

Le fichier suivant (test.sce) répond à la question 3. a).

```
clear()      // efface la mémoire
clc()        // efface la console
xdel(winsid()) // ferme les figures

N = 9;      // nb de points de discrétisation
h = 1 / (N+1); // pas de discrétisation
x = (h:h:1-h); // points de la discrétisation de l'intervalle ]0, 1[

xfin = linspace(0, 1, 500); // maillage fin de [0, 1]

// fonction de la base des éléments finis P1
deff('y=phi(x,i,h)', 'y=(x - (i-1)*h)/h .* ((x >= (i-1)*h) & (x < i*h))...
                    + ((i+1)*h - x)/h .* ((x >= i*h) & (x < (i+1)*h))');

// on affiche le graphique d'une telle fonction
figure
plot(xfin, phi(xfin, 3, h))

// on construit une combinaison linéaire des fonctions phi_i
B = rand(N, 1);
b = zeros(xfin);
for i = 1:N
    b = b + B(i) * phi(xfin, i, h);
end
// on affiche le graphique de b et les points de B
figure
plot(xfin, b)
plot(x, B, 'ro')
```

4. Nous rappelons les matrices  $M, K \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  calculées pour la question 3. b) :

$$K = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. En faisant les calculs les nombres  $f_i = \int_0^1 f(x)\varphi(x)$  sont donnés par :

$$f_i = \frac{4\pi^2 + 1}{4\pi^2} \cdot \frac{-\sin(2\pi x_{i-1}) + 2\sin(2\pi x_i) - \sin(2\pi x_{i+1})}{h}.$$

Nous rappelons que la solution exacte de (1) est donnée par

$$u_{\text{ex}}(x) = \sin(2\pi x).$$

Pour pouvoir évaluer les normes de l'erreur  $u_{\text{ex}} - u_{\text{app}}$ , nous allons projeter  $u_{\text{ex}}$  dans  $V_h$  et calculer  $\|\Pi_{V_h} u_{\text{ex}} - u_{\text{app}}\|_{L^2(0,1)}$  et  $\|\Pi_{V_h} u_{\text{ex}} - u_{\text{app}}\|_{H_0^1(0,1)}$ , où par  $\Pi_{V_h}$  nous avons noté l'opérateur de projection de  $V$  sur  $V_h$ . Plus précisément, nous posons

$$\Pi_{V_h} v = \sum_{i=1}^N v(x_i)\varphi_i, \quad \forall v \in V.$$

Alors

$$\|\Pi_{V_h} u_{\text{ex}} - u_{\text{app}}\|_{L^2(0,1)} = \left( \sum_{i,j=1}^N m_{ij} (u_{\text{ex}}(x_i) - u_{\text{app}}^i) (u_{\text{ex}}(x_j) - u_{\text{app}}^j) \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\|\Pi_{V_h} u_{\text{ex}} - u_{\text{app}}\|_{H_0^1(0,1)} = \left( \sum_{i,j=1}^N k_{ij} (u_{\text{ex}}(x_i) - u_{\text{app}}^i) (u_{\text{ex}}(x_j) - u_{\text{app}}^j) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Possibles développements pour les comptes rendus :**

- Détailler les preuves des questions 1. et 2.
- Détailler les calculs des coefficients  $k_{ij}$ ,  $m_{ij}$  et  $f_i$  de la question 3. c)
- Commenter les programmes **Scilab** écrits pendant le TP et expliquer les résultats obtenus. Vous pouvez inclure dans le document à rendre des figures illustrant les résultats.
- Donner et commenter les résultats obtenus pour d'autres choix de fonctions  $f$  et  $c$ .