

2 Une EDP d'ordre 4 – premier type de conditions frontières

La position d'un fil inélastique (ou une poutre) encastré dans un support à ses extrémités en $x = 0$ et $x = 1$ à la hauteur 0, soumis à une charge transversale $f \in C([0, 1])$ et d'une rigidité $c \in C([0, 1])$ pour tout $x \in [0, 1]$, est donnée par la solution $u(x)$ du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^4 u}{dx^4}(x) + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

- Supposons $\varphi \in C^6([0, 1])$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ il existe un voisinage de V de x tel que pour tout $h \in V$ on a

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4}(x) = \frac{\varphi(x + 2h) - 4\varphi(x + h) + 6\varphi(x) - 4\varphi(x - h) + \varphi(x - 2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2)$$

- On considère une sous-division de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ constitué de N points uniformément distribués notés $(x_i)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$, $x_i = ih$ avec $h = 1/(N + 1)$. On dénote u_i la valeur approchée de $u(x_i)$ (on peut prendre $i \in \mathbb{Z}$).

Montrer que, en tenant compte des conditions dans $x \in \{0, 1\}$ on a $u_0 = u_{N+1} = 0$, $u_{-1} = u_1$ et $u_N = u_{N+2}$.

Pour le reste de cette partie on prend $c(x) = 1$ et $f(x) = 16(24 + x^2(1 - x)^2)$. Vérifier que pour ce choix de c et de f la solution exacte de (1) est donnée par $u(x) = 16x^2(1 - x)^2$.

- Créer un script Scilab en définissant les fonctions c et f et u_{ex} (la solution exacte), puis en se donnant une valeur pour N (100, par exemple). Calculer h et construire la sous-division \times (formée des points $(x_i)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$) de l'intervalle $]0, 1[$. Afficher les graphiques des fonctions qu'on vient de définir.
- En utilisant (2), montrer que (1) peut être approchée par une équation matricielle de la forme : $AU + CU = F$.
- Écrire une fonction Scilab d'entête `function [U] = DFC2(N, c, f)` pour implémenter ce schéma :
 - N est le nombre de points du maillage ;
 - c est une fonction, définie à l'aide de l'instruction Scilab `def f` ;
 - f est une fonction, définie à l'aide de l'instruction Scilab `def f` ;
 - U est la solution de l'équation matricielle $AU + CU = F$.
- Compléter le script commencé à la question a) ayant comme but de tester la fonction `DFC2`. Comparer la solution exacte et celle approchée en les affichant dans un même graphique. Calculer la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'erreur.
- Calculer la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour chacune des valeurs suivantes de N : 50, 100, 200, 400, 800. Afficher graphiquement, en utilisant une échelle logarithmique, l'évolution de l'erreur en fonction de $h = 1/(N + 1)$. Déduire l'ordre de la méthode.