3 Une EDP d'ordre 4 – deuxième type de conditions frontières

La position d'un fil inélastique posé à ses extrémités en $x = 0$ et $x = 1$ sur un support situé à la hauteur 0, soumis à une charge transversale $f \in C([0,1])$ et d'une rigidité $c \in C([0,1])$ pour tout $x \in [0,1]$, est donnée par la solution $u(x)$ du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4}(x) + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = \dfrac{d^2u}{dx^2}(0) = \dfrac{d^2u}{dx^2}(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Supposons $\varphi \in C^6([0,1])$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in]0,1[$ il existe un voisinage de V de x tel que pour tout $h \in V$ on a

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4}(x) = \frac{\varphi(x+2h) - 4\varphi(x+h) + 6\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2}$$

2. On considère une sous-division de l'intervalle ouvert $]0,1[$ constitué de N points uniformément distribués notés $(x_i)_{i\in\{1,2\dots,N\}}$, $x_i = ih$ avec $h = 1/(N+1)$. On dénote u_i la valeur approchée de $u(x_i)$ (on peut prendre $i \in \mathbb{Z}$).
Montrer que, en tenant compte des conditions dans $x \in \{0,1\}$ on a $u_0 = u_{N+1} = 0$, $u_{-1} = -u_1$ et $u_N = -u_{N+2}$ (appliquer la formule de Taylor pour $u(h)$, $u(-h)$ et $u(1+h)$, $u(1-h)$ respectivement).
Pour le reste de cette partie on prend $c(x) = 1$ et $f(x) = (\pi^4 + 1)\sin(\pi x)$. Vérifier que pour ce choix de c et de f la solution exacte de (1) est donnée par $u(x) = \sin(\pi x)$.
   (a) Créer un script Scilab en définissant les fonctions c et f et u_{ex} (la solution exacte), puis en se donnant une valeur pour N (100, par exemple). Calculer h et construire la sous-division `x` (formée des points $(x_i)_{i\in\{1,2,\dots,N\}}$) de l'intervalle $]0,1[$. Afficher les graphiques des fonctions qu'on vient de définir.
   (b) En utilisant (2), montrer que (1) peut être approchée par une équation matricielle de la forme : $AU + CU = F$.
   (c) Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function [U] = DFC2(N, c, f)` pour implémenter ce schéma :
   – `N` est le nombre de points du maillage ;
   – `c` est une fonction, définie à l'aide de l'instruction Scilab `deff` ;
   – `f` est une fonction, définie à l'aide de l'instruction Scilab `deff` ;
   – `U` est la solution de l'équation matricielle $AU + CU = F$.
   (d) Compléter le script commencé à la question a) ayant comme but de tester la fonction `DFC2`. Comparer la solution exacte et celle approchée en les affichant dans un même graphique. Calculer la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'erreur.
   (e) Calculer la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour chacune des valeurs suivantes de N : $50, 100, 200, 400, 800$. Afficher graphiquement, en utilisant une échelle logarithmique, l'évolution de l'erreur en fonction de $h = 1/(N+1)$. Déduire l'ordre de la méthode.