TP 2 : La méthode des éléments finis

Le but de ce TP est de présenter l'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis, en se considérant un exemple de problème aux limites uni-dimensionnelle.
On utilise `Scilab` pour l'implémentation numérique.

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in C([0,1])$ (ou bien $f \in L^2(0,1)$) et $c \in C([0,1])$ avec $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que le problème (1) peut s'écrire sous la forme variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,\varphi) = L(\varphi), \qquad \text{pour tout } \varphi \in V. \tag{2}$$

   a) Donner explicitement a, L et V.
   b) Justifier l'existence et l'unicité des solutions de (2).

2. Pour tout $h > 0$ on considère V_h un sous-espace vectoriel de V de dimension finie

$$\dim V_h = N_h$$

   qui vérifie $\lim_{h\to 0} N_h = +\infty$.
   On va introduire un problème similaire au problème (2), mais cette fois formulé dans l'espace V_h :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h,\varphi) = L(\varphi), \qquad \text{pour tout } \varphi \in V_h. \tag{3}$$

   a) Justifier l'existence et l'unicité de la solution u_h de (3).
   Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$ une base de V_h. Alors u_h s'écrit dans cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_h^j \varphi_j,$$

   donc retrouver u_h revient à retrouver le vecteur $U = \begin{pmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \\ \vdots \\ u_h^{N_h} \end{pmatrix}$.

   b) En prenant $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}$ dans (3), montrer qu'on peut écrire (3) sous la forme :

$$\text{Trouver } U \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ solution de } AU = F,$$

   où $A \in M_{N_h}(\mathbb{R})$ et $F \in M_{N_h,1}(\mathbb{R})$. Donner la matrice A et le vecteur colonne F. Démontrer que la matrice A est symétrique définie positive.

3. *Construction de la matrice A et du vecteur F pour des éléments finis* $\mathbb{P}_1$.
   On commence par rappeler que $V = H_0^1(0,1)$ et
$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)$$
$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$
   Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \dfrac{1}{N+1}$ et $x_i = ih$ pour $i = 1, 2, \dots, N$. On considère la famille de fonctions $\varphi_i \in H_0^1(0,1)$ ($i \in \{1, 2, \dots, N\}$) définie par
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i[\\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
   a) Représenter graphiquement la fonction φ_i pour un i donné. Pour de valeurs $(b^i)_{1\le i\le N}$ données, représenter graphiquement la fonction $b = \sum_{i=1}^{N} b^i\varphi_i$. *Pour cette question nous pouvons prendre, par exemple,* $N = 9$.
   b) Calculer $k_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}(x)\frac{d\varphi_j}{dx}(x)dx$ et $m_{ij} = \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$, pour $c(x) \equiv 1$ et pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Pour $f(x) = (4\pi^2 + 1)\sin(2\pi x)$, calculer $f_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$.
   c) En utilisant les matrices $K = (k_{ij})_{1\le i,j\le N}$ et $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le N}$, trouver la matrice A et le vecteur F de la question 2.b).
4. Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function [K, M] = matricesEFP1(N)`, ayant comme objectif assembler les matrices K et M définies par la question précédente, où N est le nombre de points de discrétisation utilisés.
5. Résoudre l'équation matricielle $AU = F$ et représenter sur un même graphique la solution exacte et la solution approchée. Évaluer l'erreur entre la solution exacte et celle ainsi obtenue dans la norme de $L^2(0,1)$ et dans la norme de $H_0^1(0,1)$.
6. Pour les deux normes, calculer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour chacune des valeurs suivantes de N : $50, 100, 200, 400, 800$. Afficher l'évolution de l'erreur en fonction de h. Déduire l'ordre de la méthode.
7. Tester le programme pour d'autre choix de c et de f.