1 Une EDP d'ordre 2 – conditions frontière de type Neumann

Soit $f \in C([0,1])$, $c \in C([0,1])$ et soit u la solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0,1[\\ \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Supposons $\varphi \in C^4([0,1])$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in]0,1[$ il existe un voisinage de V de x tel que pour tout $h \in V$ on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2}$$

2. On considère une sous-division $(x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,N+1\}}$ de l'intervalle $[0,1]$ constituée des $N+2$ points équidistribués. On note $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0,1,2,\ldots,N+1\}$. Pour le reste de cette partie on prend $c(x) = 1$ et $f(x) = (\pi^2+1)\cos(\pi x)$. Vérifier que pour ce choix de c et de f la solution exacte de (1) est donnée par $u(x) = \cos(\pi x)$.

   (a) Commencer un script Scilab en définissant les fonctions c et f et u_{ex} (la solution exacte), puis en se donnant une valeur pour N (100, par exemple). Calculer h et construire la sous-division `x` (formée des points $(x_i)_{i\in\{1,2,\ldots,N\}}$) de l'intervalle $]0,1[$. Afficher les graphiques des fonctions qu'on vient de définir.

   (b) En utilisant le schéma *différences finies centré* (2), montrer que (1) s'écrit

   $$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), \qquad \text{pour } i \in \{0,1,2,\ldots N+1\}.$$

   Utiliser les conditions sur la frontière pour montrer que $u_{-1} \approx u_1$ (formule de Taylor pour $u(h)$ et $u(-h)$) et que $u_N \approx u_{N+2}$.
   Mettre ce schéma sous la forme matricielle : $AU + CU = F$, avec $A,\ C \in \mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R})$ et $U,\ F \in \mathbb{R}^{N+2}$.

   (c) Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function [U] = solve(N, c, f)` pour implémenter ce schéma :
   – `N` est le nombre de points du maillage ;
   – `c` est une fonction, définie à l'aide de l'instruction Scilab `deff` ;
   – `f` est une fonction, définie à l'aide de l'instruction Scilab `deff` ;
   – `U` est la solution de l'équation matricielle $AU + CU = F$.

   (d) Compléter le script pour tester la fonction `solve`. Comparer la solution exacte et celle approchée en les affichant dans un même graphique. Calculer la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'erreur.

   (e) Calculer la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour chacune des valeurs suivantes de N : $50, 100, 200, 400, 800$. Afficher graphiquement, en utilisant une échelle logarithmique, l'évolution de l'erreur en fonction de h. Déduire l'ordre de la méthode.