TP 1 : La méthode des différences finies

Le but de ce TP est de présenter la méthode d'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) par différences finies en se basant sur deux exemples de problèmes aux limites uni-dimensionnelles.
On utilise le logiciel `Scilab`[1] pour l'implémentation numérique.

1 Déformation d'un fil élastique

La position d'un fil élastique maintenu à ses extrémités en $x = 0$ et $x = 1$ à la hauteur 0, soumis à une charge transversale $f \in C([0, 1])$ et d'une rigidité $c \in C([0, 1])$ avec $c(x) \geq c_0 > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, est donnée par la solution $x \mapsto u(x)$ du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions pour le problème (1).
2. Soit $h > 0$. En utilisant des développements de Taylor au voisinage de x, montrer que
$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \frac{u(x) - 2u(x+h) + u(x+2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h).$$
Ce schéma s'appelle le schéma de *différences finies avant*.
3. Soit $h > 0$. En utilisant des développements de Taylor au voisinage de x, montrer que
$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$
Ce schéma s'appelle le schéma de *différences finies centré*.
4. On considère un maillage de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ constitué de N points uniformément distribués. On note $h = 1/(N + 1)$ et $x_i = ih$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. On dénote u_i la valeur approchée de $u(x_i)$. De plus $u_0 = u_{N+1} = 0$. Pour le reste de cette partie on prend $c(x) = 1$ et $f(x) = (4\pi^2 + 1)\sin(2\pi x)$. Vérifier que pour ce choix de c et de f la solution exacte de (1) est donnée par $u(x) = \sin(2\pi x)$.
   (a) En utilisant le schéma *différences finie avant*, montrer que (1) s'écrit
   $$-\frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), \qquad \text{pour } i \in \{0, 1, 2, \ldots N-1\}.$$
   On note $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$. Écrire le schéma précédent sous une forme matricielle :
   $$AU + CU = F.$$
   (b) Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function [U] = DFA(N, c, f)`, permettant de calculer la solution approchée U de (1) par ce schéma numérique.

[1] `http://www.scilab.org/fr`

(c) Tester la fonction `Scilab` construite à la question précédente. Comparer la solution exacte et celle approchée en les affichant dans un même graphique. Calculer la norme de l'erreur.

(d) Calculer la norme de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour chacune des valeurs suivantes de N : $50, 100, 200, 400, 800$. Afficher l'évolution de l'erreur en fonction de h. Déduire l'ordre de la méthode.

(e) En utilisant le schéma *différences finie centré*, montrer que (1) s'écrit

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), \qquad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots N\}.$$

Mettre ce schéma sous la forme matricielle : $AU + CU = F$.

(f) Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function [U] = DFC(N, c, f)` pour implémenter ce schéma.

(g) Tester la fonction `DFC`. Comparer la solution exacte et celle approchée en les affichant dans un même graphique. Calculer la norme de l'erreur.

(h) Calculer la norme de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour chacune des valeurs suivantes de N : $50, 100, 200, 400, 800$. Afficher l'évolution de l'erreur en fonction de h. Déduire l'ordre de la méthode.

(i) Modifier le schéma différences finies centré pour prendre en compte des conditions frontière de type Neumann dans (1).

2 Déformation d'un fil inélastique

Avec les mêmes paramètres, la position d'un fil inélastique est la solution $x \mapsto u(x)$ du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4}(x) + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions pour le problème (2).
2. Soit $h > 0$. En utilisant des développements de Taylor au voisinage de x, montrer que

$$\frac{d^4u}{dx^4}(x) = \frac{u(x+2h) - 4u(x+h) + 6u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2). \tag{3}$$

3. On considère un maillage de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ constitué de N points uniformément distribués. On note $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. On dénote u_i la valeur approchée de $u(x_i)$. De plus $u_0 = u_{N+1} = 0$. Pour le reste de cette partie on prend $c(x) = 1$ et $f(x) = 16(24 + x^2(1-x)^2)$. Vérifier que pour ce choix de c et de f la solution exacte de (1) est donnée par $u(x) = 16x^2(1-x)^2$.
   (a) Utilisant (3), écrire le schéma différences finie correspondant.
   (b) Avec ce schéma, calculer une solution approchée de (2). Comparer cette solution à la solution exacte.
   (c) En suivant la démarche de l'exercice 1.4.d) ou 1.4.h), en déduire l'ordre du schéma.