5. Pour les deux normes, calculer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour chacune des valeurs suivantes de N : $50, 100, 200, 400, 800$. Afficher l'évolution de l'erreur en fonction de h. Déduire l'ordre de la méthode.

6. Tester le programme pour d'autres choix de c et de f.