TP 3 : Une équation aux dérivées partielles en 2D

L'objectif de ce TP est d'approcher la solution d'une équation aux dérivées partielles en dimension 2 (une équation de Poisson avec différentes conditions sur le bord) par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel `FreeFem++`[1].

1 Une équation de Poisson - condition frontière Dirichlet

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y), & \text{pour } (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & \text{pour } (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $c \in C(\overline{\Omega})$ avec $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble ouvert et non-vide de $\mathbb{R}^2$ avec une frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 par morceaux.

1. Écrire le problème (1) sous forme variationnelle et justifier l'existence et l'unicité des solutions.
2. Soit Ω le domaine rectangulaire définit par $\Omega = (0,2) \times (0,1)$, $c(x,y) = 1$ et $f(x,y) = (5\pi^2 + 1)\sin(\pi x)\sin(2\pi y)$. Vérifier que $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$ est la seule solution de (1).
3. Résoudre le problème (1) sous `FreeFem++` :
   a) Définir le bord du domaine Ω. Pour cela on utilise le type `border`. Exemple d'une frontière circulaire :
   ```
   border C(t=0,2*pi){x = cos(t); y = sin(t); label = 1;}
   ```
   Remarque : On peut construire une frontière à partir de plusieurs morceaux, en donnant le même *label* à chaque morceau. On ajoute les commandes successives dans un fichier ayant l'extension `.edp` (qu'on édite avec notre éditeur de texte favoris).

   b) Définir un maillage de Ω. Pour cela on utilise la commande `buildmesh` et le type `mesh`. Exemple de maillage pour le domaine ayant la courbe C comme frontière (le maillage a 50 points de discrétisation sur C) :
   ```
   mesh Th = buildmesh(C(50));
   ```
   Pour afficher ce maillage on utilise la commande `plot` :
   ```
   plot(Th, wait=true);
   ```
   c) Définir les fonctions f et c. Pour définir une fonction on utilise la commande `func`. Exemple :
   ```
   func g = x*y;
   ```
   définit la fonction $g(x,y) = xy$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   d) Définir le problème variationnelle. Pour cela on utilise le mot clé `problem`. Comme exemple on considère la formulation variationnelle du problème suivant :

   $$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = g(x,y), & \text{pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < 1 \\ u(x,y) = 0, & \text{pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 1. \end{cases} \tag{2}$$

   On définit avant l'espace d'élément finis dans lequel on résout le problème (on utilise le mot clé `fespace`. `P1` est le type des éléments finis utilisé.) :
   ```
   fespace Vh(Th, P1);
   Vh u, v;
   problem monPb(u, v) = int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) -
   ```

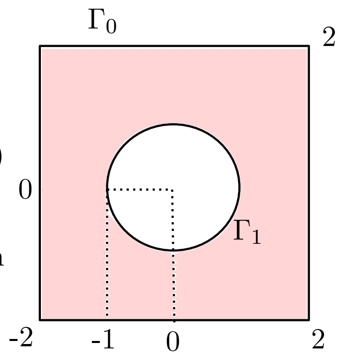
1. `http://www.freefem.org/ff++/`

```
int2d(Th)(g*v) + on(C,u=0);
```
Pour résoudre le problème `monPb` on appèle
```
monPb;
```
à un moment ultérieur.

e) Afficher la solution. Exemple :
```
plot(u, wait=true, fill=true);
```

f) Pour des éléments finis de type P_1 et P_2, déterminer l'ordre de la méthode d'éléments finis (pour les normes $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$). Pour cela, on varie le nombre de points du maillage situés sur chaque coté du domaine (par exemple, on peut prendre $p_k = 10 * 2^k$ $(k = 0, 1, \ldots, 4)$ points sur les cotés verticales de Ω et deux fois de plus sur celle horizontales). Le vecteur contenant le nombre de points de discrétisation est noté `p` :
```
real[int] p(5);
```
On utilise l'instruction `for` pour générer un maillage contenant `p[k]` points de discrétisation sur la frontière, définir et résoudre un problème variationnelle sur ce maillage. Les erreurs entre la solution exacte et les solutions approchées sont enregistrées dans les vecteurs suivants
```
real[int] errP1L2(5), errP1H1(5), errP2L2(5), errP2H1(5);
```
Exemple pour l'instruction `for` :
```
for(int k = 0; k < 10; k++){
      Fait ceci, fait cela; ...
      Afficher l'erreur; ...
}
```

2 Une équation de Poisson - conditions frontière mixtes



On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y), & \text{pour } (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & \text{pour } (x,y) \in \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) = g(x,y), & \text{pour } (x,y) \in \Gamma_1 \end{cases} \tag{3}$$

où $f \in C(\Omega)$, $c \in C(\Omega)$ avec $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine non-vide de $\mathbb{R}^2$ a frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ (voir figure).

1. Écrire le problème (3) sous forme variationnelle.
2. Résoudre le problème (3) sous `FreeFem++` :

a) Définir les deux frontières Γ_0 et Γ_1. Pour que le domaine Ω soit situé entre les courbe Γ_0 et Γ_1 la première doit être définie en sens trigonométrique et la deuxième dans le sens opposé. Par convention le domaine se trouve toujours à la gauche de sa frontière.

b) Créer un maillage de Ω.

c) Définir les fonctions $f(x,y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y)$, $c(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + y^2$. Afficher une de ces fonctions, en jouant sur les différentes options de la commande `plot`.

d) Définir les `problem` associés à la formulation variationnelle de (2) pour des éléments finis P_1 et P_2 et afficher les solutions.

e) Essayer d'autre choix de fonctions f, g, c ainsi que le problème (2) mais cette fois avec une condition Dirichlet non-homogène.