
**MODÉLISATION ET ANALYSE
MATHÉMATIQUE EN FILMS MINCES :
FLUIDES VISCO-ÉLASTIQUES, RUGOSITÉS,
SURFACES LIBRES, MÉLANGES
ET FLUIDES COMPRESSIBLES**

Laurent CHUPIN

Université de Lyon
INSA de Lyon - Pôle de Mathématiques
CNRS, UMR5208, Institut Camille Jordan
21 av. Jean Capelle, 69621 Villeurbanne Cedex, France
mail : laurent.chupin@insa-lyon.fr
web : <http://math.univ-lyon1.fr/~chupin>

Septembre 2009

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 3 |
| A - Hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes | 4 |
| B - Fluides non newtoniens : du microscopique au macroscopique | 6 |
| C - Fluides non homogènes : le modèle de Cahn-Hilliard | 9 |
| D - Géométrie de l'écoulement : qu'est ce qu'un domaine mince ? | 10 |
| 1 Fluides visco-élastiques et films minces | 15 |
| 1.1 Équations en film mince : le passage formel | 15 |
| 1.2 Existence d'une solution au problème limite | 17 |
| 1.3 Applications numériques | 18 |
| 1.4 Justification mathématique du modèle Reynolds-Oldroyd | 20 |
| 2 Modèles micro-macros, équation de Fokker-Planck et films minces | 23 |
| 2.1 Équation de Fokker-Planck en domaine borné | 23 |
| 2.2 Le modèle FENE en film mince | 27 |
| 2.3 Résultats numériques | 30 |
| 3 Phénomènes de rugosité dans des films minces | 33 |
| 3.1 Les rugosités vues comme une perturbation | 33 |
| 3.2 Effet des rugosités à l'ordre principal | 36 |
| 4 Influence de la topographie sur les modèles de Saint Venant | 41 |
| 4.1 Équations de Saint Venant sur un fond plat | 41 |
| 4.2 Équations de Navier-Stokes dans des coordonnées adaptées | 43 |
| 4.3 Équations de Saint Venant sur un fond non plat | 45 |
| 5 Singularités dans des écoulements minces de fluides de type Bingham | 47 |
| 5.1 Équation de Reynolds généralisée au voisinage d'une singularité | 48 |
| 5.2 Expression de la pression au voisinage d'une singularité | 49 |
| 6 Écoulements diphasiques et films minces | 53 |
| 6.1 Modélisation d'un écoulement diphasique en lubrification | 53 |
| 6.2 Existence d'une solution au problème limite | 55 |
| 6.3 Applications numériques | 56 |
| 7 Équation de Reynolds compressible | 59 |
| 7.1 Équations de Navier-Stokes compressible à viscosités variables | 59 |
| 7.2 Solution stationnaire aux équations de Navier-Stokes compressible | 61 |
| 7.3 Justification de l'équation de Reynolds compressible | 62 |

| | |
|--|-----------|
| Conclusion et perspectives | 65 |
| Références bibliographiques | 69 |
| A - Travaux de l'auteur | 69 |
| B - Autres références citées dans ce mémoire | 70 |

Introduction

Ce mémoire est la synthèse de mes travaux réalisés depuis la fin de ma thèse en décembre 2003. Il traite de la mécanique des fluides du point de vue mathématique, et plus particulièrement du point de vue des équations aux dérivées partielles. Plusieurs aspects y sont décrits : celui du comportement des fluides dans des domaines de faible épaisseur ainsi que celui du comportement de fluides dits complexes. Plus précisément, ce mémoire est composé des chapitres suivants :

- *Introduction* -

Dans cette première partie, je présente de manière assez générale les diverses notions utilisées par la suite (équations usuelles, notations, principaux résultats connus...). Cette introduction est commune à tous les chapitres et permet d'avoir un aperçu rapide des domaines qui sont développés par la suite.

Dans un deuxième temps, je présente les divers travaux que j'ai effectués ces cinq dernières années. Ces travaux sont classés par "thèmes" :

Chapitre 1 - *Fluides visco-élastiques et films minces* -

Ce chapitre regroupe plusieurs de mes travaux effectués en collaboration avec Guy Bayada, Bérénice Grec et Sébastien Martin. Il traite de façon générale du comportement des fluides visco-élastiques de type Oldroyd dans le cadre de la lubrification. On y démontre en particulier des résultats théoriques sur le comportement de ces fluides lorsque l'épaisseur du domaine devient petite, ainsi que des résultats numériques permettant de valider le modèle limite.

Chapitre 2 - *Modèles micro-macros, équation de Fokker-Planck et films minces* -

Pour des fluides non newtoniens dont la rhéologie est plus complexe que celle décrite par le modèle d'Oldroyd, la question du comportement des écoulements dans des domaines de faible épaisseur a été jusqu'à présent très peu étudiée. Dans les articles correspondant à ce chapitre, je me suis essentiellement intéressé au devenir de telles rhéologies (comme celle du modèle FENE) dans des domaines minces. Cette étude m'a naturellement conduit à proposer de nouveaux résultats au sujet de l'équation de Fokker-Planck stationnaire.

Chapitre 3 - *Phénomènes de rugosité dans des films minces* -

Contrairement au chapitre précédent, l'historique sur les problèmes de rugosité dans des domaines minces est assez riche. Les travaux présentés ici, résultats de collaborations avec Didier Bresch, Catherine Choquet, Thierry Colin, Marguerite Gisclon et Sébastien Martin, complètent des travaux déjà connus. Plus exactement, ils s'intéressent au cas de domaines minces (d'épaisseur ε) et rugueux (de taille de rugosités ε^2) et montrent que selon le point de vue adopté on peut voir ces rugosités comme une perturbation ou bien comme un effet à l'ordre principal.

Chapitre 4 - *Influence de la topographie sur les modèles de Saint Venant* -

En collaboration avec Marc Boutounet, Pascal Noble et Jean-Paul Vila nous avons obtenu de façon rigoureuse des équations de Saint Venant dans des domaines à fond non plat. L'approche suit principalement les idées développées par Jean-Paul Vila lors de la mise en place d'un schéma itératif pour obtenir des développements à tout ordre au voisinage d'un écoulement uniforme sur un plan incliné. Nous indiquerons dans ce chapitre les ingrédients essentiels à la construction de ce schéma et verrons comment on a su adapter la méthode au cas d'un fond non plat. Les modèles obtenus permettent de facilement voir l'influence de la topographie sur les modèles classiques, en particulier si la courbure du fond est petite ou ne l'est pas.

Chapitre 5 - Singularités dans les écoulements minces de fluides de type Bingham -

Ce chapitre, résumé d'un article réalisé avec Liviu Iulian Palade, est consacré à des écoulements non newtoniens entre deux plaques parallèles proches. Nous nous sommes intéressés à des configurations où le fluide rencontre une singularité. Selon le modèle de fluide non newtonien (par exemple fluide quasi-newtonien, ou fluide à seuil de type Bingham) on décrit le profil de pression au voisinage de la singularité en fonction de l'angle de cette singularité.

Chapitre 6 - Écoulement diphasiques et films minces -

Dans le cadre de la thèse de Bérénice Grec que j'ai co-encadré avec Guy Bayada, nous avons proposé et étudié un modèle de mélange de deux fluides dans un domaine de faible épaisseur. En se basant sur les modèles d'interface diffuse de type Cahn-Hilliard, nous avons montré que, sous des hypothèses raisonnables, le modèle proposé était bien posé. Une étude numérique de ce modèle a aussi été menée, illustrant ainsi le phénomène de cavitation.

Chapitre 7 - L'équation de Reynolds compressible -

L'équation de Reynolds pour des fluides incompressibles est une équation obtenue rigoureusement à partir des équations de Navier-Stokes lorsque l'épaisseur du domaine tend vers 0. Ce résultat théorique est justifié depuis plus de vingt ans. Pour ce qui est du cas des fluides compressibles, seuls quelques travaux montrent que pour des gaz parfaits la justification des équations de Reynolds compressible est encore valide. Nous avons, avec Rémy Sart, montré que pour des gaz non nécessairement parfaits, cette approximation était aussi justifiée. Ce travail a aussi permis d'obtenir de nouveaux résultats concernant l'existence de solutions stationnaires pour les équations de Navier-Stokes compressible.

A - Hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes

Les équations de bilan décrivant le mouvement d'un fluide dans un domaine de l'espace forment un ensemble de trois lois de conservation. Dans tous les travaux présentés dans ce mémoire, les écoulements sont supposés isothermes et sans échange de chaleur avec le milieu extérieur. Ainsi les lois que nous considérerons sont uniquement celle de conservation de la masse et celle de conservation de la quantité de mouvement.

• **Conservation de la masse** - Si $\rho(t, \mathbf{x})$ désigne la densité (ou masse volumique) d'un fluide et $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ sa vitesse à l'instant $t \in \mathbb{R}_+^*$ et en position spatiale¹ $\mathbf{x} \in \Omega$ alors la loi de conservation de la masse se traduit par la relation suivante (voir par exemple [BF06]) :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1)$$

• **Conservation de la quantité de mouvement** - Cette loi de conservation est directement issue du principe fondamental de la mécanique de Newton. Elle s'écrit (là aussi on pourra consulter [BF06])

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \rho \mathbf{f}, \quad (2)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de l'écoulement et où \mathbf{f} représente l'ensemble des forces extérieures subies par l'écoulement. Pour fermer un tel système, il faut par conséquent se donner le tenseur des contraintes et les forces extérieures. Ces dernières dépendent du contexte précis que l'on étudie et sont généralement définies de manière explicite. Ainsi lorsque l'on veut prendre en compte des phénomènes de gravité on utilisera une force extérieure de la forme $\mathbf{f} = (0, -g)$ (voir par exemple la référence [8] ou le chapitre 4) et lorsque des forces de frottement ne sont pas négligeables, on y ajoutera un terme du type $\mathbf{f} = -r_0 |\mathbf{u}| \mathbf{u}$ (voir par exemple la référence [20] ou le chapitre 7 de ce mémoire). Quant au tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, il est directement lié à

¹Dans de nombreux chapitres de ce mémoire, par soucis de simplicité, les résultats seront énoncés dans le cas de la dimension 2 d'espace. L'ensemble Ω est donc ici un ouvert de \mathbb{R}^2 . Ces mêmes résultats sont généralement valides en dimension 3. Ils sont d'ailleurs énoncés et démontrés dans les articles cités dans un cadre général.

la nature du fluide. Afin de faire apparaître la contribution de la contrainte au repos ainsi que les contributions visqueuses, on écrit généralement $\boldsymbol{\sigma}$ sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - p) \mathbf{Id} + 2\eta_s D(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}. \quad (3)$$

Plus précisément, cette relation fait intervenir la pression hydrostatique p , et les coefficients de viscosité λ et η_s (coefficients dits de Lamé) qui peuvent éventuellement dépendre de la densité ρ . Le terme additif $\boldsymbol{\tau}$ est appelé l'extra-contrainte.

• **Cas des fluides visqueux : les équations de Navier-Stokes** - A partir de ces équations générales il existe une hiérarchie de modèles allant du plus "simple" (le terme simple signifie ici que le modèle comporte peu de terme) au plus "complexe". Ainsi, parle-t-on de fluide parfait lorsque la contrainte vérifie $\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id}$, et de fluide newtonien (ou fluide visqueux) lorsque l'extra-contrainte $\boldsymbol{\tau}$ est nulle. Pour les fluides newtoniens, les équations du mouvement (2) s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \operatorname{div}(2\eta_s D(\mathbf{u})) - \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f}, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Ce système est fermé dès qu'on se donne, outre les fonctions (souvent constantes) η_s et λ , une loi d'état, c'est-à-dire dès que l'on connaît une relation entre pression p et densité ρ . Par exemple pour modéliser un gaz on utilise fréquemment une relation du type $p = a\rho^\gamma$, a et γ étant deux constantes. Le système (4) est ainsi un système d'équations aux dérivées partielles ayant pour inconnues \mathbf{u} et ρ .

Les équations de Navier-Stokes compressible (4) sont au coeur des travaux réalisés avec Rémy Sart, voir la référence [20] ou le chapitre 7 de ce mémoire. On y montre en particulier que, sous des hypothèses sur les coefficients de Lamé, il existe une unique solution stationnaire au système (4).

Dans le cas où le fluide newtonien est incompressible (lorsqu'il n'y a pas de dépendance entre la densité ρ et la pression p) l'équation de conservation de la masse (1) est équivalente à la condition dite d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Dans ce cadre les équations régissant le mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \eta_s \Delta \mathbf{u} = \rho \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Contrairement au cas compressible, la relation d'état (la densité ρ est ici une constante donnée) ne donne pas d'information sur la pression mais celle-ci est quand même parfaitement déterminée par les équations (à une constante additive près). D'un point de vue mathématique, la pression p est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

• **Fluides quasi-newtoniens et fluides à seuil** - Avant de décrire des fluides non newtoniens plus généraux notons qu'il existe une classe de fluides "intermédiaires" appelée fluides quasi-newtoniens. Ce sont des fluides pour lesquels la relation entre la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation $D(\mathbf{u})$ est explicite mais n'est plus simplement linéaire comme c'est le cas pour les fluides newtoniens. Pour des fluides incompressibles, la contrainte est alors de la forme $\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + 2f(\dot{\gamma})D(\mathbf{u})$ où $\dot{\gamma}$ est le second invariant du tenseur des déformations $D(\mathbf{u})$, c'est-à-dire tel que $\dot{\gamma}^2 = \operatorname{Tr}(D(\mathbf{u})^2)$. Selon la fonction f , on obtient les modèles suivants :

$$\begin{aligned} \text{Fluide newtonien} & \dots \dots \dots f(\dot{\gamma}) = \eta_s, \\ \text{Loi de puissance} & \dots \dots \dots f(\dot{\gamma}) = \eta_s \dot{\gamma}^{n-1}, \\ \text{Loi de Carreau-Yasuda} & \dots \dots \dots f(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_s - \eta_\infty)(1 + (\lambda \dot{\gamma})^a)^{(n-1)/a}, \\ \text{Fluide de Bingham} & \dots \dots \dots f(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \eta_s + \frac{\sigma_0}{\dot{\gamma}} & \text{si } \dot{\gamma} \neq 0, \\ \text{comportement solide} & \text{si } \dot{\gamma} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi les équations régissant le mouvement d'un fluide incompressible quasi-newtonien sont

$$\begin{cases} \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \operatorname{div}(2f(\dot{\gamma})D(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Les résultats présentés au chapitre 5 (qui sont un résumé de l'article [19]) concernent ces fluides. Lorsqu'un tel fluide est confiné entre deux plaques parallèles et proches, on a décrit le comportement de la pression au voisinage d'une singularité du domaine.

B - Fluides non newtoniens : du microscopique au macroscopique

Le comportement mécanique de nombreux fluides est bien décrit par la loi constitutive d'un fluide incompressible newtonien, et donc par les équations de Navier-Stokes (5) présentées ci-dessus. Néanmoins d'autres fluides ont des comportements qui ne sont pas pris en compte par de telles lois, et ce sont souvent ces fluides qui entrent en jeu dans l'industrie, la biologie... Parmi ces fluides non newtoniens, on peut citer les solutions de polymères dilués comme les peintures, les dentifrices ou les argiles. Le parti pris ici est de présenter un modèle dit micro-macro (modèle FENE) qui, bien que plus complexe que certains modèles visco-élastiques, à l'avantage d'une part de montrer comment généraliser naturellement des modèles purement macroscopiques, et d'autre part d'avoir une meilleure compréhension physique de chacun des termes de ces modèles non newtoniens.

B.1 Un modèle microscopique : le modèle FENE

Le modèle FENE est un modèle dit "micro-macro". Cette terminologie indique qu'il couple des effets microscopiques et l'hydrodynamique "classique". Décrivons en quelques lignes quels sont les ingrédients principaux de cette dynamique microscopique.

- **Mécanique du ressort** - L'idée maîtresse de ces modèles consiste à identifier chaque molécule d'un polymère à un vecteur \mathbf{Q} appelé vecteur bout-à-bout (end-to-end en anglais). On assimile ainsi une molécule à un ressort et on lui applique les lois classiques de la mécanique : étant donnée une force élastique $\mathbf{E}(\mathbf{Q})$, la dynamique du ressort est donnée par $\partial_{tt}^2 \mathbf{Q} + \gamma \partial_t \mathbf{Q} = -\mathbf{E}(\mathbf{Q})$, la constante γ étant un coefficient d'amortissement. Si on se place dans le cas où l'échelle de temps microscopique est beaucoup plus grande que l'échelle de temps macroscopique, le terme $\partial_{tt}^2 \mathbf{Q}$ est négligeable et on obtient une simple équation de transport pour le ressort : $\gamma \partial_t \mathbf{Q} = -\mathbf{E}(\mathbf{Q})$. Des termes de fluctuations thermodynamiques sous forme d'un bruit blanc (mouvement brownien isotrope) sont généralement considérés dans ces dynamiques microscopiques : $\gamma d\mathbf{Q} = -\mathbf{E}(\mathbf{Q})dt + \gamma k\theta d\mathbf{W}_t$, où \mathbf{W}_t est un processus de Wiener, k est la constante de Boltzmann et θ la température. Le lemme d'intégration d'Itô permet d'écrire² une équation équivalente sur la fonction de distribution $\psi(t, \mathbf{Q})$:

$$\partial_t \psi = k\theta \Delta_{\mathbf{Q}} \psi + \frac{1}{\gamma} \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{E}(\mathbf{Q}) \psi). \quad (7)$$

- **Prise en compte de l'hydrodynamique** - Dans le domaine macroscopique, la trajectoire $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ d'une particule de fluide issue de la position \mathbf{X} au temps $t = 0$ est déterminée par le champ des vitesses du fluide \mathbf{u} via l'équation différentielle ordinaire

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})), \quad \mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}.$$

² Les opérateurs laplacien et divergence apparaissant dans cette formulation sont des opérateurs de dérivation par rapport à la variable \mathbf{Q} , c'est pourquoi ils sont indicés par \mathbf{Q} . Comme dans tout ce mémoire, un opérateur sans indice fera toujours référence à des dérivées spatiales (par rapport à \mathbf{x}), dans les autres cas, comme ici, on précisera la variable.

La matrice jacobienne de l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}$ joue un rôle essentielle dans la description d'un milieu continu. On lui associe le tenseur des déformations³ $\mathcal{F}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(t, \mathbf{X})$. En dérivant cette relation, il vient

$$\partial_t \mathcal{F} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{F} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathcal{F}. \quad (8)$$

Pour comprendre le couplage micro-macro, on peut voir chaque particule macroscopique \mathbf{x} comme un ensemble de particules microscopiques \mathbf{Q} , voir la figure 1. En écrivant $\psi(t, \mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \psi(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}), \mathcal{F}\mathbf{q})$ où \mathbf{q} correspond à la direction lagrangienne, on obtient (en utilisant la relation (8))

$$\frac{d}{dt} \psi = \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi + (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \nabla_{\mathbf{Q}} \psi.$$

Ainsi, la relation cinétique (7) devient (en utilisant la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{u} = 0$)

$$\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi = -\text{div}_{\mathbf{Q}}((\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q})\psi) + k\theta \Delta_{\mathbf{Q}} \psi + \frac{1}{\gamma} \text{div}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{E}(\mathbf{Q})\psi). \quad (9)$$

Le chapitre 2 de ce mémoire est consacré à cette équation. Plusieurs résultats permettent de comprendre la structure de ce modèle et en particulier d'assurer l'existence et l'unicité d'une distribution ψ dès qu'on se donne un champ de vitesse \mathbf{u} suffisamment régulier.

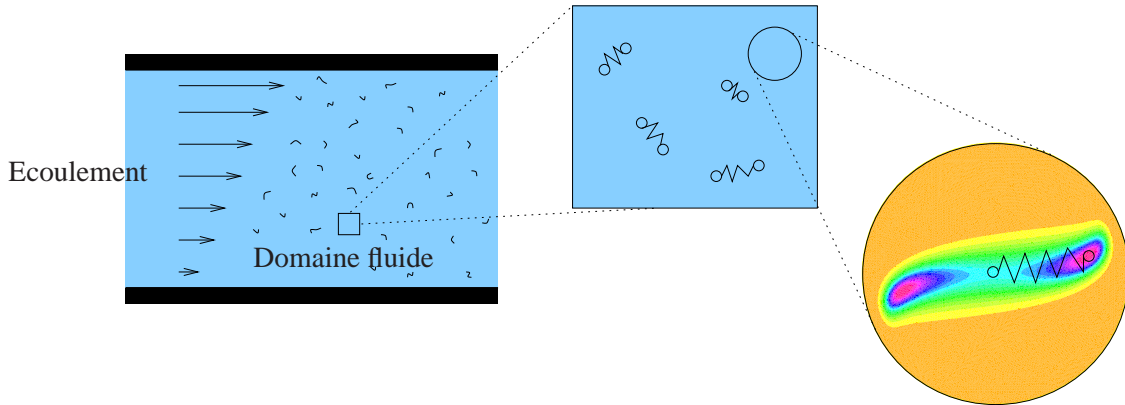


FIG. 1: Sur la gauche, le domaine physique d'un écoulement d'une solution de polymères dilués. D'un point de vue microscopique, les chaînes de polymère sont identifiées à des systèmes de ressorts indépendants. L'orientation et la longueur de chaque polymère sont décrites par une quantité ψ distribuée dans une boule dont le rayon représente l'élongation maximale du ressort. Sur la droite, les couleurs correspondent aux différentes probabilités pour que le ressort soit dans une position donnée. Sur la figure, on a représenté le ressort qui a la plus grande probabilité d'exister (il en est de même pour son symétrique par rapport à l'origine de la boule).

• **Contribution des polymères au tenseur des contraintes** - On dispose maintenant d'un modèle décrivant l'évolution d'un polymère dans un champ de vitesse \mathbf{u} . Pour pouvoir obtenir de façon complète l'équation de conservation de la quantité de mouvement, il faut évaluer la contribution τ des polymères au tenseur des contraintes σ . En utilisant le fait que le tenseur des contraintes testé contre un vecteur unitaire \mathbf{n} fournit la

³ La convention choisie ici pour l'indiciage de ce tenseur est la suivante : $\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right]_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$. De même, le gradient de vitesse est le tenseur de composante $[\nabla \mathbf{u}]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

force qui s'exerce sur l'élément de surface de normale \mathbf{n} , on montre que $\boldsymbol{\tau}$ s'exprime de la façon suivante (voir [BHAC77]) :

$$\boldsymbol{\tau} = \int \mathbf{E}(\mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q} \psi(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} - k\gamma\theta \left(\int \psi(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} \right) \mathbf{Id}. \quad (10)$$

Reste enfin à choisir l'expression de la force \mathbf{E} . Bien entendu ce choix est essentiel dans la physique puisque c'est cette force qui est à la base de la modélisation. La dénomination FENE (Finite Extensible Nonlinear Elasticity) provient justement de ce choix. Le modèle FENE est un modèle où les ressorts ont une longueur d'extension finie. Pour ce modèle, la force \mathbf{E} est de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{Q}) = \frac{H\mathbf{Q}}{1 - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{Q_0^2}},$$

où H est une constante d'élasticité et où Q_0 correspond à la longueur maximale d'élongation des ressorts. Dans ce cas, le domaine de définition de la fonction \mathbf{E} est la boule B de centre $\mathbf{0}$ et de rayon Q_0 . L'équation (9) est donc posée pour $(t, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}_*^+ \times \Omega \times B$ et les intégrales définissant la contrainte $\boldsymbol{\tau}$ dans la relation (10) sont des intégrales sur B .

En toutes généralités, les équations régissant l'écoulement sont alors données par le couplage des équations (1), (2), (3), (9) et (10).

B.2 Un modèle macroscopique : le modèle d'Oldroyd

• **Clôture du système** - Bien entendu, il existe d'autres choix pour la force élastique \mathbf{E} que celle proposée pour le modèle FENE. Le cas le plus simple est celui d'une force linéaire (dite force hookéenne) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Q}) = H\mathbf{Q}, \quad B = \mathbb{R}^2.$$

Un des gros avantages de ce choix est que l'on peut obtenir, à partir de l'équation (9) sur ψ , une équation sur $\boldsymbol{\tau}$ (via la relation (10)). Autrement dit, le modèle initialement micro-macro peut se ré-écrire, comme on va l'expliquer par la suite, en un système purement macroscopique, c'est-à-dire ne faisant plus intervenir l'inconnue microscopique ψ : on obtient le modèle d'Oldroyd.

On notera qu'il existe encore d'autres choix possibles de forces \mathbf{E} permettant d'obtenir un modèle macroscopique (on obtient ainsi les modèles FENE-P, FENE-L, FENE-LS voir par exemple [GKL99]). Toutefois, dans le cas du modèle FENE, il n'est pas possible d'en déduire un modèle purement macroscopique.

• **Le cas hookéen** - Plaçons nous donc dans le cas où $\mathbf{E}(\mathbf{Q}) = H\mathbf{Q}$ et $B = \mathbb{R}^2$. Pour obtenir l'équation sur la contrainte $\boldsymbol{\tau}$ à partir de l'équation sur ψ , on multiplie l'équation scalaire (9) par le tenseur $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}$, puis on intègre sur B . Si on note provisoirement $\mathbf{A} = \int_B \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \psi(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}$ alors on en déduit la relation suivante sur le tenseur \mathbf{A} :

$$\partial_t \mathbf{A} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{A} = 2k\theta\varrho \mathbf{Id} - \frac{2H}{\gamma} \mathbf{A} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T,$$

où la quantité ϱ est définie par $\varrho = \int_B \psi(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}$. D'après l'expression de la contrainte $\boldsymbol{\tau}$ (voir la relation (10)) on en déduit que

$$\partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T + \frac{2H}{\gamma} \boldsymbol{\tau} = 2k\theta\gamma\varrho D(\mathbf{u}).$$

Historiquement, ce modèle d'Oldroyd a été obtenu par des considérations totalement différentes (plus exactement en faisant une analogie avec des systèmes masses/ressorts macroscopiques, voir [11] ou [Old50]). L'approche initiale faisant intervenir la notion de dérivée convectée, le modèle d'Oldroyd s'écrit plus généralement en faisant intervenir un coefficient supplémentaire $a \in [-1, 1]$ sous la forme :

$$\lambda (\partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} + g_a(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})) + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_s r D(\mathbf{u}),$$

$$\text{où } g_a(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1-a}{2} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau}) - \frac{1+a}{2} (\nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (11)$$

Une partie de ma thèse [11] a été consacrée à l'étude (théorique et numérique) de ce type de fluide visco-élastique. Dans le cadre des domaines de faible épaisseur, une étude complète est présentée au chapitre 1. On y démontre en particulier que lorsque l'épaisseur du domaine tend vers 0 alors les équations de Navier-Stokes (5) couplées à celle d'Oldroyd (11) convergent vers un système d'équations bien posé. Par ailleurs, une étude théorique et numérique du système limite a été réalisée (dans [6] et résumée dans le chapitre 1 de ce mémoire).

C - Fluides non homogènes : le modèle de Cahn-Hilliard

Il existe de très nombreuses façons de modéliser des mélanges. Pour des raisons de simplicité, nous nous intéresserons ici uniquement aux mélanges de deux fluides⁴. Les modèles les plus "naturels" sont des modèles à deux vitesses. Ils consistent à écrire des équations du mouvement pour chaque fluide et de décrire l'interface entre les deux fluides à l'aide de lois physiques (continuité de la vitesse et de la contrainte à travers l'interface). Un des inconvénients de ces modèles est qu'il faut pouvoir être capable, en particulier numériquement, de suivre la position précise de l'interface. On peut contourner cette difficulté en décrivant de façon continue la transition entre les deux fluides, et en ayant un modèle à une seule vitesse. En 1958, J.W. Cahn et J.E. Hilliard ont proposé un mécanisme permettant de prendre en compte des phénomènes d'échanges entre deux fluides. Leur étude [CH58] se base sur des interactions chimiques à l'interface entre les deux fluides. Le modèle obtenu, couplé à l'hydrodynamique, c'est-à-dire aux équations de Navier-Stokes dans le cas d'un mélange de deux fluides newtoniens, s'écrit de la façon suivante (voir [Boy01]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \operatorname{div}(\eta(\varphi)D(\mathbf{u})) = \kappa \mu \nabla \varphi, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}e} \operatorname{div}(B(\varphi)\nabla \mu) = 0, \\ \mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi). \end{array} \right. \quad (12)$$

La fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ décrit, à chaque instant et en tout point, la proportion d'un des deux fluides dans le mélange. Cette quantité est appelée un paramètre d'ordre et par définition satisfait (au moins formellement) les inégalités $0 \leq \varphi \leq 1$.

Dans le système (12), écrit ici sous forme adimensionnée, le nombre de Peclet $\mathcal{P}e$ mesure l'influence de la diffusion à l'interface entre les deux fluides. Le nombre sans dimension α décrit l'épaisseur de cette interface. La fonction F est un potentiel dont les états $\varphi = 0$ et $\varphi = 1$ sont des *minima*. Elle a pour rôle de séparer les deux phases.

Ce modèle est très riche puisque non seulement il prend en compte la chimie à l'interface grâce au potentiel chimique μ mais il permet aussi d'incorporer des termes de tension de surface $\kappa \mu \nabla \varphi$ entre les deux fluides.

⁴ On peut bien sûr imaginer qu'une fois que l'on a compris comment mélanger deux fluides, il en va de même pour trois fluides, quatre fluides... En pratique, l'extension n'est pas toujours immédiate, en témoigne les résultats de F. Boyer et C. Lapuerta au sujet des modèles multiphasiques à interfaces diffuses, voir [BL06].

C'est dans le chapitre 6 que je présente les travaux que nous avons, en collaboration avec Guy Bayada et Bérénice Grec, obtenus au sujet de ce type d'écoulements. Plus précisément, le chapitre 6 est décomposé en deux parties. Dans la première (voir l'article [2]) nous effectuons un passage à la limite heuristique dans les équations (12) lorsque l'épaisseur du domaine tend vers 0. On obtient ainsi un système couplant une pression p indépendante de la variable verticale et le paramètre d'ordre φ . Nous étudions ce modèle et montrons l'existence d'une solution sous certaines conditions de petitesse sur les données. Dans la seconde partie (référence [4]) nous avons simulé des écoulements diphasiques dans des domaines minces à l'aide du modèle obtenu dans la première partie, prenant ainsi en compte la diffusion à l'interface entre les deux phases et les effets de capillarité. Nous adaptions un schéma numérique dû à F. Boyer [Boy00, Boy02] puis présentons des simulations numériques pour différentes applications. En particulier, nous montrons que le modèle choisi permet de simuler de nouveaux aspects du phénomène de cavitation, dans la mesure où il autorise la présence de plusieurs couches de chaque fluide.

D - Géométrie de l'écoulement : qu'est ce qu'un domaine mince ?

Comme indiqué à plusieurs reprises, hormis le fait que je me suis intéressé aux comportements des fluides dits "complexes" (fluides non newtoniens, non homogènes...), la géométrie dans laquelle ces écoulements ont lieu est particulière. En effet, la plupart de mes travaux consiste en l'étude du comportement des fluides dans des domaines minces, c'est-à-dire des domaines physiques où la "hauteur" est beaucoup plus petite que la "longueur". Les deux principales applications que j'ai abordées sont d'une part l'application à la lubrification (typiquement l'étude d'un lubrifiant entre deux parois rigides très proches en mouvement relatif comme par exemple dans un mécanisme de roulement à billes), d'autre part l'application aux écoulements à surface libre comme les écoulements de ruisseaux ou les avalanches.

D.1 Lubrification et écoulements entre deux parois proches

- **Considérations physiques** - Selon O. Reynolds [Rey86], la lubrification désigne le contrôle de l'usure des matériaux par l'introduction d'un film fluide qui réduit le frottement entre les surfaces en quasi-contact et en mouvement relatif. Schématiquement, la situation peut être décrite par la figure 2. Un fluide s'écoule entre deux parois proches l'une de l'autre. La vitesse relative entre les deux parois peut se traduire par le seul mouvement de la paroi du bas. De même, il est usuel de considérer que la surface du bas est plane et que toute la géométrie est portée par la surface du haut. Ainsi le domaine physique Ω sur lequel sont posées les équations a la forme suivante :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < L \ \text{et} \ 0 < z < \varepsilon h(x)\}.$$

La fonction h permet de décrire la géométrie de la surface supérieure et le paramètre sans dimension ε exprime le faible rapport entre la longueur et la hauteur du domaine ($\varepsilon \ll 1$). Dans les mécanismes de lubrification de type palier, ce nombre est de l'ordre de 10^{-3} .

- **Formulation mathématique** - Habituellement, les équations de Navier-Stokes incompressible (5) sont mises sous forme adimensionnée en choisissant, en fonction du problème étudié, une échelle de temps et une échelle d'espace. Lorsque le problème présente une forte anisotropie spatiale comme c'est le cas ici, il faut faire intervenir deux échelles d'espace. Typiquement si $\mathbf{x} = (x, z)$ alors x est adimensionné par une longueur caractéristique L et z est adimensionné par une autre longueur εL . Plus généralement, l'adimensionnement utilisé dans le cadre de la lubrification est le suivant :

$$x = Lx^*, \quad z = \varepsilon Lz^*, \quad t = Tt^*, \quad u = \frac{L}{T}u^*, \quad w = \varepsilon \frac{L}{T}w^*, \quad p = \frac{\eta_s}{\varepsilon^2 T}p^*, \quad \mathbf{f} = F_0 \mathbf{f}^*.$$

Les équations de Navier-Stokes (5) s'écrivent alors dans le domaine renormalisé (comme il est très fréquent, on ne note plus les étoiles *) :

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < 1 \ \text{et} \ 0 < z < h(x)\},$$

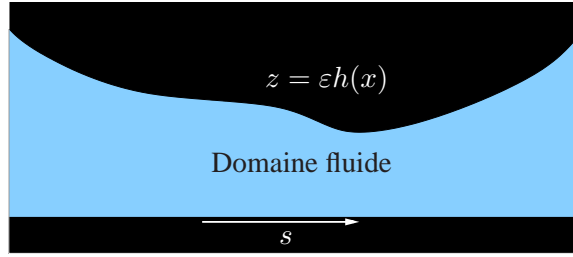


FIG. 2: Géométrie schématisée d'un problème de lubrification.

sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u) + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_x p - \partial_{xx}^2 u - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_{zz}^2 u = \frac{\mathcal{R}e}{\mathcal{F}r} f_1 \\ \varepsilon\mathcal{R}e(\partial_t w + u\partial_x w + w\partial_z w) + \frac{1}{\varepsilon^3}\partial_z p - \varepsilon\partial_{xx}^2 w - \frac{1}{\varepsilon}\partial_{zz}^2 w = \frac{\mathcal{R}e}{\mathcal{F}r} f_2 \\ \partial_x u + \partial_z w = 0, \end{cases} \quad (13)$$

où le nombre de Reynolds est défini par $\mathcal{R}e = \frac{\rho L^2}{\eta_s T}$ et le nombre de Froude par $\mathcal{F}r = \frac{L}{T^2 F_0}$. Si, par exemple, ces deux nombres sans dimension sont de l'ordre de 1 (comparativement à ε) alors le système précédent converge lorsque ε tend vers 0 vers le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_x p - \partial_{zz}^2 u = 0, \\ \partial_z p = 0, \\ \partial_x u + \partial_z w = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Les conditions physiques réalistes indiquent que le système (13) doit être muni des conditions au bord suivantes :

$$\begin{cases} u(x, 0) = s, & w(x, 0) = 0, & u(x, h(x)) = 0, & w(x, h(x)) = 0, \\ u(0, z) = u_g(z), & u(1, z) = u_d(z), & w(0, z) = w_g(z), & w(1, z) = w_d(z), \\ p(1, 0) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions u_g , u_d , w_g et w_d correspondent aux vitesses imposées en amont et en aval du domaine. Puisque l'écoulement est à divergence nulle, pour que le problème soit bien posé il faut que ces applications vérifient la relation de compatibilité suivante : $\int_0^{h(0)} u_g = \int_0^{h(0)} u_d$. Cette quantité correspond au débit entrant dans le domaine. On le notera q_0 .

A la limite $\varepsilon = 0$ on peut montrer que les conditions au bord correspondantes obtenues sur le système (14) sont

$$\begin{cases} u(x, 0) = s, & w(x, 0) = 0, & u(x, h(x)) = 0, & w(x, h(x)) = 0, \\ \int_0^{h(0)} u(0, z) dz = q_0, \\ p(1) = 0. \end{cases}$$

En particulier, les conditions sur la vitesse w permettent d'écrire la dernière équation du système (14) sous la forme $\partial_x(\int_0^h u) = 0$. Physiquement, cette équation n'est rien d'autre que la conservation du débit en fonction de l'abscisse x . Le système (14) a ainsi l'avantage de pouvoir se simplifier à la main très facilement : puisque la pression ne dépend pas de la variable z , on peut intégrer directement la première équation deux fois par rapport

à cette variable z . On en déduit l'expression de la vitesse u en fonction de la pression p . La conservation du débit permet alors d'avoir une équation parabolique en la pression uniquement. C'est l'équation de Reynolds :

$$\partial_x \left(\frac{h^3}{12} \partial_x p \right) = \partial_x \left(\frac{h}{2} s \right). \quad (15)$$

Tous ces résultats, aussi bien la dérivation formelle de l'équation de Reynolds que sa justification en terme de limite des équations de Navier-Stokes, est connu depuis plusieurs années (1886 dans [Rey86] pour la dérivation formelle, et 1984 dans [BC86] pour les justifications rigoureuses).

• Généralisation aux fluides visco-élastiques

Une des préoccupations de mes travaux a été de savoir si on pouvait généraliser cette approche à des fluides non newtoniens, et en particulier à des fluides visco-élastiques de type Oldroyd. Un résumé de cette étude (à la fois d'un point de vue théorique et numérique) fera l'objet du chapitre 1 du présent mémoire. Il correspond aux références [5], [6] et [7].

• Effet des rugosités

Une autre façon de généraliser l'étude des écoulements de type Reynolds est de comprendre l'effet de rugosités sur les bords du domaine. La première question naturelle est de savoir comment "modéliser" des rugosités. On s'est intéressé aux cas où la taille des rugosités est de l'ordre de ε^2 . Selon l'approche envisagée (ce qui revient à regarder des approximations dans des normes différentes) les conclusions ne seront pas du tout les mêmes. Dans la première partie du chapitre 3, on regarde les rugosités comme une perturbation d'un écoulement dans un domaine lisse. On sépare ainsi les effets internes à l'écoulement (ceux qui ne voient pas le bord) des effets au bord qui sont gouvernés par les rugosités. Dans la seconde partie, on commence par "écraser" le domaine sur un rectangle de sorte à étudier un problème sur une géométrie plus simple. Cet écrasement met en valeur les rugosités et on montre des résultats de convergence vers un problème limite ($\varepsilon \rightarrow 0$) de Reynolds généralisé.

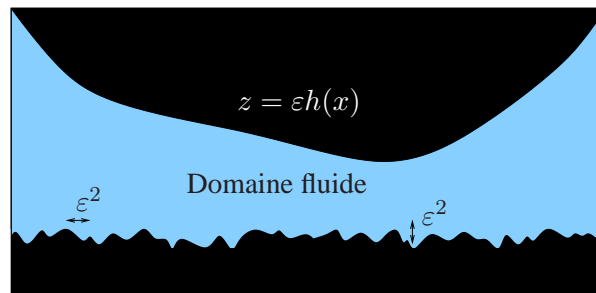


FIG. 3: Quel est l'effet des rugosités sur l'écoulement ?

D.2 Modèles de Saint Venant pour des écoulements à surface libre

• **Formulation mathématique** - Le principe des modèles de type Saint Venant (Shallow water en anglais) est au départ le même que celui permettant d'obtenir l'équation de Reynolds dans le cas de la lubrification. Il s'agit d'obtenir une équation simplifiée⁵ des équations de Navier-Stokes. Les principales différences entre les deux approches sont les suivantes :

⁵ Simplifiée au sens où elle "vit" dans un domaine de dimension inférieure.

- D'une part la physique du problème qui ne permet pas d'effectuer les mêmes adimensionnements (typiquement la pression n'est pas d'ordre $1/\varepsilon^2$ dans les écoulements modélisés par les équations de Saint Venant). En effet, les échelles auxquelles on s'intéresse pour ce type d'écoulement (écoulement océanique, modélisation de rivière, d'avalanche...) font que les effets prépondérants sont dus à la gravité. Dans ce cas, les équations décrivant le mouvement sont les équations de Navier-Stokes incompressible (voir les équations (5)) où un terme de forçage \mathbf{f} est donnée par $\mathbf{f} = (0, -g)$.
- D'autre part le phénomène physique de surface libre. L'écoulement n'est plus contraint entre deux surfaces rigides mais seulement "posé" sur une surface rigide (voir la figure 4). Autrement dit, le domaine est l'une des inconnues du problème. Néanmoins, on sait qu'il peut s'écrire sous la forme suivante, les coordonnées x et z étant adaptées à la géométrie :

$$\Omega(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in \mathbb{R} \text{ et } b(x) < z < h(t, x)\}.$$

La fonction b est une donnée du problème et correspond au "fond" du domaine. La fonction inconnue h désigne la hauteur de fluide.

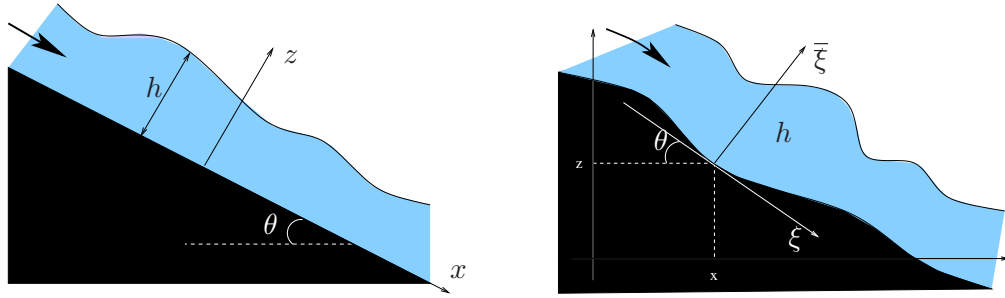


FIG. 4: Phénomène à surface libre : cas d'un fond plat et d'un fond non plat.

Le cas le plus élémentaire correspond au cas d'un écoulement d'une couche de fluide newtonien, incompressible, sur un fond plat (fond penché d'inclinaison θ , autrement dit la fonction b vaut $b(x) = -\tan(\theta)x$) et soumis uniquement à l'effet de la gravité (voir la figure 4 de gauche).

La hauteur h peut être en fait déterminée grâce aux conditions au bord, et en particulier grâce aux conditions en "haut" du domaine : on traduit d'une part le fait que la frontière $z = h(t, x)$ est transportée par le fluide (condition d'imperméabilité)

$$\partial_t h(t, x) + u(x, h(t, x)) \partial_x h(t, x) = w(x, h(t, x)),$$

et d'autre part que la contrainte est continue à travers l'interface. La contrainte dans le fluide (supposé newtonien incompressible) s'écrivant $\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_s D(\mathbf{u}) - p\mathbf{Id}$ et la contrainte à l'extérieure étant donnée par la pression atmosphérique, cette dernière condition s'écrit

$$(2\eta_s D(\mathbf{u}) - p\mathbf{Id}) \cdot \mathbf{n} = \kappa H \mathbf{n} \quad \text{pour } z = h(t, x).$$

Le vecteur \mathbf{n} désigne la normale à la surface du fluide alors que H désigne la courbure de cette surface. Ces deux quantités peuvent directement s'exprimer à l'aide de la hauteur h .

• **Adimensionnement** - La mise sous forme adimensionnelle peut se faire comme précédemment (voir la partie D.1) excepté pour ce qui concerne la pression qui dans ce type de contexte est gouvernée par la gravité :

$$p = gHp^*.$$

La prise en compte de la courbure *via* le coefficient κ fait aussi intervenir un autre nombre sans dimension, le nombre de Weber

$$\mathcal{W}e = \frac{HU_0^2}{\kappa}.$$

On ré-écrit ainsi les équations de Navier-Stokes en essayant d'y voir une perturbation d'un cas stationnaire. Ainsi, dans le cas d'un fond plat, on essaye de voir les équations de Navier-Stokes comme une perturbation de l'écoulement donné par

$$h(x) = 1, \quad u(x, z) = \frac{\mathcal{R}e}{\mathcal{F}r} \sin(\theta) z \left(1 - \frac{z}{2}\right), \quad w(x, z) = 0 \quad \text{et} \quad p(x, z) = (1 - z) \cos(\theta).$$

Physiquement, l'idée est de déterminer les régimes de paramètres pour lesquels on peut perturber le cas uniforme. En choisissant les paramètres indépendants suivants :

$$\alpha = \frac{\varepsilon \mathcal{F}r}{\mathcal{R}e}, \quad \beta = \varepsilon \mathcal{R}e, \quad \delta = \frac{\varepsilon \mathcal{R}e}{\mathcal{F}r}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\varepsilon^2 \mathcal{F}r}{\mathcal{W}e},$$

on verra (voir [8] ou le résumé au chapitre 4) qu'il suffit d'imposer que α , β et δ soient petits (typiquement d'ordre ε), et que $\bar{\kappa}$ soit d'ordre 1. N'ayant plus qu'un seul paramètre de référence ε , on pose

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \quad \text{et} \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots$$

et on injecte ces développements dans les équations de Navier-Stokes.

Cette démarche permet d'obtenir rigoureusement un système d'équations approché couplant la hauteur h et la vitesse "moyennée" $v = \frac{1}{h} \int_0^h u(x, z) dz$. Ce sont les équations dites de Saint Venant.

Par exemple, dans le cas d'un fond plat, les équations obtenues s'écrivent (voir le chapitre 4 pour plus de détails)

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x \left(\frac{\mathcal{R}e}{3\mathcal{F}r} \sin(\theta) h^3 \right) = 0, \\ \partial_t (hv) + \partial_x \left(\frac{6}{5} hv^2 \right) + \frac{\delta}{\beta} \partial_x \left(\frac{h^2}{2} \cos(\theta) \right) - \kappa \frac{\delta}{\beta} h \partial_{xxx} h = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\mathcal{R}e}{\mathcal{F}r} \sin(\theta) h - \frac{3v}{h} \right) - \tau, \end{cases}$$

$$\text{où } \tau = \frac{7\mathcal{R}e^2}{120\mathcal{F}r^2} \sin(\theta)^2 \partial_x h h^4 + \frac{\mathcal{R}e}{8\mathcal{F}r} \sin(\theta) \partial_t h h^2.$$

• **Généralisation à un fond non plat -**

En collaboration avec Marc Boutounet, Pascal Noble et Jean-Paul Vila nous nous sommes intéressé à une généralisation de cette approche dans le cas d'écoulement avec un fond non plat. La question essentielle à laquelle nous avons répondu est la suivante : comment la topographie modifie-t-elle les équations de Saint Venant ci-dessus ? Un résumé des résultats et de la méthode employée est exposé au chapitre 4.

Chapitre 1

Fluides visco-élastiques et films minces

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats concernant le comportement des fluides visco-élastiques dans des domaines minces. Les détails de cette partie, et en particulier toutes les preuves, sont décrites dans les articles [5] et [6].

Comme indiqué en introduction, le modèle d'Oldroyd permet de prendre en compte des effets d'élasticité dans l'écoulement d'un fluide. Dans les modèles proposés, il est d'usage de répartir la contrainte en une partie visqueuse pondérée par $1 - r$ où r est un paramètre réel dans $[0, 1]$, et une partie élastique $\boldsymbol{\tau}$ (qui s'annule lorsque $r = 0$). Dans ce contexte, les équations (5) sont complétées par l'ajout d'une extra contrainte satisfaisant la relation (11) :

$$\begin{cases} \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - (1 - r) \eta_s \Delta \mathbf{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \lambda (\partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} + g_a(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})) + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_s r D(\mathbf{u}), \end{cases} \quad (1.1)$$

où l'application bilinéaire g_a est donnée par

$$g_a(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1 - a}{2} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau}) - \frac{1 + a}{2} (\nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T).$$

Ce modèle a eu beaucoup de succès ces 50 dernières années puisque c'est le modèle le plus "simple" de fluide visco-élastique. Malgré cela, les non linéarités issues essentiellement du terme $g_a(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})$ font de ce modèle un véritable casse-tête du point de vue mathématique. Le lecteur intéressé par les aspects mathématiques pourra consulter de très nombreuses références comme par exemple les articles suivants : [11, GS87, GS90a, GS90b, GS91, GS92, LM00, MT04].

Dans le contexte des films minces et de la lubrification, il existe aussi de nombreux travaux au sujet des écoulements non newtoniens. La plupart d'entre eux aboutissent à une équation de Reynolds généralisée, c'est par exemple le cas des fluides quasi newtoniens, voir [Tao96]. D'autres auteurs, comme J. Tichy [Tic96] ou H. Bellout et F. Talay Akyildiz [BTA04], ont proposé des modèles visco-élastiques en films minces avec des lois de type Oldroyd (généralement avec $a = 1$ et $r = 1$) et pour des adimensionnements différents de celui que nous allons proposer ici (typiquement, dans leurs articles toutes les composantes du tenseur des contraintes ne sont pas adimensionnées de la même façon).

1.1 Équations en film mince : le passage formel

La principale difficulté pour obtenir des équations limites formelles dans un domaine mince est l'adimensionnement des équations. En effet, si on ne choisit pas les "bonnes" grandeurs caractéristiques, on peut annuler tous les effets et ne plus rien pouvoir observer à la limite. Le choix de ces adimensionnements est donc crucial.

Dans le cadre de la lubrification, le choix des grandeurs caractéristiques pour les vitesses, longueur, pression et temps correspond à celui présenté dans l'introduction (voir la partie D.1, page 10). Dans le cadre des fluides visco-élastiques, il ne reste plus qu'à introduire une grandeur caractéristique pour l'extra contrainte. La façon la plus pertinente (c'est-à-dire celle pour laquelle il reste le plus de termes dans le système initial une fois passé à la limite) est de proposer l'adimensionnement suivant :

$$\tau = \tau^* \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{\eta_s \mathcal{U}}.$$

On pourra remarquer à la lecture de l'article [6] que ce choix n'est pas celui qui a été fait dans d'autres travaux cités auparavant [BTA04, Tic96], et que ce choix n'est pertinent ici que pour $a \notin \{-1, 1\}$.

On ré-écrit ensuite les équations (1.1) sous la forme adimensionnée en faisant intervenir un nouveau nombre sans dimension, le nombre de Deborah $De = \frac{\lambda}{\varepsilon T}$. Rappelons que le domaine adimensionné sur lequel sont posées les équations s'écrit

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < 1 \ \text{et} \ 0 < z < h(x)\}.$$

Étant donnée l'anisotropie de ce domaine, on introduit les composantes du tenseur des contraintes et, comme dans le cas newtonien, celles du vecteur des vitesses :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = (u, w).$$

Formellement les termes prépondérants dans chaque équation du système (1.1) lorsque ε est petit s'écrivent

$$\begin{cases} -(1-r)\partial_{zz}^2 u + \partial_x p - \partial_z \beta = 0, \\ \partial_z p = 0, \\ \partial_x u + \partial_z w = 0, \\ \alpha + De(1-a)\beta\partial_z u = 0, \\ \gamma - De(1+a)\beta\partial_z u = 0, \\ \beta + \frac{De}{2}((1-a)\gamma\partial_z u - (1+a)\alpha\partial_z u) = r\partial_z u. \end{cases} \quad (1.2)$$

Les trois dernières équations de ce système indiquent qu'il est facile d'expliciter les composantes α , β et γ du tenseur des contraintes en fonction de la vitesse horizontale u . Comme pour l'équation de Reynolds standard la vitesse verticale w peut elle aussi s'obtenir directement à partir de la vitesse horizontale u via la condition d'incompressibilité et les conditions au bord pour w . Tous calculs faits, on en déduit que la limite (formelle) du système (1.1) en film mince est entièrement déterminée par la connaissance du couple vitesse-pression (u, p) et que celui-ci est solution du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -(1-r)\partial_{zz}^2 u + \partial_x p - r\partial_z \left(\frac{\partial_z u}{1 + De^2(1-a^2)|\partial_z u|^2} \right) = 0, \\ \partial_z p = 0, \\ \partial_x \left(\int_0^h u \, dz \right) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Les conditions aux limites considérées sur ce système sont issues de considérations physiques rencontrées dans des mécanismes de lubrification (voir la partie concernant l'équation de Reynolds D.1, page 10). Ainsi,

dans le cas de la dimension 2 d'espace comme présenté ici¹, on impose

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = s, \quad u(x, h(x)) = 0 \quad \text{pour } 0 < x < 1, \\ p(1) = 0, \\ \int_0^{h(0)} u(0, z) dz = q_0. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

1.2 Existence d'une solution au problème limite

1.2.1 Existence et unicité d'une solution faible

Nous avons obtenu dans [6] un premier résultat d'existence de solution faible au système (1.3) muni des conditions au bord de type (1.4). Nous indiquons dans cette section, le résultat et les principales étapes y conduisant.

On commence par définir une formulation faible en introduisant l'espace affine $K(s, q_0)$ constitué de l'ensemble des applications qui sont dans $L^2(\Omega)$, dont la dérivée par rapport à la variable z est aussi dans $L^2(\Omega)$, qui vérifie les conditions au bord $\{z = 0\}$ et $\{z = h(x)\}$ ci-dessus, et qui satisfait la condition de divergence nulle et la condition de débit imposé q_0 en un sens faible.

La formulation faible proposée pour le problème (1.3)-(1.4) est alors la suivante :

$$\text{Trouver } u \in K(s, q_0) \text{ tel que pour tout } \varphi \in K(s, q_0) \text{ on ait } \langle \mathcal{A}u, u - \varphi \rangle \leq \langle F, u - \varphi \rangle \quad (1.5)$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : K(s, q_0) \rightarrow (K(s, q_0))'$ est défini par

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = (1 - r) \langle \partial_z u, \partial_z v \rangle_{L^2(\Omega)} + r \left\langle \frac{\partial_z u}{1 + \mathcal{D}e^2(1 - a^2)|\partial_z u|^2}, \partial_z v \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Le résultat démontré dans [6] est le suivant :

Théorème 1.1

Si $r < 8/9$ alors le problème (1.5) admet une unique solution.

La preuve est relativement classique du point de vue des inégalités variationnelles : on montre que l'opérateur \mathcal{A} est borné, coercif et monotone. Le coefficient $8/9$ apparaît naturellement lorsqu'on étudie la monotonie de l'opérateur \mathcal{A} . En fait, on sait que pour $r \geq 8/9$ il existe des configurations où la solution n'est pas unique, voir par exemple [9].

1.2.2 Régularité de la solution

En utilisant des techniques de type "Théorème de De Rham", on peut déduire de l'existence de solution faible u , l'existence d'une pression p pour que le couple (u, p) satisfasse le système (1.3) et les conditions (1.4). Plus précisément, on montre le résultat suivant :

Théorème 1.2

Soit u l'unique solution du problème faible (1.5).

- (i) *Il existe une unique pression $p \in H^1(0, 1)$ telle que (u, p) satisfasse les deux premières équations du système (1.3) et les deux premières conditions au bord du système (1.4).*
- (ii) *De plus, si $u \in H^1(\Omega)$ alors (u, p) est solution de (1.3)–(1.4).*

¹Les conditions au bord sont un peu plus subtiles en dimensions supérieures, voir [6].

Lors de la justification rigoureuse du passage en film mince (voir la section 1.4) nous avons eu besoin de montrer que la solution de ce système limite (1.3) était plus régulière. Voici le résultat démontré (voir [5]).

Théorème 1.3

Si $r < 2/9$ alors la solution (u, p) de (1.3)-(1.4) est “aussi régulière” que la hauteur h du domaine Ω .

Le terme “aussi régulière” se traduit de la façon suivante : si h est de classe C^k sur $(0, 1)$ alors $p \in C^{k+1}(0, 1)$, $u \in C^{k+1}(\Omega)$, $\partial_z u \in C^{k+1}(\Omega)$. Le théorème précis est énoncé dans [5].

La preuve de ce théorème est essentiellement le fruit de discussions avec P. Mironescu. Elle peut se résumer de la façon suivante : bien qu’on ne puisse pas intégrer deux fois la première équation du système (1.3) par rapport à la variable z pour en déduire la vitesse horizontale u comme une fonction explicite de la pression p (comme on le fait pour obtenir l’équation de Reynolds standard, voir page 12), l’idée est de le faire de façon implicite.

Plus précisément, *via* le théorème des fonctions implicites, on obtient une relation sur la pression p qui s’écrit sous la forme

$$U(x, p')p'' = -V(x, p').$$

Les coefficients U et V , dépendant de la hauteur h , étant “aussi réguliers” que h , la solution p sera régulière dès qu’on assurera que U ne s’annule pas. En pratique, on sait montrer que $U < 0$ dès que $r < 2/9$.

1.3 Applications numériques

Une étude numérique du système limite obtenu, c’est-à-dire du système (1.3)–(1.4), a été menée afin de comprendre l’influence de la visco-élasticité sur un écoulement mince.

Remarque 1.1

Dans les autres parties de ce document la plupart des résultats sont énoncés dans le cas de la dimension 2 d’espace. Néanmoins, ils ont généralement été démontrés dans les articles cités aussi bien en dimension 2 qu’en dimension 3. Du point de vue numérique ainsi que du point de vue des applications, le cas de la dimension 3 est beaucoup plus riche et pertinent. Pour cette raison, les résultats de cette partie sont présentés dans le cas de la dimension 3 d’espace : $(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

L’algorithme de résolution du système (1.3) est basé sur un nouvel algorithme de résolution de l’équation de Reynolds dans le cas newtonien. L’idée est de résoudre l’équation de Reynolds dans le cas newtonien sans découpler la vitesse de la pression, c’est-à-dire sans utiliser l’équation de Reynolds (15) donnée à la page 12. En effet, on sait que dans le cas visco-élastique, ce découplage n’est plus possible (du moins de façon explicite).

On a donc tout d’abord implémenté un code de calcul (en Fortran) afin de résoudre le système newtonien

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\partial_{zz}^2 \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \right) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

lorsque $\mathbf{x} \in [0, L] \times [0, D] \subset \mathbb{R}^2$ et $0 < z < h(\mathbf{x})$. Sans entrer dans les détails des conditions au bord en dimension 3, précisons que dans tous les tests suivants la vitesse \mathbf{u} est imposée au fond sous la forme $\mathbf{u}|_{z=0} = (1, 0)$.

Le principe est de discrétiser ce problème par rapport à la variable \mathbf{x} . On introduit ainsi un pas d’espace “horizontal” $\delta_{\mathbf{x}}$ ainsi que A et B , des versions discrètes des opérateurs $\nabla_{\mathbf{x}}$ et $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}$. La hauteur $h(\mathbf{x})$ est

naturellement discrétisée par la matrice de coefficients $h_{ij} = h(i\delta_x, j\delta_x)$. L'algorithme proposé est le schéma semi-discrétisé suivant :

$$(\mathcal{P}^k) \begin{cases} -\partial_{zz}^2 \mathbf{U}^{k+1}(z) + A \circ P^k = \mathbf{0}, \\ P^{k+1} - P^k + \xi B \circ (\widetilde{H\mathbf{U}}^{k+1}) = 0. \end{cases}$$

Le paramètre ξ est un paramètre de relaxation. On a montré dans [6] que si ce paramètre est choisi de façon adaptée alors cet algorithme converge :

Théorème 1.4

Si on a $0 < \xi < \frac{3\delta_x^2}{2\|h\|_{L^\infty}^3}$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, le problème (\mathcal{P}^k) admet une solution telle que

$$(\mathbf{U}^k, P^k) \in \left(\prod_{ij} H^1(]0, h_{ij}[) \right) \times \mathbb{R}^{N_{x_1} \times N_{x_2}}.$$

De plus cette suite (\mathbf{U}^k, P^k) vérifie

$$\mathbf{U}^k \rightharpoonup \mathbf{U} \quad \text{dans} \quad \prod_{ij} H^1(]0, h_{ij}[) \quad \text{et} \quad P^k \rightarrow P \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{N_{x_1} \times N_{x_2}}.$$

La preuve de ce résultat est essentiellement basée sur des estimations d'énergie semi-discrètes.

Dans le cas d'un fluide visco-élastique, l'idée est de voir le système (1.3) comme une perturbation du système newtonien (1.6). Plus précisément, on écrit le système visco-élastique (1.3) comme la limite d'un processus de type point fixe :

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} -\partial_z (f(\mathbf{u}^n) \partial_z \mathbf{u}^{n+1}) + \nabla_{\mathbf{x}} p^{n+1} = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\int_0^h \mathbf{u}^{n+1}(\cdot, z) dz \right) = 0, \end{cases}$$

avec

$$f(\mathbf{u}^n) = (1 - r) + \frac{r}{1 + De^2(1 - a^2)|\partial_z \mathbf{u}^n|^2}.$$

Plusieurs tests ont été effectués (en particulier pour valider la discrétisation et voir l'influence du paramètre de relaxation ξ). Dans le cadre de la lubrification, la quantité qui est la plus pertinente est la pression. D'un point de vue physique, les résultats les plus intéressants concernent l'influence du nombre de Deborah (nombre qui caractérise le temps de réponse d'un fluide visco-élastique). Nous présentons sur la figure 1.1 des coupes verticales de la pression obtenues au milieu du domaine (typiquement pour $x_2 = D/2$). On en déduit que plus le fluide est visco-élastique (plus De est grand) plus le maximum de pression est faible.

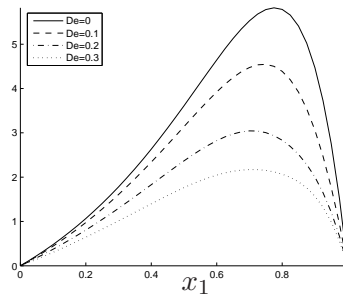


FIG. 1.1: Influence du nombre de Deborah sur le profil de pression

Dans les tests précédents, les conditions au bord sont des conditions de pressions nulle au bord du domaine. Dans le code que nous avons développé, nous avons laissé la possibilité d'utiliser des conditions au bord plus variées. Par exemple, dans le test suivant, nous avons utilisé les conditions au bord suivantes. On impose un débit en amont (pour $x_1 = 0$), c'est-à-dire qu'on se donne une condition de Neumann non homogène en pression, et on suppose que sur tous les autres bords du domaine, la pression est égale à la pression atmosphérique (par exemple en imposant une condition de Dirichlet homogène en pression sur les bords $x_1 = L$, $x_2 = 0$ et $x_2 = D$).

Un des avantages de ce modèle est que, bien qu'il ne découple pas totalement le champ des vitesses et celui de la pression, il est beaucoup plus rapide à mettre en œuvre qu'un modèle de Navier-Stokes complet (qui est totalement tridimensionnel). Nous avons donc visualisé facilement si les effets tridimensionnels avaient un rôle sur les profils de pression. La figure 1.2 rend compte de ces effets pour différentes valeurs du coefficient r (rappelons que ce coefficient mesure la proportion de fluide "visqueux" dans le fluide, pour $r = 0$ le fluide est purement visqueux alors que pour $r = 1$ le fluide est purement élastique).

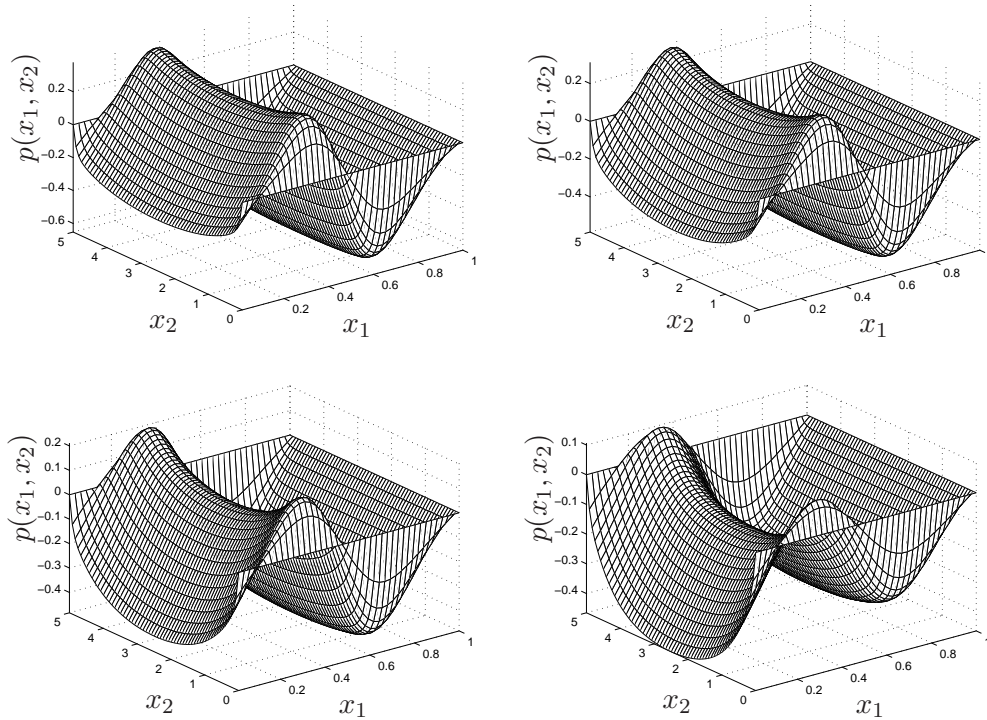


FIG. 1.2: Profils de pression pour $r = 0$, $r = 0.2$, $r = 0.5$ et $r = 0.8$

1.4 Justification mathématique du modèle Reynolds-Oldroyd

Dans [5], une justification rigoureuse du modèle Oldroyd en films minces (c'est-à-dire du système (1.3), ou de façon équivalente du système (1.2)) a été effectuée. Le principe est de montrer que les solutions $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon, \boldsymbol{\tau}^\varepsilon)$ des équations (1.1) définies sur un domaine d'épaisseur ε convergent vers les solutions $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\tau})$ des équations (1.2) lorsque le paramètre ε tend vers 0.

La principale difficulté réside dans le fait qu'il existe assez peu de résultats pour le système initial, c'est-à-dire pour le système (1.1) : dans [GS90b], C. Guillopé et J.-C. Saut prouvent l'existence globale à données petites en supposant en outre que le fluide est peu visco-élastique (ce qui revient à imposer r petit). Dans [FCGO94] et [FCGO98], E.F. Cara, F. Guillen et R.R. Ortega s'affranchissent de cette hypothèse mais prouvent seulement

une existence sur $[0, T]$ pour tout T (pour des données plus petites que $f(T)$, où f tend vers 0 lorsque T augmente...). Enfin, dans [11] on montre le même résultat que celui de C. Guillopé et J.-C. Saut en s'affranchissant de l'hypothèse de fluide "faiblement" visco-élastique. Malheureusement, de tels résultats sont difficiles à utiliser lors d'une étude asymptotique comme celle que l'on se propose de faire ici. En effet, dans les résultats énoncé ci-dessus, on ne sait pas comment dépendent les conditions de petitesse (que ce soit la petitesse du temps d'existence, ou la petitesse des données) par rapport au domaine et en particulier par rapport à ε . Le seul résultat d'existence globale qui semble connu à ce jour est celui de P.-L. Lions et N. Masmoudi [LM00]. Ce résultat est prouvé dans le cas où le coefficient a est nul. Nous nous sommes donc intéressés à justifier le modèle Oldroyd en films minces lorsque $a = 0$.

Théorème 1.5

Pour $\varepsilon > 0$ on note $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon, \boldsymbol{\tau}^\varepsilon)$ la solution des équations (1.1) (en supposant que $a = 0$). On note $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\tau})$ la solution des équations (1.2) et on suppose que $|\partial_z u|_{L^\infty(\Omega)}$, $|\boldsymbol{\tau}|_{L^\infty(\Omega)}$ et $|\partial_z \boldsymbol{\tau}|_{L^\infty(\Omega)}$ sont assez petits. Lorsque ε tend vers 0 on a les convergences suivantes dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$:

$$u^\varepsilon \rightarrow u, \quad \partial_z u^\varepsilon \rightarrow \partial_z u, \quad \partial_x u^\varepsilon \rightarrow \partial_x u, \quad w^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \partial_z w^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \partial_x w^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \boldsymbol{\tau}^\varepsilon \rightarrow \boldsymbol{\tau},$$

les convergences suivantes dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$:

$$u^\varepsilon \rightarrow u, \quad u^\varepsilon \rightarrow u, \quad w^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \boldsymbol{\tau}^\varepsilon \rightarrow \boldsymbol{\tau},$$

et la convergence $\varepsilon^2 p^\varepsilon \rightarrow p$ dans $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$.

Précisons que dans la preuve de ce théorème, la petitesse de $|\partial_z u|_{L^\infty(\Omega)}$, $|\boldsymbol{\tau}|_{L^\infty(\Omega)}$ et $|\partial_z \boldsymbol{\tau}|_{L^\infty(\Omega)}$ est donnée de manière explicite en fonction des paramètres physiques du problème (nombre de Deborah, viscosité, hauteur du domaine...), voir [5].

La preuve est basée sur le principe suivant :

- On introduit les restes \tilde{u} , \tilde{w} , $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ et \tilde{p} :

$$u^\varepsilon = u + \tilde{u}, \quad w^\varepsilon = \varepsilon w + \varepsilon \tilde{w}, \quad \boldsymbol{\tau}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad p^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} p + \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{p}.$$

- Ensuite on utilise à la fois les équations de Navier-Stokes-Oldroyd (1.1) satisfaites par u^ε , w^ε , $\boldsymbol{\tau}^\varepsilon$ et p^ε , et les équations de Reynolds-Oldroyd (1.2) satisfaites par u , w , $\boldsymbol{\tau}$ et p pour en déduire des équations satisfaites par les restes \tilde{u} , \tilde{w} , $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ et \tilde{p} .

- Il suffit enfin d'obtenir des estimations (indépendantes de ε) sur ces restes. Le système obtenu pour les restes étant assez proche du système de Navier-Stokes-Oldroyd (mais contient de nombreux termes sources dépendant de u , w , $\boldsymbol{\tau}$ et p), des estimations d'énergies classiques permettent d'obtenir les résultats escomptés.

Chapitre 2

Modèles micro-macros, équation de Fokker-Planck et films minces

Ce chapitre présente essentiellement les résultats exposés dans les articles [15, 16, 17]. Le but est de déterminer une expression simplifiée de la loi comportementale d'un fluide visco-élastique de type FENE dans un écoulement en domaine mince. Comme annoncé dans l'introduction de ce mémoire (voir page 7) le résultat essentiel concerne la résolution d'une équation de Fokker-Planck stationnaire de la forme $-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f$. Nous allons commencer par discuter de cette équation (section 2.1). Nous reviendrons ensuite sur les conséquences induites pour le modèle FENE en film mince (d'un point de vue théorique à la section 2.2 et numérique à la section 2.3).

2.1 Équation de Fokker-Planck en domaine borné

Dans cette partie, on étudie le problème de l'existence et de l'unicité de solution ψ à l'équation de Fokker-Planck linéaire

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f, \quad (2.1)$$

sur un domaine B borné de \mathbb{R}^d lorsque \mathbf{F} est un champ de vecteurs "confinant" par exemple comme l'inverse de la distance au bord.

Historiquement il existe de très nombreux cas où on sait résoudre ce type d'équation. Ainsi, lorsque $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, l'équation (2.1) correspond à l'équation bien connue de Laplace (lorsque $f = 0$) ou de Poisson (lorsque $f \neq 0$). D'autres cas sont simples à résoudre, il s'agit par exemple des cas où \mathbf{F} est un gradient $\mathbf{F} = \nabla V$ et $f = 0$. Dans cette situation particulière $\psi = e^V$ est une solution, et à renormalisation près, on peut obtenir une solution ψ telle que $\int_B \psi = 1$.

Pour des fonctions qui ne sont pas nécessairement des gradients, il existe de nombreux résultats mais qui sont généralement obtenus lorsque $B = \mathbb{R}^d$. La plupart de ces travaux utilisent des hypothèses de décroissance du potentiel à l'infini, voir par exemple les travaux de Hérau, Nier et Helffer [HN05, HN04] et ceux de Noarov [Noa07]. Il existe néanmoins quelques résultats sur des ensembles bornés. Ainsi, dans le cas où B est une variété compacte sans bord, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1 (E.C. Zeeman, 1988, [Zee88])

Soit B une variété compacte sans bord. Si $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^\infty(B)$ et $f = 0$ alors il existe une unique solution positive ψ de l'équation (2.1) telle que $\int_B \psi = 1$.

Dans le cas des domaines bornés, J. Droniou a proposé le résultat suivant :

Théorème 2.2 (J. Droniou, 2002, [Dro02])

Soit B un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Si $f \in H^{-1}(B)$ et $\mathbf{F} \in L^{d^*}(\Omega)$ alors il existe une unique solution faible ψ de l'équation (2.1) telle que $\psi = 0$ sur le bord ∂B du domaine B .

Dans cet énoncé, $d_* = d$ pour $d \geq 3$ et $d_* \in]2, +\infty[$ pour $d = 2$. Ce résultat a aussi été prouvé pour d'autres conditions au bord comme des conditions de type Dirichlet non homogène, de Fourier, ou des conditions mixtes. Plus récemment (en 2009), J. Droniou et J.-L. Vazquez ont obtenu un résultat similaire avec des conditions de Neumann au bord, sous condition d'imposer la moyenne de ψ , voir [DV09].

Le résultat principal de l'article [17] répond à la question lorsque \mathbf{F} n'est pas aussi régulier :

Théorème 2.3

Soit B un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Si $f \in H_M^{-1}$ (cet espace sera précisé plus tard) et $\mathbf{F} = \boldsymbol{\kappa} + \nabla V$ où $\boldsymbol{\kappa} \in L^\infty(B)$ et $V \in C^\infty(B)$ satisfait $V = -\infty$ sur ∂B . Si de plus V satisfait les conditions (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_2) et (\mathcal{H}_3) , données ci-dessous, près du bord alors il existe une unique solution (faible) ψ de l'équation (2.1) telle que $\int_B \psi = 1$.

Dans cet énoncé, les conditions (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_2) et (\mathcal{H}_3) font intervenir la dérivée ∇_R dans la direction de la normale au bord, l'intégrale linéaire \int_R le long de la normale au bord ainsi que la distance au bord notée δ_Γ :

$$\begin{cases} \exists a < 1 & (\nabla_R V)^2 + 2 \nabla_R^2 V \geq \frac{-a}{\delta_\Gamma^2} \\ \nabla_R V e^V = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \exists b > 0 & \nabla_R V e^V \int_R e^{-V} < b, \end{cases} \quad (\mathcal{H}_1)$$

$$\exists c > 0 \quad |\nabla V| \leq \frac{c}{\delta_\Gamma}, \quad (\mathcal{H}_2)$$

$$\exists \gamma > 0 \quad \nabla^2 V \leq -\gamma \text{ Id}. \quad (\mathcal{H}_3)$$

Typiquement, ces hypothèses sont vérifiées pour une force \mathbf{F} dont la composante normale au domaine se comporte comme l'inverse de la distance au bord. On vérifie en particulier que pour de telles fonctions, on a $\mathbf{F} \notin L^{d^*}(B)$ ce qui montre que le résultat proposé n'est pas une simple application de résultats déjà connus. Grossièrement, le résultat indique que si \mathbf{F} explose suffisamment vite au bord du domaine alors il n'est pas nécessaire d'imposer de condition sur ce bord pour avoir unicité de la solution. Par contre cette solution unique s'annule sur le bord. Autrement dit, s'il fallait imposer une condition, ce serait nécessairement une condition de Dirichlet homogène.

• **Idées de preuve**

Étape 1 : formulation faible - Dans un premier temps, on écrit une formulation faible du problème (on remarquera qu'une formulation faible standard n'est plus valable dès que $\mathbf{F} \notin L^{d^*}(B)$). Pour cela on introduit la maxwellienne (fonction régulière positive de moyenne égale à 1 et s'annulant sur le bord)

$$M = \frac{e^V}{\int_\Omega e^V}.$$

Quitte à faire un relèvement de la condition $\int_B \psi = 1$, le problème devient

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa} \psi - M \nabla \left(\frac{\psi}{M} \right)) = f \quad \text{avec} \quad \int_B \psi = 0. \quad (2.2)$$

Les espaces fonctionnels bien adaptés à ce type d'équations sont les espaces à poids suivants :

$$L_M^2 := ML^2(Mdx), \quad H_M^1 := MH^1(Mdx), \quad H_{M,0}^1 := \{\psi \in H_M^1; \int_{\Omega} \psi = 0\} \quad \text{et} \quad H_M^{-1} = (H_{M,0}^1)',$$

munis des normes¹

$$\|\varphi\|_{L_M^2}^2 = \int_B M \left| \frac{\varphi}{M} \right|^2, \quad \|\varphi\|_{H_M^1}^2 = \int_B M \left| \frac{\varphi}{M} \right|^2 + M \left| \nabla \left(\frac{\varphi}{M} \right) \right|^2 \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_{H_{M,0}^1}^2 = \int_B M \left| \nabla \left(\frac{\psi}{M} \right) \right|^2.$$

La formulation faible de l'équation (2.2) s'écrit alors : trouver $\psi \in H_{M,0}^1$ tel que pour tout $\varphi \in H_{M,0}^1$

$$\int_B M \nabla \left(\frac{\psi}{M} \right) \cdot \nabla \left(\frac{\varphi}{M} \right) - \int_B \psi \kappa \cdot \nabla \left(\frac{\varphi}{M} \right) = \langle f, \varphi \rangle_{H_M^{-1}, H_{M,0}^1}. \quad (2.3)$$

Étape 2 : lemmes sur les espaces à poids - Étant donnée la structure des espaces définis ci-dessus, de nombreux résultats de l'analyse classique ne sont plus immédiats. Nous indiquons ici les lemmes qui sont les plus utiles à la preuve de l'existence. Dans les énoncés, par soucis de simplicité, on supposera que toutes les hypothèses du théorème 2.3 sont satisfaites. Toutes les démonstrations sont détaillées dans [17].

Le premier lemme assure que les espaces L_M^2 et H_M^1 ont autant de "régularité" que leur analogue sans poids $L^2(B)$ et $H^1(B)$. Mieux, il indique que toutes les fonctions de H_M^1 ont une trace nulle au bord, ce qui permettra *a posteriori* d'en déduire que toute solution au problème (2.3) s'annule au bord.

Lemme 2.1 (Inclusions)

Si $\varphi \in L_M^2$ alors $\varphi \in \sqrt{M} L^2(B)$.

Si $\varphi \in H_M^1$ alors $\varphi \in \sqrt{M} H^1(B)$.

Le second lemme est un lemme de compacité qui est essentiel (à plusieurs reprises) dans l'approche utilisée pour la preuve du théorème 2.3. Contrairement au lemme précédent, sa démonstration est relativement simple puisqu'elle peut s'appuyer sur des résultats déjà démontrés pour les espaces $L^2(Mdx)$ et $H^1(Mdx)$, voir [Mét76].

Lemme 2.2 (Compacité)

L'injection $H_M^1 \hookrightarrow L_M^2$ est compacte.

Dans la même veine, le résultat suivant est utilisé dans le point clef de la preuve du théorème 2.3 (voir les éléments de preuve donnés par la suite). Par contre, son énoncé diffère du résultat bien connu pour les espaces de Sobolev classiques pour lesquels on sait que l'injection $H^1(B) \hookrightarrow L^p(B)$ est continue dès que $p \leq 2d/(d-2)$ lorsque $d > 2$ et $p < +\infty$ lorsque $d = 2$.

Lemme 2.3 (Injection de Sobolev)

Il existe $p > 2$ pour lequel l'injection $H_M^1 \hookrightarrow L_M^p$ est continue.

Enfin, nous énonçons un analogue du lemme de Poincaré qui permet entre autre d'assurer l'équivalence entre les normes $\|\cdot\|_{H_M^1}$ et $\|\cdot\|_{H_{M,0}^1}$ sur $H_{M,0}^1$. Comme le lemme de Poincaré "usuel" celui-ci est très utilisé dans la preuve du théorème 2.3.

Lemme 2.4 (Inégalité de Poincaré)

Pour tout $\varphi \in H_M^1$ on a l'inégalité suivante :

$$\|\varphi\|_{H_{M,0}^1}^2 + \left(\int_{\Omega} \varphi \right)^2 \gtrsim \|\varphi\|_{L_M^2}^2.$$

¹Le fait que $\|\cdot\|_{H_{M,0}^1}$ soit une norme n'est pas complètement immédiat, voir le lemme 2.4 ci-après.

Étape 3 : preuve de l'existence - construction d'un problème approché - Bien que l'opérateur $-\operatorname{div}(M\nabla(\frac{\cdot}{M}))$ soit coercif sur l'espace $H_{M,0}^1$, la première difficulté que l'on rencontre dans la preuve de l'existence d'une solution au problème (2.3) est que l'opérateur $-\operatorname{div}(M\nabla(\frac{\cdot}{M})) + \operatorname{div}(\kappa \cdot)$ n'est en général pas coercif. L'idée qu'on va utiliser ici reprend celle de J. Droniou [Dro02]. On commence par tronquer la partie non coercive en étudiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ le problème suivant :

$$-\operatorname{div}\left(M\nabla\left(\frac{\psi}{M}\right)\right) + \operatorname{div}\left(MT_n\left(\frac{\psi}{M}\right)\kappa\right) = f,$$

où $T_n : r \in \mathbb{R} \mapsto \max(\min(r, n), -n) \in \mathbb{R}$.

Dans un premier temps on montre que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une solution $\psi_n \in L_M^2$ à cette équation. Ce premier résultat découle directement du théorème de point fixe de Schauder appliqué à l'application F_n qui à $\tilde{\psi} \in L_M^2$ associe la solution $\psi \in H_M^1$ de l'équation

$$-\operatorname{div}\left(M\nabla\left(\frac{\psi}{M}\right)\right) = f - \operatorname{div}\left(MT_n\left(\frac{\tilde{\psi}}{M}\right)\kappa\right).$$

Il suffit juste de noter que cette application est continue de L_M^2 dans L_M^2 , qu'elle est bornée sur L_M^2 et d'utiliser que l'injection $H_M^1 \hookrightarrow L_M^2$ est compacte (voir le Lemme 2.2).

Étape 4 : preuve de l'existence - estimations - La fin de la preuve de l'existence consiste à obtenir des estimations sur ψ_n , indépendantes de n de façon à passer à la limite $n \rightarrow +\infty$. Le manque de coercivité ne permet pas d'obtenir d'estimations sur $\|\psi_n\|_{H_M^1}$ en utilisant directement ψ_n comme fonction test dans la formulation faible. Sans entrer dans les détails, l'idée est d'écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi_n = MS_k(\frac{\psi_n}{M}) + MT_k(\frac{\psi_n}{M})$ où S_k est définie par $S_k = \operatorname{id} - T_k$. Étant données les propriétés de T_k il est relativement simple d'avoir une estimation de $\|MT_k(\frac{\psi_n}{M})\|_{H_M^1}$ uniforme par rapport à n (moralement en utilisant $MT_k(\frac{\psi_n}{M})$ comme fonction test dans la formulation faible). La clef de la preuve est le contrôle de $\|MS_k(\frac{\psi_n}{M})\|_{H_M^1}$:

En choisissant $\varphi = MS_k(\frac{\psi_n}{M}) - M \int_{\Omega} MS_k(\frac{\psi_n}{M})$ comme fonction test on obtient

$$\underbrace{\int_{\Omega} M\nabla\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \cdot \nabla\left(S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right)\right)}_A - \underbrace{\int_{\Omega} MT_n\left(\frac{\psi_n}{M}\right)\kappa \cdot \nabla\left(S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right)\right)}_B = \underbrace{\langle f, \varphi \rangle}_C \quad (2.4)$$

• En utilisant les propriétés de S_k , le terme A s'écrit

$$A = \int_{\Omega} M \left| \nabla\left(S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right)\right) \right|^2 = \left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{H_{M,0}^1}^2. \quad (2.5)$$

• Pour tout $r \in \mathbb{R}$ on a $|T_n(r)| \leq |r|$. On majore alors le second terme B de la façon suivante :

$$|B| \leq \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{\int_{\Omega} \frac{|\psi_n|^2}{M}} \sqrt{\int_{\Omega} M \left| \nabla\left(S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right)\right) \right|^2}.$$

De plus, $|\frac{\psi_n}{M}| = |T_k(\frac{\psi_n}{M}) + S_k(\frac{\psi_n}{M})| \leq k + |S_k(\frac{\psi_n}{M})|$ donc $|\frac{\psi_n}{\sqrt{M}}| \leq k\sqrt{M} + \sqrt{M}|S_k(\frac{\psi_n}{M})|$. On en déduit

$$\sqrt{\int_{\Omega} \frac{|\psi_n|^2}{M}} \leq \sqrt{\int_{\Omega} k^2 M} + \sqrt{\int_{\Omega} M \left| S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right|^2} = k + \left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{L_M^2}.$$

Puisque $S_k(r) = 0$ pour $|r| < k$, on estime le dernier terme par

$$\left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{L_M^2} = \sqrt{\int_{\Omega} M \left| S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right|^2} = \sqrt{\int_{\mathcal{E}_k} M \left| S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right|^2},$$

où on a défini l'ensemble \mathcal{E}_k par $\mathcal{E}_k = \{\mathbf{Q} \in \Omega ; |\psi_n(\mathbf{Q})| \geq kM(\mathbf{Q})\}$. L'inégalité de Hölder puis l'injection $H_M^1 \subset L_M^p$ (voir le Lemme 2.3) indique qu'il existe $p > 1$ (on note q le conjugué de p) tel que

$$\left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{L_M^2} \leq \left(\int_{\mathcal{E}_k} M \right)^{1/2q} \left(\int_{\mathcal{E}_k} M \left| S_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right|^{2p} \right)^{1/2p} \lesssim \left(\int_{\mathcal{E}_k} M \right)^{1/2q} \left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{H_{M,0}^1}.$$

Le terme B est donc estimé par

$$|B| \leq \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \left(k + \mathcal{A}(k) \left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{H_{M,0}^1} \right) \left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{H_{M,0}^1}, \quad (2.6)$$

où $\mathcal{A}(k) = \left(\int_{\mathcal{E}_k} M \right)^{1/2q}$.

• Puisque $f \in H_M^{-1}$, le dernier terme de l'équation (2.4) est facilement contrôlé de la façon suivante :

$$|C| = |\langle f, \varphi \rangle| \lesssim \|\varphi\|_{H_{M,0}^1} \lesssim \left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{H_{M,0}^1}. \quad (2.7)$$

Les trois estimations (2.5), (2.6) et (2.7) permettent de déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{H_{M,0}^1} \lesssim \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \left(k + \mathcal{A}(k) \left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{H_{M,0}^1} \right) + 1.$$

On peut montrer, voir [17], que $\mathcal{A}(k)$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Il est donc possible d'obtenir, pour k suffisamment grand, l'inégalité

$$\left\| MS_k \left(\frac{\psi_n}{M} \right) \right\|_{H_{M,0}^1} \lesssim 1. \quad (2.8)$$

Les majorations de $MS_k(\frac{\psi_n}{M})$ et $MT_k(\frac{\psi_n}{M})$ en norme $H_{M,0}^1$ permettent d'affirmer que la suite $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_{M,0}^1$. Des résultats classiques permettent d'en conclure que cette suite $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite qui est une solution au problème (2.3).

Étape 5 : preuve de l'unicité - La preuve de l'unicité est assez classique. Comme pour celle de l'existence, elle reprend les grandes lignes des travaux de J. Droniou [Dro02]. Dans un premier temps, on introduit le problème dual. On montre ensuite par la méthode de degré topologique de Schauder que ce problème dual admet une solution. Enfin, en utilisant à la fois l'existence d'une solution au problème initial et à son problème dual, on en déduit qu'il ne peut exister qu'une seule solution à ces deux problèmes.

Nous ne détaillons pas ici les éléments de preuve et renvoyons le lecteur à l'article [17]. Voici à titre d'information le problème dual pour lequel on a aussi obtenu un résultat d'existence et d'unicité :

$$-\operatorname{div} \left(M \nabla \left(\frac{\phi}{M} \right) \right) - M \kappa \cdot \nabla \left(\frac{\phi}{M} \right) = g.$$

2.2 Le modèle FENE en film mince

L'objectif de ce qui est présenté dans [15] et de ce que nous résumons dans cette partie est de déterminer un équation approchée de la loi comportementale FENE lorsque le domaine est mince. C'est-à-dire dans un premier temps de montrer que pour chaque champ de vitesses \mathbf{u} et pour deux champs de tenseurs κ et $\bar{\kappa}$ (assez réguliers) il existe une solution ψ à l'équation

$$De \varepsilon (\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi) = -\operatorname{div}_{\mathbf{Q}} (De (\kappa + \varepsilon \bar{\kappa}) \cdot \mathbf{Q} \psi) + \Delta_{\mathbf{Q}} \psi + \operatorname{div}_{\mathbf{Q}} (\mathbf{E} \psi), \quad (2.9)$$

puis dans un second temps de passer à la limite dans cette équation lorsque ε (qui représente le rapport entre la hauteur et la largeur du domaine) tend vers 0.

• **Interprétation physique** - L'équation (2.9) correspond à l'équation (9), décrivant la distribution de ressorts dans le modèle FENE, mise sous forme adimensionnée. L'adimensionnement est habituel pour ce type de problème à ceci près qu'il fait intervenir deux longueurs caractéristiques : une pour la hauteur du domaine (supposée petite) et une autre pour la largeur du domaine. Le paramètre $\varepsilon \ll 1$ correspond au rapport de ces deux longueurs. Les tenseurs $\boldsymbol{\kappa}$ et $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ sont liés à la décomposition de $\nabla \mathbf{u}$ en puissance de ε :

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{pmatrix} \partial_x u & 0 \\ \varepsilon \partial_x w & \partial_z w \end{pmatrix}.$$

Quant à la force \mathbf{E} , elle est, pour le modèle FENE, donnée explicitement sous forme adimensionnée par

$$\mathbf{E}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{Q}}{1 - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{\ell^2}}.$$

• **Approche mathématique** - D'un point de vue mathématique, de nombreux auteurs se sont intéressés au système couplé entre les équations de Navier-Stokes et le modèle FENE (c'est-à-dire au modèle complet de fluide de type FENE), voir [BSS05, JLLB04, LZZ04, LM07, Mas08, Ren91]. Leurs études se font dans le cas évolutif et la principale difficulté (hormis la difficulté classique liée aux équations de Navier-Stokes) concerne le manque d'estimation *a priori* sur la contrainte. Néanmoins, les résultats sont riches et transitent généralement par l'étude de l'équation (2.9). Il est en particulier bien connu que pour \mathbf{u} fixé suffisamment réguliers (donc pour $\boldsymbol{\kappa}$ et $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ donnés et réguliers) et pour $\mathcal{D}e$, ε et ϱ trois réels positifs fixés, l'équation (2.9) admet une unique solution ψ telle que $\int_B \psi(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \varrho$.

Il existe des cas particuliers où l'on sait résoudre l'équation (2.9), par exemple pour des champs de vitesses \mathbf{u} particuliers, voir [15, JLLB04]. Ainsi, dans [BHAC77], les auteurs se sont intéressés à un développement de la solution ψ en puissance de $\mathcal{D}e$. Ce comportement a été récemment retrouvé en utilisant des techniques de type Chapman-Enskog par P. Degond, M. Lemou et M. Picasso, voir [DLP02].

• **En domaines minces** -. Comme expliqué précédemment, pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation (2.9) admet une unique solution ψ^ε telle que $\int_B \psi^\varepsilon(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \varrho$. Formellement, lorsque ε tend vers 0, l'équation (2.9) devient

$$0 = -\operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{D}e \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{Q} \psi) + \Delta_{\mathbf{Q}} \psi + \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{E} \psi). \quad (2.10)$$

Cette équation est une équation de Fokker-Planck qui correspond à celle étudiée dans la section précédente (avec $\mathbf{F} = \mathcal{D}e \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{E}$). Elle admet donc une unique solution ψ^0 telle que $\int_B \psi^0(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \varrho$.

Le point essentiel est donc de démontrer que ψ^ε converge effectivement vers ψ^0 lorsque ε tend vers 0. Le résultat suivant est prouvé dans [15].

Théorème 2.4

Soient $\boldsymbol{\kappa} \in W^{1,\infty}(\Omega) \otimes L^\infty(B)$, $\bar{\boldsymbol{\kappa}} \in \mathcal{C}(0, +\infty; W^{1,\infty}(\Omega) \otimes L^\infty(B))$, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(0, +\infty; W^{2,\infty}(\Omega))$ et $\psi_{init} \in W^{1,\infty}(\Omega) \otimes L_M^2$.

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on note $\psi^\varepsilon \in \mathcal{C}(0, +\infty; W^{1,\infty}(\Omega) \otimes L_M^2) \cap L_{loc}^2(0, +\infty; W^{1,\infty}(\Omega) \otimes H_M^1)$ la solution de l'équation (2.9). On note $\psi^0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \otimes H_M^1$ la solution de l'équation (2.10).

Alors il existe deux fonctions $\widetilde{\psi}^0$ dans $\mathcal{C}(0, +\infty; W^{1,\infty}(\Omega) \otimes L_M^2) \cap L_{loc}^2(0, +\infty; W^{1,\infty}(\Omega) \otimes H_M^1)$ et Ψ dans $\mathcal{C}(0, +\infty; L^\infty(\Omega) \otimes L_M^2) \cap L_{loc}^2(0, +\infty; L^\infty(\Omega) \otimes H_M^1)$ telles que

$$\psi^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = \psi^0(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) + \widetilde{\psi}^0\left(\frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x}, \mathbf{Q}\right) + \varepsilon \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{Q}).$$

Dans cette égalité, la fonction $\widetilde{\psi}^0$ décrit l'effet d'une couche limite en temps. Pour des petites valeurs de $\boldsymbol{\kappa}$, on a $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \widetilde{\psi}^0(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = 0$ (avec une décroissance exponentielle, ce qui est illustré par la figure 2.1). De plus, si $\psi_{init} = \psi^0$ alors $\widetilde{\psi}^0 = 0$.

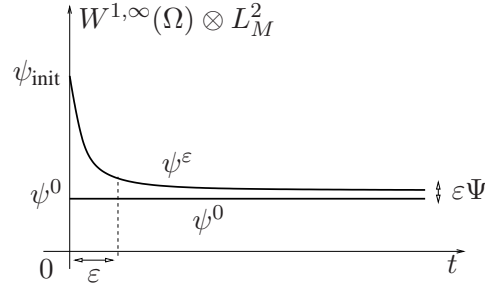


FIG. 2.1: Illustration du théorème 2.4.

• **Idées de preuve** - La preuve de ce théorème est relativement classique. Elle se décompose en trois parties.

Étape 1 : proposition d'un Ansatz - La première consiste à proposer un ansatz

$$\psi^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = \psi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x}, \mathbf{Q}\right) + \varepsilon\psi_1\left(\frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x}, \mathbf{Q}\right) + \varepsilon^2\psi_2\left(\frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x}, \mathbf{Q}\right) + \dots$$

Habituellement, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on sépare les variations rapides des variations lentes en temps de la manière suivante :

$$\psi_k(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = \bar{\psi}_k(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) + \tilde{\psi}_k(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{Q}),$$

où $\bar{\psi}_k(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \psi_k(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{Q})$ et $\tilde{\psi}_k$ est cherché à décroissance rapide en τ .

En injectant ce développement dans l'équation (2.9) puis en identifiant les puissances de ε , on en déduit des équations pour chaque profil.

Étape 2 : existence des profils - La seconde étape permet de justifier que les équations des profils sont toutes bien posées. Bien entendu, l'équation du profil $\bar{\psi}_0$ correspond à l'équation (2.10) pour laquelle le résultat d'existence et d'unicité a été démontré dans la section précédente. De même, l'équation vérifiée par $\tilde{\psi}_0$ correspond à l'équation (2.9) pour laquelle on connaît aussi un résultat d'existence et d'unicité. En pratique, tous les profils suivants satisfont les mêmes types d'équation, avec des termes sources issus des profils précédents. On sait montrer qu'ils sont tous bien posés.

Étape 3 : estimation du reste - La dernière étape consiste à, après avoir tronqué le développement formel, montrer que le reste (noté Ψ dans l'énoncé du théorème 2.4) est borné dans un espace adéquat. Là aussi, l'équation vérifiée par le reste Ψ est du même type que l'équation (2.9) et on sait montrer qu'il est borné.

Pour conclure, notons juste que le dernier point du théorème indique que le profil $\tilde{\psi}^0$ doit vérifier, à condition que κ soit assez petit, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tilde{\psi}^0(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = 0$ (avec une décroissance exponentielle). Ceci est important pour vraiment pouvoir dire que ψ^ε converge vers ψ^0 . Ce résultat provient d'une estimation d'énergie sur les solutions de l'équation de la forme

$$\mathcal{D}e(\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi) = -\operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{D}e \kappa \cdot \mathbf{Q} \psi) + \Delta_{\mathbf{Q}} \psi + \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{E} \psi),$$

obtenue en testant cette équation contre ψ :

$$\frac{d}{dt}(\|\psi\|_{L_M^2}^2) + \left(\frac{1}{2\mathcal{D}e} - 2\mathcal{D}e \|\kappa\|_\infty^2\right) \|\psi\|_{L_M^2}^2 \leq \frac{\varrho_0^2}{2\mathcal{D}e}.$$

2.3 Résultats numériques

Quelques illustrations numériques² permettent de mieux comprendre le rôle de la quantité ψ , solution de l'équation (2.9), dans la description des écoulements micro-macros. Mathématiquement, ψ correspond à une densité de probabilité sur la boule de \mathbb{R}^2 de centre $\mathbf{0}$ et de rayon ℓ . Physiquement, $\psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{Q})$ donne la probabilité que les extrémités d'un ressort microscopique, situé en position \mathbf{x} à l'instant t soient $\mathbf{0}$ et \mathbf{Q} . Le choix de la longueur ℓ correspond ainsi à la longueur maximale du ressort.

Dans l'article [17], j'ai présenté quelques résultats numériques concernant l'équation de Fokker-Planck (2.9) dans un cas physique réaliste : l'écoulement est supposé laminaire, c'est-à-dire que le champ de vitesse \mathbf{u} est de la forme $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (\dot{\gamma} x_2, 0)$, $\dot{\gamma} \in \mathbb{R}$. La distribution ψ satisfait donc l'équation

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\psi \mathbf{F}) = 0 \quad \text{sur } B(0, \ell),$$

où le champ de vecteurs \mathbf{F} est donné par

$$\mathbf{F} : \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \in B(0, \ell) \mapsto 2De\dot{\gamma} \begin{pmatrix} Q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - \frac{|\mathbf{Q}|^2}{\ell^2}} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}.$$

D'après les résultats théoriques de la partie 2.1, l'unicité de la solution est assurée dès qu'on se donne la moyenne $\int_{\Omega} \varphi$ (qui correspond physiquement à une densité de polymères ϱ).

Les premiers résultats présentés correspondent au cas sans cisaillement, c'est-à-dire lorsque $\dot{\gamma} = 0$, mais pour différentes valeurs de ℓ (on notera que les grandeurs physiques réalistes pour ℓ sont de l'ordre de 10), voir la figure 2.2.

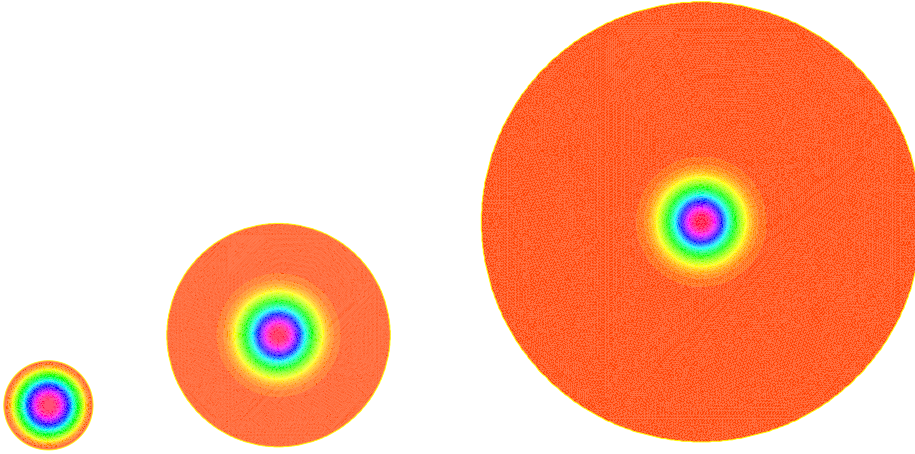


FIG. 2.2: Solution ψ sans cisaillement pour différentes longueurs maximales de ressorts. De gauche à droite pour les valeurs : $\ell = 2$, $\ell = 5$ et $\ell = 10$.

Pour observer l'effet du cisaillement sur la distribution, nous avons ensuite tracé les solutions ψ pour différentes valeurs de $\dot{\gamma}$ (et pour $De = 10$ et $\ell = 5$). Les résultats sont décrits par la figure 2.3 : plus le cisaillement est fort, plus les ressort ont tendance à s'aligner avec l'écoulement.

² Pour toutes les simulations proposées ici, j'ai utilisé le programme FreeFem++, voir <http://www.freefem.org/ff++>.

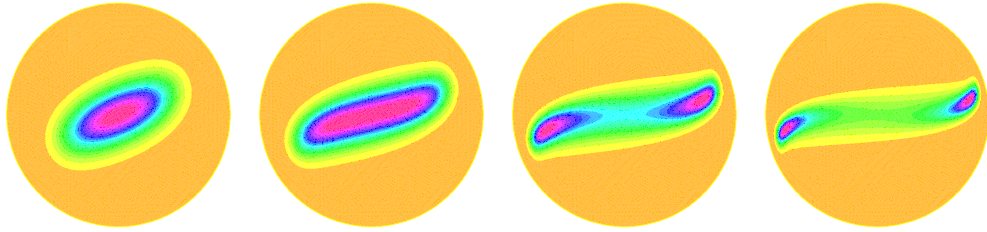


FIG. 2.3: Influence du cisaillement sur la distribution des ressorts. De gauche à droite on a imposé des cisaillements de plus en plus grand : $\dot{\gamma} = 0.1$, $\dot{\gamma} = 0.2$, $\dot{\gamma} = 0.5$ et $\dot{\gamma} = 1$.

Enfin, on pourra noter qu'il existe des modèles plus complexes encore que le modèle FENE pour lesquels l'étude théorique de la partie 2.1 pourrait s'avérer utile. Il s'agit par exemple des modèles multi-ressorts (voir [GMB01]) qui permettent de décrire chaque molécule d'un polymère non pas à l'aide d'un seul ressort comme pour le modèle FENE mais à l'aide de plusieurs ressorts mis bout à bout, voir la figure 2.4. L'approche physique de telles considérations conduit à un système de type Fokker-Planck pour lequel l'étude précédente semble s'adapter.

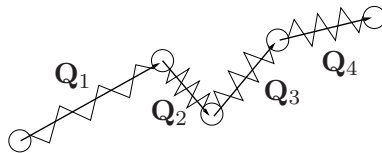


FIG. 2.4: Modélisation d'une molécule de polymère à l'aide d'une approche multi-ressorts.

Chapitre 3

Phénomènes de rugosité dans des films minces

Ce chapitre est composé de deux principales parties, correspondant respectivement aux références [18] et [10]. Dans ces références on étudie l'effet de l'irrégularité des parois sur un écoulement en film mince. D'un point de vue physique, ces irrégularités sont généralement le fruit de l'usinage des pièces et sont souvent non négligeables dans des phénomènes de lubrification. De telles rugosités sont habituellement modélisées en définissant les bords du domaine fluide à l'aide de fonctions périodiques qui oscillent rapidement.

Les deux parties de ce chapitre montrent que la façon dont on présente le problème est prépondérante et que des conclusions rapides pourraient se montrer hasardeuses : soit les rugosités seront vues comme des perturbations par rapport à l'écoulement sans rugosités (partie 3.1), soit ces mêmes rugosités seront en un certain sens prépondérantes (partie 3.2).

D'un point de vue mathématique, les deux approches sont rigoureusement prouvées (en utilisant des méthodes type correcteur en ce qui concerne la première approche, et en utilisant des méthodes de convergence double échelle et d'homogénéisation pour la seconde approche). Les conclusions dépendent en fait des normes que l'on considère pour dire qu'un écoulement est proche d'un autre...

3.1 Les rugosités vues comme une perturbation

La littérature mathématique concernant les problèmes de rugosité en mécanique des fluides s'est très enrichie ces dernières années, voir par exemple [BGV08, BM08a, BM08b, GV09, JM01, JM03]. Dans ces travaux les auteurs voient les rugosités d'ordre $\varepsilon \ll 1$ comme une perturbation d'un écoulement dans un domaine d'ordre 1. Avec Sébastien Martin, nous avons suivi leur approche dans le cas d'une étude en domaine mince. Plus exactement, nous nous sommes intéressés au cas d'écoulements dans des domaines minces (d'épaisseur ε) dont la paroi inférieure est rugueuse (avec des rugosités périodiques, de fréquence et d'amplitude d'ordre ε^2). Le domaine sur lequel sont posées les équations est le suivant¹ :

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad -\varepsilon^2 h^- \left(\frac{x}{\varepsilon^2} \right) < y < \varepsilon h^+(x) \right\},$$

où h^+ et h^- sont deux fonctions régulières (par exemple lipschitziennes) de \mathbb{T} dans $]0, 1[$.

Les équations de Stokes que nous considérons ici couplent le champ des vitesses $\mathbf{u}^\varepsilon = (u^\varepsilon, w^\varepsilon)$ et le champ

¹En toute rigueur, puisque la frontière inférieure du domaine est en mouvement (de translation horizontale à la vitesse s) et que les conditions aux limites en vitesse seront des conditions d'adhérence, le domaine où "vit" le fluide dépend du temps. Moralement, quitte à poser $x - st$ en lieu et place de x , les résultats sont similaires, voir [18].

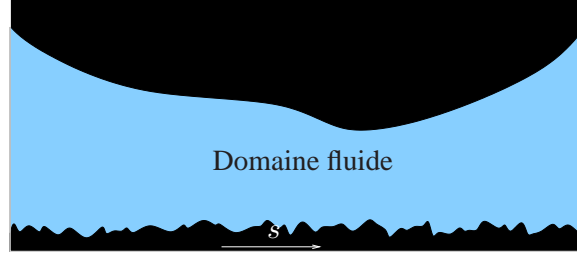


FIG. 3.1: Domaine mince et rugueux.

de pression p^ε :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^\varepsilon, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0 & \text{sur } \Omega^\varepsilon, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{z=-\varepsilon^2 h^-(\frac{x}{\varepsilon^2})} = (s, 0) & \text{et } \mathbf{u}^\varepsilon|_{z=\varepsilon h^+(x)} = (0, 0). \end{cases} \quad (3.1)$$

Comme indiqué dans l'introduction de ce mémoire, il est bien connu (voir [BC86] ou plus récemment [Wil09]) que la solution de ce système de Stokes dans un domaine mince *avec un fond plat* : $h^- = 0$ est approchée à l'aide de la solution de l'équation de Reynolds. Plus précisément, sous l'hypothèse de film mince, l'écoulement est gouverné par

$$u^+(x, y) = u_0\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad w^+(x, y) = \varepsilon w_0\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \text{et} \quad p^+(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^2} p_0(x) + \mathcal{O}(1),$$

où p_0 est la solution de l'équation de Reynolds (voir l'introduction page 12 et l'équation (15)); u_0 et w_0 étant explicitement données en fonction de p_0 à partir des équations (14).

La question naturelle est de savoir ce qu'il advient d'un tel développement lorsqu'on prend en compte des effets de rugosité.

3.1.1 Proposition de développement formel

L'idée principale est de voir le cas "rugueux" comme une perturbation du cas "fond plat". Il est alors naturel de décomposer le domaine Ω_ε de la façon suivante : $\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^- \cup \Sigma \cup \Omega_\varepsilon^+$ où

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon^- &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad -\varepsilon^2 h^-\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) < y < 0 \right\}, \\ \Sigma &= \mathbb{T} \times \{0\} \quad \text{et} \\ \Omega_\varepsilon^+ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad 0 < y < \varepsilon h^+(x) \right\}. \end{aligned}$$

Moralement, si (u_0, w_0, p_0) correspond au cas sans rugosités, défini dans Ω_ε^+ , la première idée est de prolonger cette solution dans Ω_ε^- . Pour satisfaire la condition de continuité de la contrainte dans le fluide, le prolongement de la vitesse doit être de classe \mathcal{C}^1 . Ainsi, si u_0 vaut s sur le bord Σ de Ω_ε^+ , cette propriété n'est plus satisfaite sur le bord $y = -\varepsilon^2 h^-(x/\varepsilon^2)$ de Ω_ε^- . On doit rajouter à u_0 un correcteur $\varepsilon \tilde{u}_1$ qui aura pour rôle de contrebalancer cette valeur au bord². On s'aperçoit que $\varepsilon \tilde{u}_1$ (qui est pertinent près du bord) induit une perturbation d'ordre ε sur l'autre bord du domaine physique $y = \varepsilon h^+(x)$. Cette dernière est alors corrigée par εu_1 qui satisfait une équation de type Reynolds, etc.

²Certains auteurs choisissent de prolonger u_0 par la constante s dans le domaine rugueux Ω_ε^- . Dans ce cas le correcteur $\varepsilon \tilde{u}_1$ a pour rôle de contrebalancer le saut de contrainte induit sur Σ .

Plus précisément, pour capturer les différents effets d'échelle, on introduit des coordonnées adaptées :

$$Z = \frac{y}{\varepsilon}, \quad X = \frac{x}{\varepsilon^2}, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon^2}.$$

L'écoulement est principalement gouverné par un écoulement de type Reynolds dans le domaine Ω_ε^+ . Cet écoulement sera décrit par les variables (x, Z) dans le domaine Ω_ε^+ remis à l'échelle :

$$\Omega^R = \left\{ (x, Z) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad 0 < Z < h^+(x) \right\}.$$

En présence de rugosités, les variables (X, Y) permettent de décrire l'écoulement dans la couche limite Ω_ε^- qui, remis à l'échelle, s'écrit

$$\Omega^{bl} = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad -h^-(X) < Y \right\}.$$

On cherche ensuite une solution (u, w, p) aux équations de Stokes (3.1) sous la forme

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(\sum_{j=0}^N \varepsilon^{2j} u_{2j}(x, Z) + \varepsilon^{2j+1} \left(\tilde{u}_{2j+1}(x, X, Y) + u_{2j+1}(x, Z) \right) \right) + \varepsilon^{2N-1} \mathcal{R}(x, y), \\ w(x, y) &= \varepsilon \left(\sum_{j=0}^N \varepsilon^{2j} w_{2j}(x, Z) + \varepsilon^{2j} \left(\tilde{w}_{2j+1}(x, X, Y) + \varepsilon w_{2j+1}(x, Z) \right) \right) + \varepsilon^{2N-1} \mathcal{S}(x, y), \\ p(x, y) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\sum_{j=0}^N \varepsilon^{2j} p_{2j}(x, Z) + \varepsilon^{2j+1} \left(\tilde{p}_{2j+1}(x, X, Y) + p_{2j+1}(x, Z) \right) \right) + \varepsilon^{2N-1} \mathcal{Q}(x, y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

On injecte ensuite ces développements dans les équations de Stokes (3.1) et on regroupe les termes par puissance de ε . On en déduit ainsi des systèmes pour les fonctions $u_{2j}, \tilde{u}_{2j+1}, u_{2j+1}, \dots$

3.1.2 Justification du développement formel

Problèmes bien posés

La première étape dans la justification du développement (3.2) est de montrer que chaque terme du développement existe. Sans entrer dans les détails, les termes (u_{2j}, w_{2j}, p_{2j}) et $(u_{2j+1}, w_{2j+1}, p_{2j+1})$ sont les solutions de problèmes de type Reynolds et l'existence de ces termes est immédiate. De même, les termes $(\tilde{u}_{2j+1}, \tilde{w}_{2j+1}, \tilde{p}_{2j+1})$ sont les solutions de problèmes de Stokes dont on sait qu'ils sont bien posés.

Remarque 3.1

Il faut noter qu'un point essentiel dans la construction de l'ansatz (3.2) consiste à déterminer le comportement des correcteurs $(\tilde{u}_{2j+1}, \tilde{w}_{2j+1}, \tilde{p}_{2j+1})$ lorsque Y tend vers $+\infty$. En effet, c'est cette limite qui doit être contrebalancée par le correcteur $(u_{2j+1}, w_{2j+1}, p_{2j+1})$. Puisque les correcteurs $(\tilde{u}_{2j+1}, \tilde{w}_{2j+1}, \tilde{p}_{2j+1})$ vérifient un problème de Stokes linéaire, dans un domaine Ω^{bl} qui est périodique en X , on obtient le comportement des solutions lorsque Y tend vers $+\infty$ en utilisant un développement en série de Fourier en X .

Borne uniforme sur les restes

La dernière étape de la justification du développement formel (3.2) est de montrer que les "restes" $(\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q})$ sont effectivement des restes au sens où ils tendent vers zéro lorsque ε tend vers 0. En pratique, le triplet $(\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q})$ est la solution d'un problème de Stokes dont les termes sources dépendent de ε et des derniers correcteurs $\tilde{u}_{2N+1}, u_{2N+1}, \dots$. Le contrôle des restes correspond donc à des estimations classiques (voir par exemple [BF06]) des solutions d'un problème de Stokes.

Interprétation

Les résultats précédents indiquent que, quitte à choisir N assez grand (ce qui est légitime si les données comme par exemple la hauteur h sont suffisamment régulières), la solution (u, w, p) du problème de Stokes (3.1) peut être approchée par les premiers termes des sommes introduites dans l'ansatz (3.2). Notons qu'il reste une difficulté essentielle : celle de comparer par exemple la vitesse $u(x, y)$ définie pour $(x, y) \in \Omega^\varepsilon$ et les vitesses $u_0(x, Z)$ ou $\tilde{u}_1(x, X, Y)$ définie tantôt dans le domaine Ω^R tantôt dans le domaine $\mathbb{T} \times \Omega^{bl}$, voir [18].

3.2 Effet des rugosités à l'ordre principal

Dans cette partie, issue de travaux en collaboration avec Didier Bresch, Catherine Choquet, Thierry Colin et Marguerite Gisclon, on met en évidence que des rugosités mêmes petites peuvent avoir un effet à l'ordre principal. Plus exactement, on montre que dans un domaine mince (rapport d'aspect d'ordre ε) et rugueux (rugosités d'ordre ε^2) on peut approcher les équations de Stokes par une équation de Reynolds modifiée. La modification est explicitement donnée en fonction des rugosités. Précisément, on obtient, lorsque les conditions aux limites sont homogènes, la relation $p_{\text{rugueux}} = K p_{\text{lisse}}$ où p_{rugueux} et p_{lisse} sont respectivement les pressions obtenues dans le cas rugueux et dans le cas lisse, et où $K \geq 1$ est un coefficient dépendant de la forme des rugosités. En un certain sens, ceci indique que l'écoulement est accéléré par les rugosités. Le système limite est mathématiquement justifié grâce à des méthodes de type convergence double échelle.

Ce type de résultat peut paraître paradoxal au vu des résultats de la partie précédente. En fait, les deux approches sont totalement différentes au sens où les normes utilisées ne sont pas les mêmes : dans la première approche, on sépare les effets dus aux rugosités et ceux dus à la faible épaisseur du domaine alors que dans cette partie, les rugosités sont "rentrées" dans le domaine.

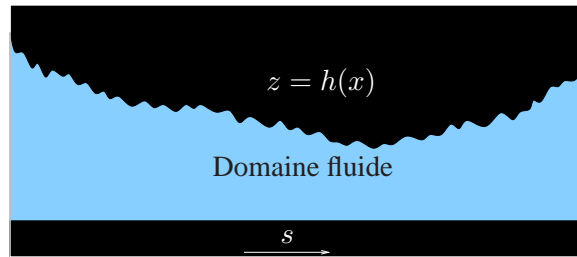


FIG. 3.2: Domaine mince et rugueux.

Plus généralement, le problème comporte deux petites échelles : celle liée au domaine mince et celle liée aux rugosités. Il est important de savoir quel est le lien entre ces échelles pour pouvoir mener une étude complète (si les deux échelles sont découplées, le résultat dépend du choix de l'ordre dans le passage à la limite). Dans [BC88, BC89, Dys77, Elr77] les deux échelles sont supposées égales et la hauteur du domaine est de la forme $h^\varepsilon(x) = \varepsilon h(x, \frac{x}{\varepsilon})$. Dans [BCC05] les rugosités sont supposées plus "lentes". La hauteur est de la forme $h^\varepsilon(x) = \varepsilon h(x, \frac{x}{\varepsilon^\alpha})$ avec $\alpha < 1$. Nous nous intéressons ici au cas suivant :

$$h^\varepsilon(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right).$$

Le domaine Ω dépend de ε et est alors défini par

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad 0 < z < h^\varepsilon(x)\}.$$

Comme dans l'étude de la partie précédente, les équations de Stokes que nous considérons ici couple le champ des vitesses $\mathbf{u}^\varepsilon = (u^\varepsilon, w^\varepsilon)$ et le champ de pression p^ε :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^\varepsilon, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0 & \text{sur } \Omega^\varepsilon, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{z=0} = (s, 0) & \text{et } \mathbf{u}^\varepsilon|_{z=h^\varepsilon} = (0, 0). \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.1 Description formelle

Dans un premier temps, on sépare la variable lente x de la variable rapide d'oscillation $X = x/\varepsilon^2$ en posant $h(x, X) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(X)$. Afin de faire porter toute la dépendance en ε sur l'équation (et de travailler dans un domaine fixe) on effectue le changement de variable $Z = \frac{z}{h(x, X)}$. On écrit ensuite les équations équivalentes à (3.3) dans les variables (x, X, Z) sur le domaine

$$\Omega = \{(x, X, Z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < Z < 1\}.$$

Ensuite, on s'inspire du cas sans rugosité en injectant le développement suivant :

$$u^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad w^\varepsilon = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \quad \text{et} \quad p^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} p_0 + \frac{1}{\varepsilon} p_1 + p_2 + \dots$$

dans les équations obtenues. Par soucis de simplicité, nous n'écrirons pas les équations et renvoyons le lecteur intéressé à [10].

Enfin, on identifie les termes d'ordre équivalent en puissance de ε dans chaque équation. Les premières équations, c'est-à-dire pour les ordres en ε^{-2} et ε^{-1} dans (3.3), impliquent que u_0 , w_0 et p_0 ne dépendent pas de la variable rapide X . L'ordre suivant permet de montrer entre autre que p_0 ne dépend pas de Z et que w_1 ne dépend pas de X . Après quelques tours de passe-passe algébriques, on obtient le système fermé suivant :

$$\begin{cases} -\partial_{ZZ}^2 u_0 + h_1^2 \partial_x p_0 + MZ \partial_Z u_0 = 0, \\ \partial_Z p_0 = 0, \\ \partial_x (h_1 u_0) + \partial_Z (w_1 - Z \partial_x h_1 \cdot u_0) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

où $M = \int_{\mathbb{T}} |h_2'(X)|^2 dX$.

Exactement comme pour obtenir l'équation de Reynolds classique (voir l'introduction et plus particulièrement la page 11), on intègre deux fois la première équation par rapport à la variable Z . On utilise les conditions au bord $u_0|_{Z=0} = s$ et $u_0|_{Z=1} = 0$ pour avoir une expression de u_0 en fonction de p_0 :

$$u_0(x, Z) = \left(\int_0^Z \int_0^s e^{M(s^2-t^2)/2} dt ds - \int_0^1 \int_0^s e^{M(s^2-t^2)/2} dt ds \frac{\int_0^Z e^{Ms^2/2} ds}{\int_0^1 e^{Ms^2/2} ds} \right) h_1(x)^2 \partial_x p_0(x) + \left(1 - \frac{\int_0^Z e^{Ms^2/2} ds}{\int_0^1 e^{Ms^2/2} ds} \right) s.$$

Étant donnée la forme conservative de la dernière équation du système (3.4), on a $\partial_x \left(\int_0^1 h_1 u_0 dZ \right) = 0$, ce qui permet d'en déduire l'équation de Reynolds généralisée suivante :

$$\partial_x \left(\frac{h_1^3}{12} \partial_x p_0 \right) = \partial_x \left(\frac{h_1}{2} K s \right)$$

où K peut s'exprimer directement à l'aide de M . La formule explicite est donnée dans [10], on notera toutefois que son développement limité pour M petit est le suivant :

$$K = 1 + \frac{M}{30} + \mathcal{O}(M^2).$$

3.2.2 Justification mathématique

La justification théorique de ce qui a été présenté de façon formelle ci-dessus peut être effectuée en utilisant un procédé d'homogénéisation et une variante de la convergence double échelle.

Définition 3.1

Soit $\Omega = \omega \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$. On dit qu'une suite $(v_\varepsilon(x, Z))_{\varepsilon>0}$ de fonctions de $L^2(\Omega)$ converge double échelle vers une limite $v_0(x, Z, X)$ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{T}^{d-1})$ et on note $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$, si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x, Z) \Psi(x, Z, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx dZ = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} v_0(x, Z, X) \Psi(x, Z, X) dX dx dZ,$$

pour toute fonction test $\Psi(x, Z, X)$ périodique en la troisième variable et satisfaisant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\Psi(x, Z, \frac{x}{\varepsilon^2})|^2 dx dZ = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} |\Psi(x, Z, X)|^2 dX dx dZ.$$

Dans cette définition, la variable Z joue le rôle d'un paramètre. Les propriétés essentielles que nous avons utilisées sont les suivantes (les trois premières sont classiques, voir par exemple [All92], la dernière est une conséquence immédiate des précédentes).

Lemme 3.1

- De toute suite (v^ε) bornée dans $L^2(\Omega)$ on peut extraire une sous suite qui converge double échelle vers une limite $v^0 \in L^2(\Omega \times \mathbb{T}^{d-1})$. De plus, $\int_{\mathbb{T}^{d-1}} v^0(x, Z, X) dX$ correspond à la limite faible de la suite (v^ε) dans $L^2(\Omega)$.
- Si (v^ε) est une suite bornée dans $L^2(0, 1; H^1(\omega))$ qui converge faiblement vers v dans $L^2(0, 1; H^1(\omega))$ alors elle converge aussi double échelle vers v et il existe une fonction $v^1 \in L^2(\Omega; H^1(\mathbb{T}^{d-1}))$ telle que $\nabla_x v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_x v(x, Z) + \nabla_X v^1(x, Z, X)$.
- Si (v^ε) est une suite bornée dans $L^2(\Omega)$ telle que $(\varepsilon^2 \nabla_x v^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ alors il existe une fonction $v^0 \in L^2(\Omega; H^1(\mathbb{T}^{d-1}))$ telle que $v^\varepsilon \xrightarrow{2} v^0$ et $\varepsilon^2 \nabla_x v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_X v^0(x, Z, X)$.
- Si (v^ε) est une suite bornée dans $L^2(\Omega)$ telle que $(\varepsilon \nabla_x v^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ alors sa limite double échelle $v^0 \in L^2(\Omega; H^1(\mathbb{T}^{d-1}))$ satisfait $\nabla_X v^0 = 0$.

Le théorème obtenu dans [10] est le suivant :

Théorème 3.1

Soit $(u^\varepsilon, w^\varepsilon, p^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de solution du problème de Stokes (3.3) dans le domaine Ω^ε . La suite remise à l'échelle $\{(u^\varepsilon, w^\varepsilon/\varepsilon, \varepsilon^2 p^\varepsilon) \circ (x, h^\varepsilon(x)Z)\}_{\varepsilon>0}$ converge double échelle vers la solution faible (u_0, w_1, p_0) du système de Reynolds généralisé (3.4).

• **Idées de preuve** Contrairement à l'obtention formelle des équations limites (paragraphe 3.2.1), pour prouver le théorème 3.1 on commence mettre à l'échelle uniquement le domaine "macroscopique" (et pas les rugosités).

Étape 1 : changement de domaine - Dans un premier temps, on ré-écrit les équations de Stokes (3.3) dans un domaine indépendant de ε en effectuant le changement de variable $Z = z/h^\varepsilon(x)$. Ceci permet de travailler sur un problème classique d'homogénéisation contenant une variable lente x , une variable rapide x/ε^2 dans un domaine fixe.

Étape 2 : estimations - Les estimations sur les solutions de ce système (moralemment un système de Stokes à coefficients variables) se font exactement comme celle d'un système de Stokes classique (on obtient d'abord des estimations sur le champ des vitesses puis sur la pression) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim 1, & \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon}, & \|\partial_Z \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim 1, \\ \|p^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon^2}, & \|\nabla_x p^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon^2}, & \|\partial_Z p^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Étape 3 : limites double échelles - D'après le lemme précédent, on déduit directement qu'il existe des fonctions $p_0 \in L^2(\Omega; L^2(\mathbb{T}))$, $u_0 \in L^2(\Omega; H^1(\mathbb{T}))$ et $w_0 \in L^2(\Omega; H^1(\mathbb{T}))$ telles que

$$\varepsilon^2 p^\varepsilon \xrightarrow{2} p_0, \quad u^\varepsilon \xrightarrow{2} u_0 \quad \text{et} \quad w^\varepsilon \xrightarrow{2} w_0.$$

De plus, d'après la dernière propriété du lemme 3.1, on a immédiatement $\nabla_X u_0 = 0$ et $\nabla_X w_0 = 0$. Des choix de fonctions tests judicieux permettent aussi de montrer successivement que $\nabla_X p_0 = 0$, $\partial_Z p_0 = 0$ et $\partial_Z w_0 = 0$ (on notera que la dernière égalité implique $w_0 = 0$ compte tenu des conditions de Dirichlet homogènes appliquées à w_0).

Étape 4 : passage à la limite dans les équations - La dernière étape consiste à passer à la limite dans les équations de Stokes (l'équation de la divergence et celle des moments). On montre (voir [10] pour les détails) que la limite (u_0, w_1, p_0) satisfait le système (3.4), la vitesse verticale w_1 étant définie par (cette définition peut paraître parachutée mais elle est issue directement d'un des termes de la formulation faible de l'équation de la divergence) :

$$w_1 = \int_{\mathbb{T}} \eta_1 dX,$$

où $\eta_1 \in L^2(\Omega, H^1(\mathbb{T}))$ est définie par $\nabla(\varepsilon w^\varepsilon) \xrightarrow{2} \nabla_x 0 + \nabla_X \eta_1$.

3.2.3 Applications numériques

Pour visualiser l'effet des rugosités, nous avons tracé sur un même graphique la solution de l'équation de Reynolds dans la cas d'un domaine lisse et la solution de l'équation de Reynolds dans le cas d'un domaine rugueux.

- Dans la première figure (voir fig. 3.3) des conditions de Dirichlet homogènes sont imposées sur la pression : $p|_{x=0} = p|_{x=1} = 0$. De plus, deux domaines physiques sont représentés. Le premier (en pointillés) dont la hauteur est lisse : $h(x) = \varepsilon h_1(x)$ avec $h_1(x) = 2x^2 - 2x + 1$ et le second (en trait plein) prenant en compte des rugosités : $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x/\varepsilon^2)$ avec $h_2(X) = \sin(X)$. Les profils de pressions sont représentés sur le même graphique, confirmant que la présence des rugosités augmentent le maximum de pression dans des domaines "convergent" (là où la hauteur h décroît).

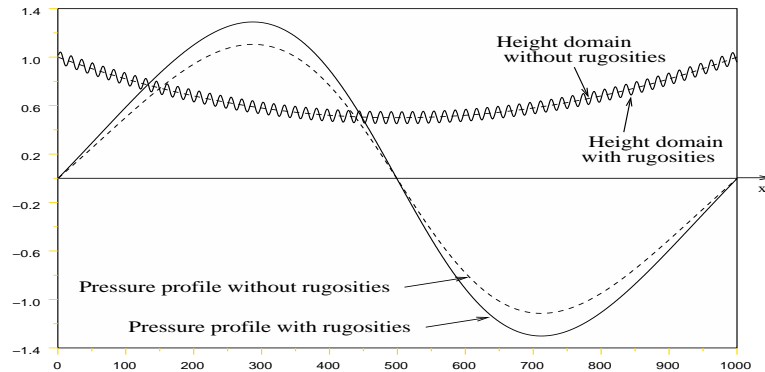


FIG. 3.3: Comparaison de pression dans un domaine mince lisse et dans un domaine mince rugueux : conditions de Dirichlet homogènes.

- Dans la second figure (voir fig. 3.4), les conditions à gauche correspondent à des conditions de flux imposé par une condition de Neumann homogène : $p'|_{x=0} = 0$ alors que la condition à droite reste une condition de Dirichlet homogène : $p|_{x=1} = 0$.

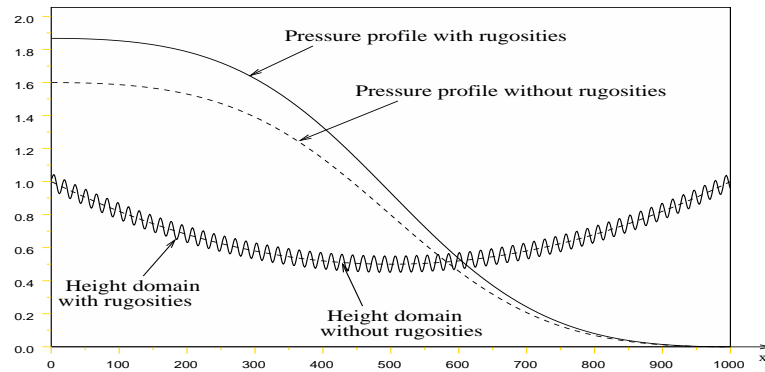


FIG. 3.4: Comparaison de pression dans un domaine mince lisse et dans un domaine mince rugueux : condition de Neumann homogène à gauche et Dirichlet homogène à droite.

- Un exemple de condition non homogène au bord est donné par la figure 3.5. Ce test correspond aux conditions au bord suivante : $p'|_{x=0} = 2$ et $p|_{x=1} = 0$.

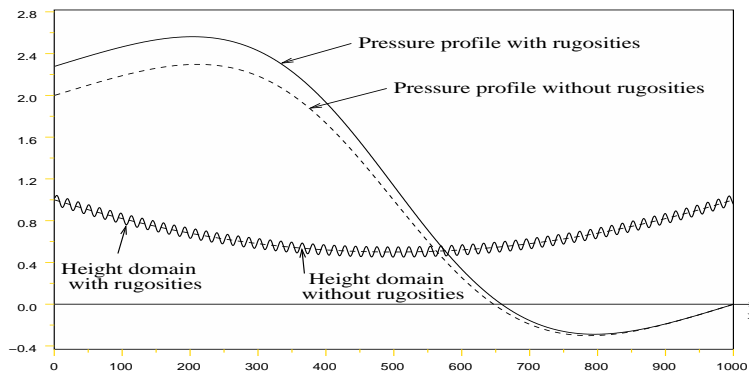


FIG. 3.5: Comparaison de pression dans un domaine mince lisse et dans un domaine mince rugueux : flux imposé à gauche.

Chapitre 4

Influence de la topographie sur les modèles de Saint Venant

Ce chapitre est essentiellement issu de l'article [8] écrit en collaboration avec Marc Boutounet, Pascal Noble et Jean-Paul Vila. On y obtient de nouveaux modèles pour les écoulements laminaires à surface libre guidés par la gravité. Ces modèles prennent en compte d'une part la topographie du fond, d'autre part les effets de la capillarité. Pour mettre nos résultats en relief, notons que dans la bibliographie concernant de tels problèmes, l'approche usuelle est d'approximer la vitesse par une vitesse indépendante de la hauteur et de supposer que la viscosité est négligeable (voir par exemple [GP01] dans le cas d'un fond plat et [BMCPV03, BW04] dans le cas d'un fond non plat). Dans notre travail, la viscosité n'est pas supposée négligeable ce qui impose au champ des vitesses d'être, à l'ordre principal, parabolique.

Après avoir expliqué la méthode utilisée dans le cas d'un fond plat (partie 4.1) nous décrivons brièvement les difficultés rencontrées dans le cas d'un fond non plat (parties 4.2 et 4.3).

4.1 Équations de Saint Venant sur un fond plat

Physiquement, le cas le plus élémentaire correspond au cas d'un écoulement d'une couche de fluide newtonien, incompressible, sur un fond plat d'inclinaison θ et soumis uniquement à l'effet de la gravité (voir la figure 4.1).

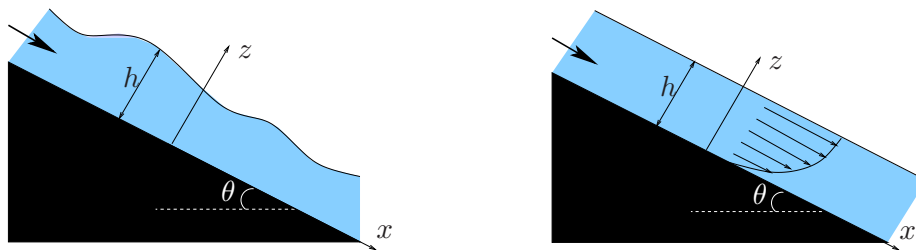


FIG. 4.1: Écoulement sur un fond plat. A droite on a représenté un écoulement uniforme dont la hauteur est constante et pour lequel le profil de vitesse est parabolique.

Les équations décrivant le mouvement sont les équations de Navier-Stokes incompressible (voir les équations (5)) où la force \mathbf{f} est donnée dans le repère (x, z) par $\mathbf{f} = g(\sin(\theta), \cos(\theta))$. Dans ce même repère, le domaine physique sur lequel les équations sont valides s'écrit

$$\Omega(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < z < h(t, x)\}.$$

• **Développement en puissance de ε** - Formellement on pose

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \quad \text{et} \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots$$

En injectant ces développements dans les équations (4.2), on en déduit par exemple pour la vitesse horizontale à l'ordre 0 :

$$u_0(t, x, z) = \lambda \sin(\theta) z \left(h(t, x) - \frac{z}{2} \right).$$

Ceci permet d'approcher par exemple les quantités suivantes :

$$v := \frac{1}{h} \int_0^h u = \frac{1}{3} \lambda \sin(\theta) h^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \int_0^h u^2 = \frac{6}{15} \lambda^2 \sin(\theta)^2 h^5 + \mathcal{O}(\varepsilon) = \frac{6}{5} h v^2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Les équations moyennées (4.1) sont ainsi approchées par le système

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x \left(\frac{1}{3} \lambda \sin(\theta) h^3 \right) = \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \partial_t(hv) + \partial_x \left(\frac{6}{5} h v^2 \right) + \frac{\delta}{\beta} \partial_x \left(\frac{h^2}{2} \cos(\theta) \right) - \kappa \frac{\delta}{\beta} h \partial_{xxx}^3 h = \frac{1}{\beta} \left(\frac{v}{3h} - \partial_z u|_{z=0} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{cases}$$

En utilisant les expressions exactes pour u_0 , w_0 et p_0 on en déduit à l'aide du système (4.1) à l'ordre 1 en puissance de ε des expressions exactes pour u_1 , w_1 et p_1 . On a en particulier

$$\partial_z u|_{z=0} = \frac{3v}{h} + \beta \left(\frac{7}{120} \lambda^2 \sin(\theta)^2 \partial_x h h^4 + \frac{1}{8} \lambda \sin(\theta) \partial_t h h^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Finalement les équations de Saint Venant sur un fond plat s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x \left(\frac{1}{3} \lambda \sin(\theta) h^3 \right) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x \left(\frac{6}{5} h v^2 \right) + \frac{\delta}{\beta} \partial_x \left(\frac{h^2}{2} \cos(\theta) \right) - \kappa \frac{\delta}{\beta} h \partial_{xxx}^3 h = \frac{1}{\beta} \left(\lambda \sin(\theta) h - \frac{3v}{h} \right) - \tau \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{où } \tau = \frac{7}{120} \lambda^2 \sin(\theta)^2 \partial_x h h^4 + \frac{1}{8} \lambda \sin(\theta) \partial_t h h^2.$$

4.2 Équations de Navier-Stokes dans des coordonnées adaptées

Pour faire la même étude dans le cas d'un fond non plat, nous allons commencer par ré-écrire les équations de Navier-Stokes dans des coordonnées adaptées à la topographie du fond.

Le cadre géométrique que nous avons utilisé dans [8] est celui où le domaine est paramétré par une coordonnée qui "suit" le fond (coordonnée notée ξ) et une coordonnée "transverse" (notée $\bar{\xi}$), voir la figure 4.2.

Dans la suite, on notera $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \bar{\xi})$ et on supposera que la coordonnée cartésienne x est donnée à l'aide du paramétrage $\xi \mapsto x(\xi)$. Ainsi, le domaine $\Omega(t)$ où se trouve le fluide à l'instant t est défini par

$$\mathbf{x} \in \Omega(t) \iff \begin{cases} \mathbf{x}(\xi, \bar{\xi}) = \begin{pmatrix} x(\xi) \\ z(x(\xi)) \end{pmatrix} + \bar{\xi} \begin{pmatrix} -\mathbf{s}(x(\xi)) \\ c(x(\xi)) \end{pmatrix}, \\ 0 \leq \bar{\xi} \leq h(\xi, t). \end{cases}$$

Si le champ de vitesse est noté \mathbf{u} dans les coordonnées $\mathbf{x} = (x, z)$ et \mathbf{v} dans les coordonnées $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \bar{\xi})$ alors

$$\mathbf{u} = (\partial_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x}) \mathbf{v}.$$

et la condition de continuité de la contrainte à la surface libre s'écrit

$$\begin{cases} \eta_s p M \nabla_\xi h + \eta_s Z + p M \nabla_\xi h = -\kappa \mathcal{H} \nabla_\xi h, \\ -\eta_s (MZ)^t \nabla_\xi h + \eta_s f - p = \kappa \mathcal{H}, \end{cases}$$

la quantité \mathcal{H} désignant la courbure de la surface libre.

• **Les équations moyennées** s'obtiennent en intégrant sur la hauteur $(0, h)$ d'une part la condition d'incompressibilité (4.4) et d'autre part les équations du moment (4.5). Pour ce qui est de la condition d'incompressibilité, on obtient

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div}_\xi (\tilde{h} \tilde{v}) = 0,$$

où $\tilde{h} = \int_0^h J$ et $\tilde{h} \tilde{v} = \int_0^h JV$. A partir de l'intégration des équations du moment (4.5), on en déduit

$$\begin{aligned} (\tilde{h} \tilde{v})_t + \operatorname{div}_\xi \left(\int_0^h JV \otimes V + JpM \right) + \kappa \mathcal{H} J|_{z=h} M|_{z=h} \nabla_\xi h = \\ -gc \int_0^h J(\partial_\xi X)^{-1} \mathbf{s} - \eta_s J|_{z=0} M|_{z=0} Z|_{z=0} + \int_0^h J \Gamma(\mathbf{v}) \\ + \int_0^h p \operatorname{div}_\xi (JM) + \frac{\eta_s}{2} \int_0^h JM(P : \nabla_\xi M) - \eta_s \int_0^h \partial_{\bar{\xi}} M J Z \\ + \eta_s \operatorname{div}_\xi \int_0^h JM P M - \eta_s \int_0^h J P M :: \nabla_\xi M. \end{aligned}$$

4.3 Équations de Saint Venant sur un fond non plat

Le principe de cette partie est similaire à celui présenté pour obtenir les équations de Saint Venant dans le cas d'un fond plat. Par soucis de clarté nous ne détaillerons pas les calculs, le lecteur intéressé pourra consulter l'article [8].

La première étape consiste à adimensionner les équations de Navier-Stokes (c'est-à-dire toutes les équations présentées dans la partie précédente : condition d'incompressibilité, équations du moment, conditions au bord et équations moyennées). Par rapport au cas du fond plat présenté dans la section 4.1, nous devons "adimensionner la topographie". Celle-ci intervient essentiellement à travers la courbure \mathcal{H} dans les équations de la partie précédente. Ainsi, si R désigne une longueur caractéristique pour le rayon de courbure du fond alors on introduit le paramètre sans dimension $\theta_R = \frac{L}{R}$ de sorte que la courbure \mathcal{H} soit adimensionnée par $\mathcal{H} = \frac{\theta_R}{L} \mathcal{H}^*$. On verra par la suite que le choix de l'ordre de grandeur de θ_R (d'ordre ε ou d'ordre 1) permet d'aboutir à différents types de modèles.

Exactement comme pour le cas plat, on ré-écrit le système adimensionné en faisant intervenir les paramètres indépendants suivants :

$$\alpha = \frac{\varepsilon \mathcal{F}r}{\mathcal{R}e} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \beta = \varepsilon \mathcal{R}e = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \delta = \frac{\varepsilon \mathcal{R}e}{\mathcal{F}r} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \bar{\kappa} = \frac{\varepsilon^2 \mathcal{F}r}{\mathcal{W}e} = \mathcal{O}(1).$$

Formellement, en séparant les termes "sans ε " des autres termes, on écrit $J = J_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $M = M_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. De même, le système obtenu prend la forme suivante si on met dans les membres de gauche tous les termes "sans ε " (voir le système (4.2) pour l'analogie dans le cas d'un fond plat) :

$$\begin{cases} \partial_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^2 (J_0 V) - \lambda_{sc} J_0 (\partial_\xi x)^{-1} = \Psi_V(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, p), \\ \partial_{\bar{\xi}} p + c = \Psi_p(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}), \\ p|_{\bar{\xi}=h} = \Pi_p(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}|_{\bar{\xi}=h}), \\ \partial_{\bar{\xi}} V|_{\bar{\xi}=h} = \Pi_v(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}|_{\bar{\xi}=h}), \\ V|_{\bar{\xi}=0} = 0. \end{cases}$$

Cette écriture permet, après avoir proposé les développements formels $V = V_0 + \varepsilon V_1 + \dots$, $\bar{V} = \bar{V}_0 + \varepsilon \bar{V}_1 + \dots$ et $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots$, de mettre en œuvre une méthode itérative pour obtenir des expressions explicites de chacun des termes.

Tous calculs faits, voici les équations de Saint Venant obtenues pour une topographie arbitraire (on pourra comparer au système (4.3) obtenu dans le cas d'un fond plat) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{h} + \operatorname{div}_\xi(\tilde{h}\tilde{v}) = 0, \\ \partial_t(\tilde{h}\tilde{v}) + \operatorname{div}_\xi\left(\frac{6}{5}\tilde{h}\tilde{v} \otimes \tilde{v}\right) + \frac{\delta}{\beta} J_0 M_0 \nabla_\xi \left(\frac{\tilde{h}^2}{2J_0} c\right) - \bar{\kappa} \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} M_0 \nabla_\xi \mathcal{H} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{\beta} \left(-\lambda c \tilde{h} (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} - \frac{3J_0^2}{\tilde{h}} \tilde{v}\right) + \frac{\delta}{\beta} \mathcal{T}_1 + \lambda^2 \mathcal{T}_2, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

où \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont des fonctions (relativement compliquées !) de ξ et h , voir les détails dans [8].

Écrit ainsi, le système (4.6) ne précise pas quelle paramétrisation est utilisée par le fond (en fait la paramétrisation est cachée dans le changement de variable et donc dans c , \mathbf{s} , $\partial_\xi x$, J_0 et M_0). En pratique, le fond peut être paramétré de façon assez naturelle par les lignes de plus grande pente (lorsque celles-ci existent). Dans ce cas, en notant θ l'inclinaison local maximale du fond et ϕ l'autre paramètre, on a

$$c = \cos(\theta), \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \partial_\xi x = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad J_0 = 1 \quad \text{et} \quad M_0 = \mathbf{Id}.$$

Remarque 4.1

Le seul point qui reste à discuter concerne l'ordre de grandeur de la courbure de la surface \mathcal{H} . En effet, un calcul simple montre que $\mathcal{H} = \theta_R H_b + \mathcal{O}(\varepsilon)$, autrement dit qu'à l'ordre principal la courbure de la surface libre est liée à la courbure $\theta_R H_b$ du fond. Ainsi, si la courbure du fond est petite ($\theta_R = \mathcal{O}(\varepsilon)$) on retrouve des modèles de Saint Venant usuels avec une capillarité de type $h \nabla \Delta h$, voir [BD03, BDL03].

Dans la suite, nous supposons que le fond est vraiment non plat et que sa courbure est d'ordre 1 : $\theta_R = \mathcal{O}(1)$.

Avec ce paramétrage, le modèle de Saint Venant (4.6) prend une forme plus explicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \operatorname{div}_\xi(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \operatorname{div}_\xi\left(\frac{6}{5}hv \otimes v - \frac{\lambda^2 c^2 h^5}{75} \partial_\xi x^{-1} \mathbf{s} \otimes \partial_\xi x^{-1} \mathbf{s}\right) + \frac{\delta}{2\beta} \nabla_\xi(ch^2) = \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\bar{\kappa}}{2} h \operatorname{div}_\xi(\partial_{\xi_1} \theta + \sin(\theta) \partial_{\xi_2} \phi) + \frac{1}{\beta} \left(\lambda h \sin(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3v}{h}\right) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\delta}{\beta} h^2 \sin(\theta) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\partial_{\xi_1} \theta + \sin(\theta) \partial_{\xi_2} \phi) \\ \frac{5}{8}(\partial_{\xi_2} \theta - \sin(\theta) \partial_{\xi_1} \phi) \end{pmatrix} \\ \qquad \qquad \qquad + \left(\frac{6}{35} \sin(\theta) \partial_{\xi_1} \phi - \frac{3}{175} \cos(\theta) \partial_{\xi_1} \theta\right) \lambda^2 h^5 \sin(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

Notons que si on s'intéresse à des modèles de Navier-Stokes dans le plan alors on en déduit des modèles de Saint Venant mono dimensionnels :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_\xi(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_\xi\left(\frac{6}{5}hv^2 - \frac{\lambda^2 \sin(\theta)^2 h^5}{75} + \frac{\delta ch^2}{2\beta}\right) + \bar{\kappa} h \partial_{\xi\xi}^2 \theta \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{\beta} \left(\lambda h \sin(\theta) - \frac{3v}{h}\right) - \frac{\delta}{2\beta} h^2 \sin(\theta) \partial_\xi \theta - \frac{3\lambda^2 h^5}{175} \sin(\theta) \cos(\theta) \partial_\xi \theta. \end{array} \right.$$

Chapitre 5

Singularités dans des écoulements minces de fluides de type Bingham

Ce chapitre est un résumé de ce qui est présenté dans l'article [19]. On y décrit la pression au sein d'un fluide injecté entre deux plaques parallèles et rencontrant une singularité. En fonction de l'angle de la singularité, on donne un équivalent de la pression dans les coordonnées polaires au voisinage de la singularité. Les fluides considérés sont des fluides newtoniens généralisés (y compris les fluides à seuil). Des applications numériques permettent de visualiser les résultats.

Dans un tel cadre physique, les premiers travaux auxquels nous nous sommes référés datent de 1963 : H.-K. Moffatt [Mof63] étudie le comportement d'un écoulement de fluide newtonien confiné entre deux plaques et rencontrant une singularité. Plus tard, dans [HTL88], O. Hassager et T.-L. Lauridsen se sont intéressés au cas des fluides dits en loi de puissance alors que dans [HRI77] R.-R. Huilgol et R.-I. Tanner ont présenté le cas de fluide du type second ordre. Notre objectif est de donner une méthode générale permettant de décrire ces comportements pour une large classe de fluide.

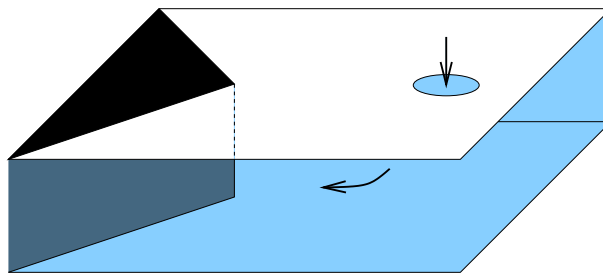


FIG. 5.1: Problématique du chapitre : comment se comporte la pression au voisinage de la singularité ?

Étant donnée la nature du problème (voir la figure 5.1), on travaillera exceptionnellement dans ce chapitre en dimension 3 d'espace. Les coordonnées seront notées (x, y, z) et le champ des vitesses $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Nous considérons un fluide incompressible newtonien généralisé, c'est-à-dire un fluide incompressible dont la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + 2f(\dot{\gamma})D(\mathbf{u}),$$

avec $\dot{\gamma}^2 = \text{Tr}(D(\mathbf{u})^2)$. Les choix classiques de fonctions f ont été donnés en introduction, page 5. Nous les reprendrons comme exemple par la suite.

5.1 Équation de Reynolds généralisée au voisinage d'une singularité

Dans l'approximation des films minces, c'est à dire en supposant que la hauteur du domaine est petite par rapport aux largeur et longueur, on approche les équations du mouvement pour un fluide newtonien généralisé (voir l'équation (6) donnée à la page 6) par

$$\begin{cases} \partial_x p = \partial_z(f(\dot{\gamma})\partial_z u), & \partial_y p = \partial_z(f(\dot{\gamma})\partial_z v), & \partial_z p = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \end{cases}$$

et $\dot{\gamma} = \sqrt{(\partial_z u)^2 + (\partial_z v)^2}$. Notons que la justification de ce passage à la limite "faible épaisseur" est justifié pour certaines fonctions f , voir à ce sujet [SÉT05, Tao96]. Les conditions au bord que nous considérons sont des conditions d'adhérence sur les plaques inférieure et supérieure du domaine. Pour des raisons de symétrie (c'est essentiellement *via* cette condition que l'hypothèse de plaques parallèles est importante) on a

$$\begin{cases} u = v = w = 0 & \text{pour } z = H/2, \\ \partial_z u = \partial_z v = w = 0 & \text{pour } z = 0. \end{cases}$$

Avec ces conditions au bord, il est possible (en suivant toujours les mêmes idées que pour obtenir l'équation de Reynolds pour des écoulements newtoniens, voir page 10) d'écrire une équation sur la pression :

$$\partial_x(g(X)\partial_x p) + \partial_y(g(X)\partial_y p) = 0, \quad X = \sqrt{(\partial_x p)^2 + (\partial_y p)^2}, \quad (5.1)$$

où $g(X) = \frac{2}{X} \int_0^{H/2} z G(zX) dz$ et où G est définie par

$$zX = f(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \iff \dot{\gamma} = G(zX).$$

Notons que pour définir correctement G , il faut en particulier que l'application $\zeta \mapsto f(\zeta)\zeta$ soit inversible. En pratique, pour l'étude qui nous concerne, on verra qu'il suffit de pouvoir inverser l'équation seulement pour $\dot{\gamma}$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Remarque 5.1

Dans le cas simple d'un fluide newtonien, la fonction f est constante : $f(\dot{\gamma}) = \eta_s$. On en déduit que g est aussi constante : $g(X) = \frac{H^3}{12\eta_s}$. Dans ce cas newtonien, l'équation (5.1) correspond à l'équation de Reynolds classique (15).

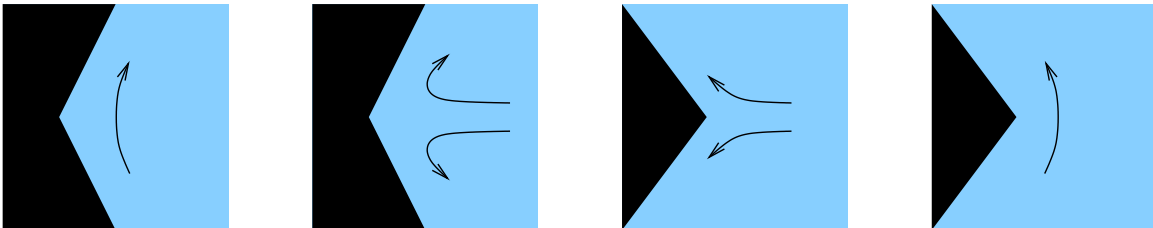


FIG. 5.2: Différents types de singularités et d'écoulements possibles

Supposons que le domaine sur lequel est posée l'équation de Reynolds (5.1) possède une singularité, autrement dit un "coin" entrant ou sortant (voir la figure 5.2). Pour pouvoir décrire de façon précise la pression au

voisinage d'une telle singularité, on écrit l'équation (5.1) dans un système de coordonnées polaires centré en la singularité :

$$\partial_r(r g(X)\partial_r p) + \frac{1}{r}\partial_\theta(g(X)\partial_\theta p) = 0, \quad X = \sqrt{(\partial_r p)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta p)^2}. \quad (5.2)$$

Ce système est écrit pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_*^+ \times]-\alpha, \alpha[$ où 2α correspond à l'angle de la singularité. Les conditions au bord que nous considérons sont de deux types selon les cas physiques étudiés.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_\theta p(r, \alpha) = p(r, 0) = 0 & \text{pour un écoulement dit anti-symétrique,} \\ \partial_\theta p(r, \alpha) = \partial_\theta p(r, 0) = 0 & \text{pour un écoulement dit symétrique.} \end{array} \right.$$

Ainsi, sur la figure 5.2, les dessins aux extrémités sont des écoulements antisymétriques alors que les deux dessins centraux correspondent à des écoulements symétriques.

5.2 Expression de la pression au voisinage d'une singularité

La question à laquelle nous avons répondu dans l'article [19] concerne le comportement de la pression au voisinage d'une singularité, et donc la résolution de l'équation (5.2) pour r petit. L'idée est de chercher la pression au voisinage de la singularité sous la forme $p(r, \theta) = r^m \varphi(\theta) + o(r^m)$ avec $m > 0$. Les termes dominants, lorsque r est petit, dans l'équation (5.2) s'écrivent

$$\partial_\theta(g(X)\partial_\theta \varphi) + m(m g(X) + (m-1)Xg'(X))\varphi = 0, \quad X = r^{m-1} \sqrt{m^2 \varphi^2 + (\partial_\theta \varphi)^2}. \quad (5.3)$$

Selon les cas, ce système est muni des conditions au bord suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi'(\alpha) = \varphi(0) = 0 & \text{pour un écoulement anti-symétrique,} \\ \varphi'(\alpha) = \varphi'(0) = 0 & \text{pour un écoulement symétrique.} \end{array} \right.$$

Nous présentons dans ce manuscrit uniquement les résultats concernant les écoulements antisymétriques, le lecteur intéressé par le cas symétrique pourra consulter [19].

5.2.1 Cas des fluides newtoniens

Dans le cas d'un fluide newtonien, l'application g est constante (voir la remarque 5.1) et par conséquent l'équation (5.3) s'écrit $\varphi'' + m^2 \varphi = 0$. Le réel m^2 correspond alors à la plus petite valeur propre non nulle du laplacien, la fonction φ est une fonction propre associée :

$$m = \frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) = \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\alpha}\right).$$

5.2.2 Cas des fluides à loi de puissance

Pour un fluide à loi de puissance on a $f(\dot{\gamma}) = \eta_s \dot{\gamma}^{n-1}$. Tous calculs faits l'équation (5.3) s'écrit

$$\varphi'' + m^2 \varphi + \left(\frac{1}{n} - 1\right) m(m-1) \frac{\varphi'^2 + m^2 \varphi^2}{(1/n)\varphi'^2 + m^2 \varphi^2} \varphi = 0.$$

Étant donné une valeur α de l'angle de la singularité et un indice de puissance n dans la loi de puissance, cette équation munie des conditions "antisymétriques" au bord a été résolue numériquement en utilisant une méthode de tir, voir la figure 5.3. Par la suite la solution (m, φ) correspondante sera notée $m = M_\alpha$ et $\varphi = \Psi_\alpha$.

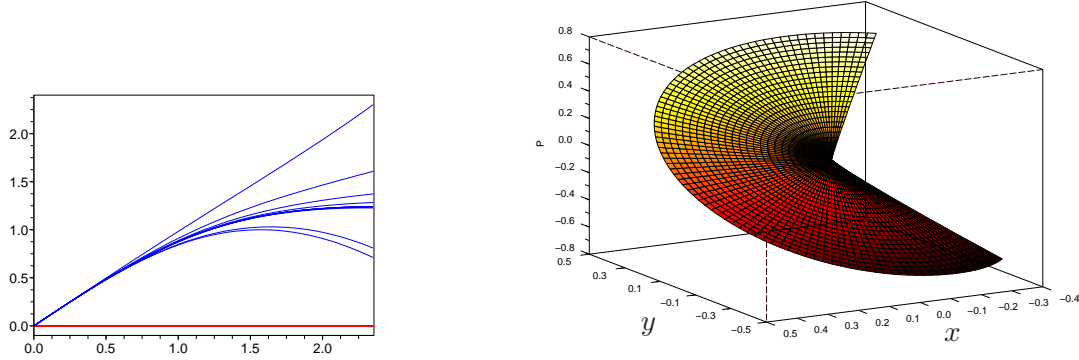


FIG. 5.3: A gauche, les itérations successives convergent vers la solution $\varphi = \Psi_\alpha$ lorsque $\alpha = 3\pi/4$ et $n = 10$. A droite, le champ de pression $p(x, y)$ correspondant.

Remarque 5.2

Dans ce type de problème aux valeurs propres, il est possible d'obtenir la valeur de m de façon explicite (voir le Théorème 3.2.4 dans [AJ92, p.359]). Avec les notations utilisées ici, on a

$$M_\alpha = \frac{\beta(\alpha) + n - 1}{\beta(\alpha) - 1} \quad \text{où} \quad \beta(\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 - n \pm \sqrt{(n-1)^2 + \frac{4n\pi^2}{(\pi - 2\alpha)^2}} \right),$$

le signe indéterminé dans l'expression de β valant $+$ si $2\alpha < \pi$ et $-$ si $2\alpha > \pi$. Les valeurs numériques obtenues ont été confrontées (avec succès !) à ces valeurs théoriques.

5.2.3 Cas des fluides de type Carreau-Yasuda

Dans le cas d'un fluide dont la loi constitutive est la loi de Carreau-Yasuda, la fonction f est donnée sous la forme

$$f(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_s - \eta_\infty)[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a}.$$

L'inverse de l'application $\zeta \mapsto \zeta f(\zeta)$ n'est pas simple à déterminer et n'est pas toujours définies sur \mathbb{R}^+ . En fait on peut facilement voir qu'il n'est pas utile de la calculer exactement. En effet, on recherche un comportement asymptotique lorsque le fluide est au voisinage de la singularité, autrement dit on cherche un équivalent de la pression lorsque r est petit. Selon la valeur de m par rapport à 1 (voir l'expression de $X(r, \theta)$ dans l'équation (5.3)), on s'intéresse donc au comportement de $g(X)$ lorsque X est proche de 0 (cas $m > 1$) ou lorsque X est proche de $+\infty$ (cas $m < 1$). Ainsi, seul le comportement de $f(\dot{\gamma})$ lorsque $\dot{\gamma}$ est proche de 0 et $+\infty$ est utile. Dans le cas de la loi Carreau-Yasuda, on a

$$f(\dot{\gamma}) \sim \eta_s \text{ au voisinage de } 0 \quad \text{et} \quad f(\dot{\gamma}) \sim C \dot{\gamma}^{n-1} \text{ au voisinage de } +\infty.$$

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 5.1

Pour un écoulement "antisymétrique" d'un fluide satisfaisant la loi de Carreau-Yasuda, la pression $p(r, \theta)$ au voisinage d'une singularité d'angle α est équivalente à $r^m \varphi(\theta)$ où

$$m = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} & \text{si } \alpha \leq \pi/2, \\ M_\alpha & \text{si } \alpha > \pi/2, \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\alpha}\right) & \text{si } \alpha \leq \pi/2, \\ \Phi_\alpha(\theta) & \text{si } \alpha > \pi/2. \end{cases}$$

Le résultat de ce théorème est illustré graphiquement par la figure 5.4 de gauche. Selon l'angle de la singularité, la pression se comporte comme dans le cas d'un fluide newtonien (angle petit) ou comme dans le cas d'un fluide en loi de puissance (angle grand).

5.2.4 Cas des fluides à seuil

Dans le même état d'esprit, il est possible d'établir un résultat concernant les fluides à seuil. Pour un fluide à seuil, la fonction f n'est pas clairement définie en 0 (voir par exemple la définition d'un fluide de Bingham page 5), par contre la réciproque de l'application $\zeta \mapsto f(\zeta)\zeta$ est bien définie sur \mathbb{R}^+ . Par exemple, pour un fluide de Bingham, la fonction G correspondante vaut

$$G(zX) = \begin{cases} \frac{zX - \sigma_0}{\eta_s} & \text{if } zX > \sigma_0, \\ 0 & \text{if } zX \leq \sigma_0. \end{cases}$$

Connaissant alors le comportement de G (et donc de g , via la relation $g(X) = \frac{2}{X} \int_0^{H/2} z G(zX) dz$) pour des petites ou des grandes valeurs de X , on peut comme dans le cas de la loi de Carreau-Yasuda obtenir le résultat suivant :

Théorème 5.2

Pour un écoulement "antisymétrique" d'un fluide de type Bingham au voisinage d'une singularité d'angle α on a

- Soit $2\alpha < \pi$, et le fluide a un comportement solide,
- Soit $2\alpha > \pi$, et la pression $p(r, \theta)$ au voisinage de la singularité $r = 0$ est équivalente à $r^{M_\alpha} \Phi_\alpha(\theta)$.

Ce théorème indique notamment qu'un fluide à seuil aura toujours un comportement solide dans un coin rentrant. Il est illustré par la figure 5.4 de droite.

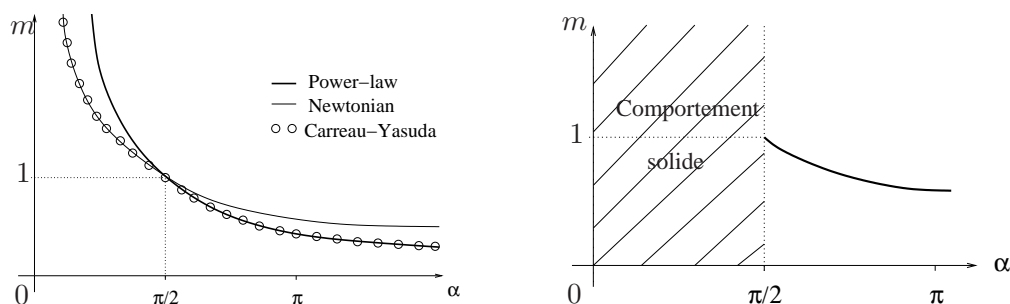


FIG. 5.4: Dépendance entre la puissance m et l'angle α . A gauche, pour un fluide newtonien (—), pour un fluide en loi de puissance (---) et pour un fluide de loi de Carreau (o o). A droite, pour un fluide de loi de Herschel-Bulkley.

Chapitre 6

Écoulements diphasiques et films minces

Ce chapitre est issu du travail de thèse de Bérénice Grec que j'ai co-encadré avec Guy Bayada (voir son mémoire [Gre08], repris en partie dans les articles [2, 4]). L'idée est d'utiliser des modèles diphasiques à interfaces diffuses pour comprendre par exemple les phénomènes de cavitation en lubrification. En effet, il existe plusieurs modèles qui tentent de reproduire ces phénomènes. Citons à titre d'exemples le modèle d'Elrod-Adams [Elr81, EA75] ou encore un modèle basé sur l'équation de Buckley-Leverett [BMV06, Pao03]. Chacun de ces modèles possède des limitations qui sont souvent dues aux hypothèses introduites. Ainsi dans le modèle de Buckley-Leverett on suppose que les deux fluides sont séparés par le graphe d'une fonction de la variable x , ce qui sous-entend qu'il ne peut y avoir de "retour" d'un fluide au dessus de l'autre.

En utilisant un modèle à interface diffuse, on espère donc pouvoir s'affranchir d'hypothèse concernant l'interface entre les deux fluides.

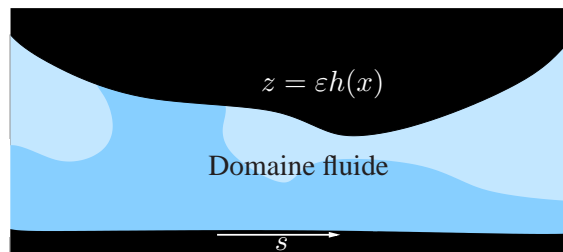


FIG. 6.1: Écoulement diphasique entre deux surfaces proches et en mouvement relatif.

6.1 Modélisation d'un écoulement diphasique en lubrification

Un mélange de deux fluides newtoniens peut être modélisé par les équations de Navier-Stokes-Cahn-Hilliard couplant le champ des vitesses \mathbf{u} , le champ de pression p et le paramètre d'ordre φ (voir le système (12) à la page 9) :

$$\begin{cases} \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \operatorname{div}(\eta(\varphi) D(\mathbf{u})) = \kappa \mu \nabla \varphi, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}e} \operatorname{div}(B(\varphi) \nabla \mu) = 0, \\ \mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi). \end{cases} \quad (6.1)$$

Si on s'intéresse à des problèmes issus de la lubrification, ces équations sont posées dans un domaine Ω^ε dépendant d'un paramètre $\varepsilon \ll 1$ et de la forme

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < L \ \text{et} \ 0 < z < \varepsilon h(x)\}.$$

Avant de décrire la situation pour des films minces, c'est-à-dire pour ε petit, rappelons que ce système (6.1) a été étudié par Franck Boyer au cours de sa thèse [Boy01], voir aussi [Boy99, Boy00, Boy02]. Il a en particulier prouvé que le système ci-dessus était bien posé (sous des hypothèses raisonnables pour le potentiel F , la fonction de viscosité η ...). Il a aussi effectué des simulations numériques et proposé un algorithme que nous avons utilisé par la suite (voir la partie 6.3). Notons toutefois que les résultats d'existence qu'il a prouvé nécessitent des conditions au bord de type Neumann pour le paramètre d'ordre φ , ce qui n'est pas le cas dans les problèmes qui nous préoccupent. En effet, on souhaite modéliser l'injection d'un fluide. On devra imposer la valeur de φ en amont, et donc se donner une condition au bord de type Dirichlet.

L'idée de cette partie est la même que celle qui a été développée dans le chapitre 1. On effectue un adimensionnement des équations en faisant apparaître deux longueurs caractéristiques : la largeur du domaine et sa hauteur. On fait l'hypothèse que le rapport de ses deux grandeurs est petit (c'est le paramètre noté ε) puis on ré-écrit les équations adimensionnées en faisant intervenir ce paramètre. Bien entendu, il faut aussi adimensionner toutes les nouvelles quantités qui n'ont pas lieu d'être dans le cas d'un écoulement newtonien d'un seul fluide. Par exemple, il faut faire un choix sur l'ordre de grandeur (par rapport à ε) de la tension de surface κ . Dans ce document, nous supposons que κ est de l'ordre de ε , c'est-à-dire que nous nous mettons dans un cadre physique où les forces dues à la tension de surface sont petites. Le lecteur qui serait intéressé par le cas où la tension de surface n'est plus négligeable pourra consulter [2] ou bien la thèse de Bérénice Grec [Gre08]. De même, essentiellement pour des raisons mathématiques, l'adimensionnement des quantités α et de la fonction F est fait pour que l'équation de Cahn-Hilliard conserve sa forme globale dans le problème limite $\varepsilon = 0$. Plus exactement, nous obtenons formellement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ le modèle suivant :

$$\begin{cases} \partial_z(\eta(\varphi)\partial_z u) = \partial_x p \quad \text{et} \quad \partial_z p = 0, \\ \partial_x u + \partial_z w = 0, \\ \partial_t \varphi + u \partial_x \varphi + w \partial_z \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}e} \operatorname{div}(B(\varphi)\nabla \mu) = 0, \\ \mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi), \end{cases}$$

défini sur le domaine $\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < L \ \text{et} \ 0 < z < h(x)\}$.

Exactement comme pour obtenir l'équation de Reynolds sur la pression à partir des équations de Navier-Stokes, on peut intégrer deux fois par rapport à la variable z l'équation sur la vitesse u . La seule différence avec le cas monophasique est que la viscosité n'est pas constante. Une fois obtenue une relation donnant la vitesse horizontale u en fonction de la pression p et du paramètre d'ordre φ , on utilise la relation d'incompressibilité sous la forme $\partial_x \left(\int_0^h u(x, z) dz \right) = 0$ pour en déduire une équation de type Reynolds (voir l'équation de Reynolds classique (15) à la page 12). Tous calculs faits, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_x(\tilde{D} \partial_x p) = \partial_x(\tilde{E} s) \\ u = \left(B - \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} A \right) \partial_x p + \left(1 - \frac{A}{\tilde{A}} \right) s \quad \text{et} \quad w = - \int_0^z \partial_x u(x, \zeta) d\zeta, \\ \partial_t \varphi + u \partial_x \varphi + w \partial_z \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}e} \operatorname{div}(B(\varphi)\nabla \mu) = 0, \\ \mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi). \end{cases} \quad (6.2)$$

où

$$A(x, z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\eta(\varphi(x, \zeta))}, \quad B(x, z) = \int_0^z \frac{\zeta d\zeta}{\eta(\varphi(x, \zeta))}, \quad C(x, z) = \int_0^z \frac{\zeta^2 d\zeta}{\eta(\varphi(x, \zeta))},$$

et $\tilde{A}(x) = A(x, h(x))$, $\tilde{B}(x) = B(x, h(x))$, $\tilde{C}(x) = C(x, h(x))$, $\tilde{D} = \tilde{C} - \tilde{B}^2/\tilde{A}$ et $\tilde{E} = \tilde{B}/\tilde{A}$.

Comme dans tous les problèmes liés à la lubrification que nous abordons, les conditions au bord pour le champ des vitesses sont des conditions de type Dirichlet (avec vitesse imposée en bas, vitesse nulle en haut et débit imposé en amont). Les conditions au bord qui sont physiquement pertinentes pour le paramètre d'ordre φ dans ce type d'écoulement sont des conditions de type "injection". Plus précisément, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = s, \quad w(x, 0) = 0, \quad u(x, h(x)) = 0, \quad w(x, h(x)) = 0, \\ \int_0^{h(0)} u(0, z) dz = q_0, \quad p(1) = 0, \\ \varphi(0, z) = \varphi_g(z), \quad \mu(0, z) = 0, \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}}\mu = 0 \quad \text{sur les autres bords.} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Pour des raisons mathématiques, les résultats théoriques que nous démontrons ensuite ne sont prouvés que dans le cas où φ_g est constante, à valeurs dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Autrement dit lorsque l'on injecte uniquement un seul fluide, ou un mélange uniforme des deux fluides.

6.2 Existence d'une solution au problème limite

Le système précédent (6.2)–(6.3) est un système couplant le champ de pression p , le champ des vitesses (u, w) et le paramètre d'ordre φ . D'un point de vue pratique, les vitesses u et w sont exprimées de manière explicite en fonction de p et φ . On peut donc voir le système précédent comme un système de deux équations (Reynolds et Cahn-Hilliard) à deux inconnues (pression p et paramètre d'ordre φ). C'est en utilisant cette structure qu'on démontre le résultat suivant (voir l'énoncé précis de ce théorème et la version complète de la preuve dans [2] ou dans [Gre08, p. 165]) :

Théorème 6.1

Il existe une solution faible (p, u, w, φ, μ) au système (6.2)–(6.3) telle que

$$\begin{aligned} p &\in L^\infty(0, +\infty; H^2(0, L)), \\ u &\in L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)), & w &\in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)), \\ \varphi &\in L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega) \cap L^2_{loc}(0, +\infty; H^3(\Omega))), & \mu &\in L^2_{loc}(0, +\infty; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

• **Éléments de preuve** - Comme précisé ci-dessus, on peut ramener l'étude du système (6.2) au système suivant couplant uniquement pression et paramètre d'ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x(\tilde{D}[\varphi] \partial_x p) = \partial_x(\tilde{E}[\varphi] s) \\ \partial_t \varphi + u[p] \partial_x \varphi + w[p] \partial_z \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}e} \operatorname{div}(B(\varphi) \nabla \mu) = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi). \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Le principe de la preuve est de découpler l'équation de Reynolds de l'équation de Cahn-Hilliard en utilisant une méthode de point fixe. Plus précisément, étant donnée une valeur de φ^n , on obtient d'abord la pression p^{n+1} solution de la première équation du système (6.4). Ensuite, à partir de cette pression p^{n+1} on résout la seconde équation du système (6.4) pour en déduire φ^{n+1} , etc. L'objectif étant de passer à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans ce processus, il faut donc avoir de "bonnes" estimations pour chacune des deux équations.

• L'équation de Reynolds (première équation du système (6.4)) étant elliptique, il suffit de se convaincre que les coefficients $\tilde{D}[\varphi]$ et $\tilde{E}[\varphi]$ sont assez réguliers pour obtenir une "bonne" estimation sur la pression p . En pratique, on montre que dès que $\varphi \in H^1(\Omega)$ alors $\tilde{D}[\varphi]$ et $\tilde{E}[\varphi]$ sont dans $H^1(0, L)$ et qu'il existe une constante δ telle que $\tilde{D}[\varphi] \geq \delta > 0$ (ce qui implique la coercivité de l'équation de Reynolds étudiée).

- L'étape suivante consiste à, connaissant la régularité de φ et de p , en déduire la régularité du champ de vitesse (u, w) . Ces estimations sont immédiates puisque des formules explicites fournissent u et w en fonction de φ et de p (voir le système (6.2)).
- La dernière étape est celle concernant l'équation de Cahn-Hilliard (seconde équation du système (6.4)). Il s'agit de, connaissant la régularité de la vitesse (u, w) , d'en déduire la régularité de la solution φ . Le principe pour obtenir de telles estimations sur cette équation (et aussi l'existence d'une solution !) est d'utiliser une méthode de Galerkin (on pourra consulter [Boy99, 11] pour ce type d'approche concernant l'équation de Cahn-Hilliard). La principale différence avec les résultats connus auparavant vient du fait que les conditions au bord sont différentes : habituellement les conditions utilisées sur le paramètre d'ordre φ sont des conditions de type Neumann alors que le problème physique introduit ici fait appel à des conditions de type Dirichlet sur une partie du bord (car on impose ce qui entre dans le domaine).

6.3 Applications numériques

6.3.1 Présentation de la méthode

Au cours de ces quelques lignes, je présente les travaux qui ont été réalisés dans la dernière partie de la thèse de Bérénice Grec [Gre08]. L'objectif est de proposer un algorithme pour effectuer des simulations d'écoulement diphasique dans des films minces en utilisant le modèle décrit dans la partie 6.1.

La méthode qui a été utilisée est la même que celle concernant la preuve du théorème 6.1, à savoir une méthode de splitting pour distinguer la partie Reynolds de la partie Cahn-Hilliard.

- Du point de vue de la discrétisation, nous avons choisi d'utiliser la méthode des différences finies, et donc par simplicité de travailler avec un domaine rectangulaire. Puisque la plupart des problèmes physiques réalistes en lubrification sont posés sur des domaines courbes (voir par exemple la figure 6.1 en introduction de ce chapitre, ainsi que la définition du domaine Ω^ε à la page 53) nous avons dans un premier temps ré-écrit tout le système (6.2) sur un domaine rectangulaire (en introduisant la nouvelle variable $Z = z/h(x)$).
- L'équation de Reynolds étant une équation elliptique "classique", nous l'avons discrétisée de façon usuelle. A noter que les conditions au bord pour la pression sont une condition de type Dirichlet homogène en $x = L$, et une condition de type Neumann non homogène en $x = 0$. Cette dernière condition pouvant être explicitement reliée à la condition de débit imposé par les conditions (6.3).
- Le champ des vitesses (u, w) est obtenu par une méthode de quadrature d'après les expressions explicites du système (6.2).
- Pour ce qui est de la discrétisation de l'équation de Cahn-Hilliard, nous avons repris la discrétisation qu'avait proposé Franck Boyer au cours de sa thèse [Boy01], séparant en particulier la partie transportée de la partie diffusive (les détails de toutes les discrétisations sont décrites dans [Gre08]).

6.3.2 Validation du programme

Comme pour tout algorithme, la première étape consiste à valider son contenu. Ceci se fait au moyen de tests "classiques" pour lesquels on connaît *a priori* la solution. Deux types de validation sont présentées dans cette partie.

- La première concernant l'équation de Reynolds, c'est-à-dire en prenant $\varphi = 1$ l'équation de Cahn-Hilliard est automatiquement satisfaite et on s'intéresse uniquement à un écoulement monophasique. On retrouve alors le comportement connu (par exemple le phénomène de paliers pour la pression), voir les figures 6.2.
- La seconde pour vérifier l'influence des viscosités, et en particulier lorsque les rapports de viscosité entre les deux fluides sont grands. La viscosité de l'eau étant de 10^{-3} Pa.s alors que celle du miel étant de 8.10^{-2} Pa.s, on a comparé (voir les figures 6.3) le déplacement d'une goutte de miel dans de l'eau avec celui d'une goutte d'eau dans du miel.

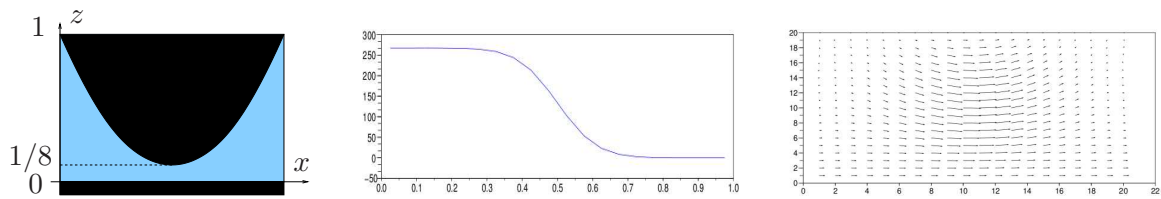


FIG. 6.2: Forme du domaine, profil de pression et champ de vitesses dans le cas monophasique.

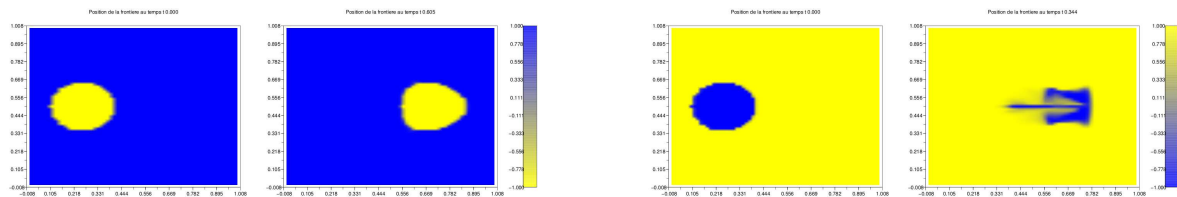


FIG. 6.3: Évolution d’une goutte de miel dans de l’eau (à gauche), et évolution d’une goutte d’eau dans du miel (à droite).

On a aussi observé que le modèle simplifié (par rapport aux équations de Navier-Stokes complètes) permettait quand même de capturer des phénomènes bien connus dans les domaines des écoulements diphasiques : les recirculations dans des gouttes (voir par exemple les travaux de Paul Vigneaux [Vig07]). La figure 6.4, obtenue avec le modèle (6.2), en est une illustration.

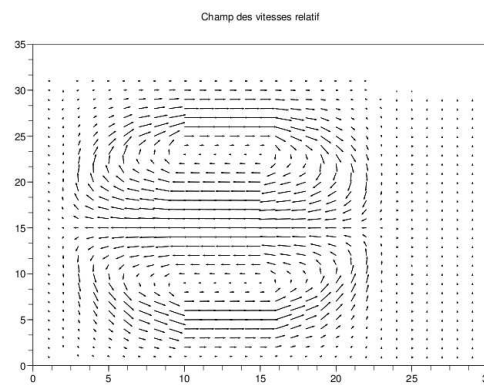


FIG. 6.4: Lignes de champ de vitesses montrant des recirculations dans une goutte.

6.3.3 Application à la cavitation

Au cours de sa thèse, Bérénice Grec a effectué des simulations numériques proches d’un cadre physique réaliste pour lequel d’autres essais numériques avaient déjà été réalisés, voir [BMV06]. La géométrie est décrite par un profil “convergent-divergent” :

$$h(x) = \frac{2}{3} \left((2x - 1)^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Le débit et la vitesse de cisaillement valent respectivement

$$q_0 = 0.28 \quad \text{et} \quad s = 1.$$

Enfin, le rapport entre les deux viscosités est choisi pour correspondre au rapport eau / air :

$$\eta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \eta_2 = 1000.$$

Sur la figure 6.5 j'ai repris les figures obtenues pour les valeurs du paramètre d'ordre φ aux temps $t = 0$, $t = 0.2$, $t = 0.5$ et $t = 2$.

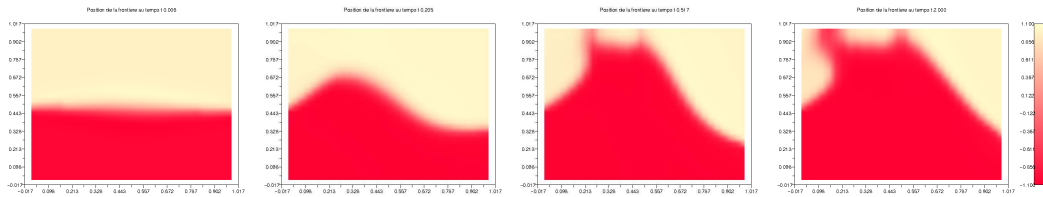


FIG. 6.5: Répartition des deux fluides à différents temps.

Le fluide le plus visqueux (l'eau) est initialement en bas. Sous l'effet du cisaillement et de la géométrie, il se crée une zone de saturation (c'est-à-dire une zone où il n'y a que de l'eau sur la verticale). Cette situation correspond au temps $t = 0.5$. Pour information, le champ des vitesses à cet instant est indiqué sur la figure 6.6.

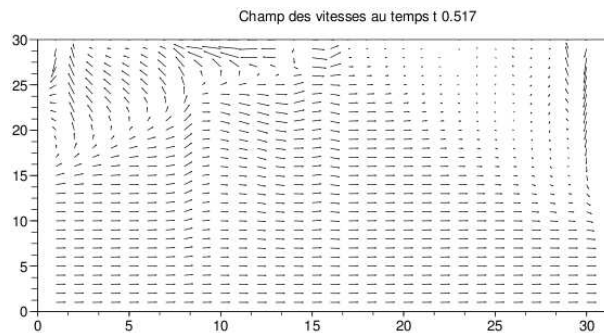


FIG. 6.6: Champ des vitesses à l'instant où l'eau sature.

Cette figure montre que le champ des vitesses est dirigé vers la gauche à l'endroit où le fluide sature ($x \approx 7/30$ et $z \geq 20/30$) : l'écoulement n'est pas en situation stationnaire. Les modèles classiques ayant pour hypothèse que les deux fluides sont séparés par un graphe $x \mapsto z$ ne peuvent pas capturer les phénomènes ultérieurs. En effet, dans la dernière image de la figure 6.5 on voit que le fluide "revient en arrière" créant des zones où trois couches se superposent.

Chapitre 7

Équation de Reynolds compressible

Comme décrit dans l'introduction de ce document, l'équation de Reynolds (voir l'équation (15)) décrit la pression d'un fluide dans des mécanismes lubrifiés. En pratique, cette équation est très utilisée avec des fluides qui sont compressibles. Or pour obtenir l'équation de Reynolds (15) le point de départ est le système des équations de Navier-Stokes incompressible. Bien entendu, il est possible d'obtenir une équation de Reynolds dite compressible en partant des équations de Navier-Stokes compressible. Ces équations sont souvent utilisées, par exemple concernant les problèmes liés aux lecteurs de disques durs magnétiques ainsi qu'aux bandes magnétiques : un très mince film d'air se situe entre la tête de lecture et le support, voir [CJBK91] ou plus généralement les références de [GIM05, GM01]. La justification mathématique de cette équation de Reynolds compressible n'a été prouvée que très récemment (voir les travaux de E. Marusic-Paloka et M. Starcevic [EM05] et [EM09]) et uniquement dans le cas des gaz parfaits. L'une des raisons principales de ce manque de résultats mathématiques provient sans aucun doute de la difficulté intrinsèque liée aux équations de Navier-Stokes compressible.

En 2003, Benoît Desjardins et Didier Bresch ont fait une avancée significative dans la compréhension de ces équations de Navier-Stokes compressible (voir [BD03]). Ils ont "découvert" une nouvelle estimation qui, sous une hypothèse sur les coefficients de Lamé (qui de manière générale dépendent de la densité), permet d'avoir des informations essentielles et de justifier de nombreux résultats d'existence (voir aussi leur travaux suivants : [BD06a, BD06b, BD07]). A la suite de leurs travaux, nous avons justifié que l'équation de Reynolds compressible est effectivement une approximation des équations de Navier-Stokes compressible, et ce dans un cadre plus général que celui des gaz parfaits.

Ce travail, dont nous rappelons les grandes lignes ici, est détaillé dans [20].

7.1 Équations de Navier-Stokes compressible à viscosités variables

Dans cette première partie, on présente succinctement quels sont les ingrédients qui permettent de prouver l'existence d'une solution faible aux équations de Navier-Stokes compressible avec conditions de Dirichlet non homogènes. Ces équations s'écrivent (voir le système (4))

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div}(2\mu(\rho)D(\mathbf{u})) + \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}(\mathbf{u})) - r_0 \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Pour fermer ce système, on donne les coefficients de Lamé λ et μ ainsi que la pression p en fonction de la densité ρ . De très nombreux travaux traitent du cas où les coefficients de Lamé sont indépendants de la densité, voir par exemple [Lio93, Lio98]. Dans leurs travaux, B. Desjardins et D. Bresch se sont penchés sur le cas où les coefficients de Lamé ne sont pas nécessairement constants. La nouvelle entropie qu'ils ont mis en avant nécessite tout de même la relation suivante entre les deux coefficients de Lamé :

$$\forall s > 0 \quad \lambda(s) = 2(s\mu'(s) - \mu(s)). \quad (7.2)$$

7.1.1 La BD entropie

Sous des hypothèses de bornes sur les fonctions λ , μ et p , et sous cette hypothèse (7.2), B. Desjardins et D. Bresch ont démontré qu’il existait une solution (faible) aux équations (7.1) dès qu’on se donne une condition initiale. La clef de leur démonstration réside dans l’estimation de la “vitesse” $\mathbf{U} = 2\mu'(\rho)\nabla(\ln(\rho))$. Voici comment on obtient cette nouvelle estimation.

On multiplie tout d’abord l’équation de conservation de la masse (première équation du système (7.1)) par la quantité $\varphi'(\rho) = \frac{\mu'(\rho)}{\rho}$:

$$\partial_t \varphi(\rho) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\rho) + \mu'(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0.$$

Ensuite on dérive par rapport aux variables d’espace :

$$\partial_t \nabla \varphi(\rho) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \varphi(\rho) + \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi(\rho) + \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u})) = 0.$$

En multipliant le résultat obtenu par 2ρ on en déduit, en notant $\mathbf{U} = 2\nabla \varphi(\rho)$ et en utilisant à nouveau la conservation de la masse, que

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{U}) + 2\nabla \mathbf{u} : \nabla \mu(\rho) + 2\rho \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u})) = 0. \quad (7.3)$$

On ré-écrit les deux derniers termes comme

$$\begin{aligned} 2\nabla \mathbf{u} : \nabla \mu(\rho) &= \operatorname{div}(2\mu(\rho) \nabla \mathbf{u}) - 2\mu(\rho) \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{u})) \\ &= \operatorname{div}(2\mu(\rho) D(\mathbf{u})) + \operatorname{div}(2\mu(\rho) A(\mathbf{u})) - \nabla(2\mu(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u})) + 2\nabla \mu(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u}), \\ 2\rho \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u})) &= \nabla(2\rho \mu'(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u})) - 2\nabla \mu(\rho) \operatorname{div}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

où D et A correspondent respectivement aux parties symétrique et antisymétrique du gradient. Enfin, en sommant la relation (7.3) avec l’équation de conservation du moment (seconde équation du système (7.1)) il vient

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho(\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \nabla p(\rho) &= \operatorname{div}(2\mu(\rho) A(\mathbf{u})) - r_0 \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} \\ &\quad + \nabla((2\rho \mu'(\rho) - 2\mu(\rho) - \lambda(\rho)) \operatorname{div}(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

C’est alors qu’on utilise l’hypothèse (7.2) pour en déduire

$$\partial_t(\rho(\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div}(2\mu(\rho) A(\mathbf{u})) - r_0 \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u}.$$

L’estimation classique que l’on peut faire à partir de cette relation (en la testant contre la “vitesse” $\mathbf{u} + \mathbf{U}$) s’écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\rho \frac{|\mathbf{u} + \mathbf{U}|^2}{2} + Q(\rho) \right) + \int_{\Omega} 2\mu(\rho) |A(\mathbf{u})|^2 + \int_{\Omega} \nabla P(\rho) \cdot \nabla \varphi(\rho) + r_0 \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^3 = -r_0 \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}.$$

Dans cette relation, c’est le terme $\int_{\Omega} \nabla P(\rho) \cdot \nabla \varphi(\rho)$ qui contient en fait plein d’informations, sous l’hypothèse que la pression puisse se décomposer en la somme

$$p(\rho) = p_h(\rho) + p_c(\rho), \quad (7.4)$$

la pression $p_c(\rho)$ (appelée pression froide) explosant comme une puissance de ρ pour ρ petit et la pression $p_h(\rho)$ se comportant comme une pression “standard” (par exemple comme ρ^γ , $\gamma > 1$). Les hypothèses précises sont données dans les articles précités de D. Bresch et B. Desjardins. Moralement, sous l’hypothèse de l’existence d’une pression froide, le terme $\int_{\Omega} \nabla P(\rho) \cdot \nabla \varphi(\rho)$ peut être minoré de la façon suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi(\rho) \gtrsim \int_{\Omega} |\nabla(\rho^M)|^2 + \int_{\Omega} |\nabla(\rho^N)|^2,$$

où $M < 0$ et où $N > 0$. Autrement dit, ce terme permet de contrôler à la fois ρ et $1/\rho$.

7.1.2 Généralisation aux domaines bornés

La démonstration de Didier Bresch et Benoît Desjardins est faite dans le cas où le domaine Ω sur lequel sont posées les équations est soit l'espace tout entier : $\Omega = \mathbb{R}^d$, soit un domaine périodique : $\Omega = \mathbb{T}^d$. Ainsi, aucune condition au bord n'est nécessaire, en particulier pour justifier toute intégration par parties éventuelle. Plus récemment, ils ont, avec David Gérard-Varet, montré que leur résultat était encore valable dans un domaine borné. Les conditions au bord qu'ils ont considérées sur le champ de vitesse \mathbf{u} sont soit une condition de Dirichlet *homogène*, soit une condition de Navier. De plus leur résultat impose que la densité soit constante sur chaque composante connexe du bord.

En vue des applications à la lubrification (où une des parois est généralement en mouvement) nous avons adapté leur démonstration dans le cas de conditions au bord de Dirichlet *non homogènes*. La principale difficulté étant donc de contrôler les termes de bords apparaissant lors des intégrations par partie. La méthode classique dans ce type de problème est d'utiliser un relèvement $\tilde{\mathbf{u}}$ de la vitesse pour se ramener à un problème avec une condition de Dirichlet homogène mais contenant un terme source. La première difficulté rencontrée est la suivante : si on ajoute un terme source dans l'équation de conservation de la masse alors la méthode d'obtention de l'entropie BD, voir les arguments développés dans la partie 7.1.1, devient caduque ! On a donc choisi de ne pas faire de relèvement (et donc de travailler avec la vitesse physique \mathbf{u}) mais de tester l'équation de conservation de la quantité de mouvement contre $\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$ (ce qui permettra de justifier toutes les intégrations par parties sans faire apparaître de terme de bord). Bien entendu, par rapport aux estimations obtenues dans [BDGV07] de nombreux termes apparaissent. Notons par exemple que le terme

$$\Upsilon = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (7.5)$$

devient après intégration par parties¹

$$\Upsilon = - \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla \tilde{\mathbf{u}},$$

puis est majoré par

$$\Upsilon \leq |\nabla \tilde{\mathbf{u}}|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2.$$

Ce terme sera lui-même contrôlé (à l'aide du lemme de Gronwall) par le terme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 \right),$$

qui est issu du produit $\partial_t(\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$.

7.2 Solution stationnaire aux équations de Navier-Stokes compressible

Dans cette partie, on décrit brièvement comment est prouvée dans [20] l'existence d'une solution stationnaire aux équations de Navier-Stokes compressible avec conditions de Dirichlet non homogènes.

Rappelons que des résultats sur l'existence de solution stationnaire aux équations de Navier-Stokes compressible sont déjà connus, dans le cas où les coefficients de Lamé sont constants, voir par exemple l'ouvrage de P.-L. Lions [Lio98]. La méthode employée dans [Lio98] consiste à remplacer les termes temporels $\partial_t \rho$ et $\partial_t(\rho \mathbf{u})$ par les termes $\alpha \rho$ et $\alpha \rho \mathbf{u}$. L'idée étant ensuite de passer à la limite lorsque α tend vers 0.

Malheureusement, cette méthode ne s'applique pas directement ici puisqu'en modifiant l'équation de conservation de la masse, on ne peut plus (on n'a pas su !) utiliser la méthode de BD entropie présentée dans la partie 7.1.1.

¹ Oublions les termes de bord, ils sont compensés par ceux issus de $-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$.

Le principe de notre preuve reste de s'appuyer sur les estimations faites dans le cas non stationnaire, en essayant de les refaire sans utiliser les termes $\partial_t \rho$ et $\partial_t(\rho \mathbf{u})$. On s'aperçoit rapidement que la seule véritable utilisation des termes $\partial_t \rho$ et $\partial_t(\rho \mathbf{u})$ est liée à l'utilisation du lemme de Gronwall. En particulier, l'estimation BD et le travail fait autour de l'équation de conservation de la masse (voir la partie 7.1.1) est toujours valide sans le terme $\partial_t \rho$. Un des exemples d'utilisation du lemme de Gronwall dans les travaux antérieurs est celui donné plus haut dans l'estimation du terme Υ , voir (7.5). Le résultat qu'on prouve nécessite donc d'introduire des termes de frottement (notés $r_0 |\mathbf{u}| \mathbf{u}$ dans les équations de Navier-Stokes (7.1)). Ces frottements fournissent une estimation supplémentaire : on contrôle $r_0 \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^3$, et le terme Υ peut être contrôlé *via* l'inégalité de Young par

$$\Upsilon \leq \frac{r_0}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^3 + \frac{C}{r_0} |\nabla \tilde{\mathbf{u}}|_{L^\infty(\Omega)}^3 \int_{\Omega} \rho.$$

A l'image de l'estimation de ce terme, on obtient les mêmes résultats que dans le cas non stationnaire, quitte à supposer que le frottement est non nul ($r_0 > 0$).

7.3 Justification de l'équation de Reynolds compressible

On indique dans cette partie les arguments permettant de justifier que lorsque la hauteur du domaine tend vers zéro, les solutions des équations de Navier-Stokes compressible (cas stationnaire ou évolutif) admettent une limite. La pression obtenue à la limite satisfait l'équation de Reynolds compressible.

A notre connaissance, les seules références traitant de ce type de problème sont les travaux de E. Marusic-Paloka et M. Starcevic dans [EM05, EM09]. Dans ces deux articles, ils justifient l'équation de Reynolds compressible comme "limite faible épaisseur" des équations de Stokes pour un gaz parfait. Dans leur modèle, $p(\rho)$ est donc proportionnel à ρ , les viscosités sont constantes et ils ne tiennent pas compte des termes d'inertie $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, ce qui rend leur système initial presque linéaire. Pour ces raisons, leur méthode ne s'adapte pas du tout au cas du résultat que nous avons montré dans [20].

Voici en quelques lignes la façon dont nous avons procédé. De manière relativement classique (voir la partie D.1 page 10), on adimensionne les équations en faisant apparaître les deux grandeurs caractéristiques du domaine : ε pour la hauteur et 1 pour la longueur. Le système de Navier-Stokes compressible (7.1) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) + \partial_z(\rho_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon) = 0, \\ \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon + \rho_\varepsilon w_\varepsilon \partial_z u_\varepsilon = 2\partial_x(\mu(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z(\mu(\rho_\varepsilon) \partial_z u_\varepsilon) + \partial_z(\mu(\rho_\varepsilon) \partial_x w_\varepsilon) \\ \quad + \partial_x(\lambda(\rho_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon + \partial_z w_\varepsilon)) - \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_x \mathbf{P}(\rho_\varepsilon) - r_0 \rho_\varepsilon (u_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}} u_\varepsilon, \\ \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x(\varepsilon w_\varepsilon) + \rho_\varepsilon w_\varepsilon \partial_z(\varepsilon w_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \partial_x(\mu(\rho_\varepsilon) \partial_z u_\varepsilon) + \varepsilon \partial_x(\mu(\rho_\varepsilon) \partial_x w_\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} \partial_z(\mu(\rho_\varepsilon) \partial_z w_\varepsilon) \\ \quad + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(\lambda(\rho_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon + \partial_z w_\varepsilon)) - \frac{1}{\varepsilon^3} \partial_z \mathbf{P}(\rho_\varepsilon) - \varepsilon r_0 \rho_\varepsilon (u_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}} w_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (7.6)$$

En gras, nous avons indiqué les termes qui, formellement, sont prédominants dans chaque équation lorsque ε tend vers 0.

Le résultat de la partie précédente² affirme que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une solution à ce système. Le but de cette partie est d'obtenir des estimations indépendantes de ε pour être capable de passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les équations et montrer ainsi rigoureusement que les termes obtenus à la limite sont uniquement les termes notés en gras.

² Plus exactement le résultat précédent couplé avec ceux correspondant au cas périodique (voir [BD07]) puisque le domaine Ω considéré ici est borné dans une direction et périodique dans l'autre direction.

En pratique, il “suffit” de refaire les estimations des parties précédentes en suivant de près toutes les dépendances par rapport à ε . On en déduit des estimations des vitesses u et w , ainsi que de la densité ρ en fonction de ε . Des propriétés de compacité (utilisant essentiellement des résultats du type “injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte”) permettent de passer à la limite dans tous les termes du système (7.6).

Au final, les limites respectives ρ et u de ρ_ε et u_ε vérifient

$$\begin{cases} \partial_x \left(\int_0^h \rho u \right) = 0, \\ \partial_z (\mu(\rho) \partial_z u) - \partial_x P(\rho) = 0, \\ \partial_z P(\rho) = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Lorsque la loi de pression est monotone, on peut ré-écrire ce système en découplant la vitesse u de la pression p (exactement comme on le fait pour obtenir l'équation de Reynolds dans le cas incompressible). On obtient l'équation de Reynolds compressible suivante (en tenant compte des conditions au bord pour la vitesse u , voir par exemple les conditions aux limites données pour l'équation de Reynolds à la page 12) :

$$\partial_x \left(\frac{h^3}{12} \frac{\rho P'(\rho)}{\mu(\rho)} \partial_x \rho \right) = \partial_x \left(\frac{h}{2} \rho s \right).$$

Il est intéressant de noter que pour une telle équation de Reynolds généralisée, le principe du maximum est valide (voir par exemple [GIM05]). Par conséquent, pour des conditions au bord physiquement réalistes, il existe une constante $\rho_{\min} > 0$ telle que la solution ρ de l'équation de Reynolds (7.7) satisfasse $\rho \geq \rho_{\min}$. On déduit que pour ε assez petit, on a $\rho_\varepsilon \geq \frac{\rho_{\min}}{2} > 0$, ce qui implique que les hypothèses (7.4) faisant intervenir la pression froide sont inutiles.

On notera aussi qu'à partir du système de Navier-Stokes compressible (non stationnaire) on peut obtenir et justifier de la même façon l'équation de Reynolds compressible non stationnaire :

$$\partial_t (\rho h) + \partial_x \left(\frac{h^3}{12} \frac{\rho P'(\rho)}{\mu(\rho)} \partial_x \rho \right) = \partial_x \left(\frac{h}{2} \rho s \right).$$

Conclusion et perspectives

Le contexte général dans lequel se situent les travaux présentés dans ce mémoire est celui des équations aux dérivées partielles intervenant dans le domaine de la mécanique des fluides. L'analyse asymptotique est au coeur de ces études au sens où dans la plupart des chapitres intervient un nombre réel ε . Ce nombre se doit d'être très petit... et tend même vers 0 dans de très nombreux paragraphes.

Du point de vue de la modélisation, un tel petit nombre est généralement la conséquence d'un contraste entre deux grandeurs physiques. Typiquement dans un roulement à billes l'épaisseur de la couche de fluide peut être de l'ordre de $\ell = 0.01\text{mm}$ alors que la taille de la bille vaut $L = 1\text{cm}$. Le rapport (sans dimension) ℓ/L est un bon candidat pour ε ... Un des points discuté dans ce mémoire concerne ces choix de grandeurs caractéristiques. Ainsi, dans le chapitre 1, le modèle de Reynolds-Oldroyd est obtenu après avoir judicieusement choisi les ordres de grandeur des termes d'extra-contrainte. Généralement, ces choix sont guidés par un certain équilibre des termes les plus pertinents physiquement. Le chapitre 4 au sujet des modèles de Saint Venant est un exemple frappant d'une telle étude de modélisation : de nombreux paramètres physiques sont en jeu (dans le cas du chapitre 4 ces paramètres sont décrits par les quatre grandeurs sans dimension : le rapport des longueurs ε , le nombre de Reynolds Re , le nombre de Froude Fr et le nombre de Weber We) et il faut trouver un cadre physiquement réaliste dans lequel un modèle asymptotique peut être dérivé. Ces choix peuvent toujours être discutés et proposent une alternative à d'autres modèles. Par exemple le modèle diphasique à interface diffuse dans un domaine mince (voir le chapitre 6) permet de comparer nos résultats avec ceux des modèles usuels comme le modèle d'Elrod-Adams. De même, dans le chapitre 1 consacré aux écoulement non newtonien de type Oldroyd, on a comparé nos résultats avec ceux de J. Tichy [Tic96] ou de H. Bellout et F. Talay Akyildiz [BTA04] qui n'avaient pas effectué le même adimensionnement.

Même si mes travaux s'inscrivent clairement dans une thématique de mathématiques appliquées, de nombreux détours m'ont conduit à analyser assez finement certaines équations aux dérivées partielles. D'un coté il faut généralement justifier des passages à la limite ($\varepsilon \rightarrow 0$) dans des équations aux dérivées partielles dont le caractère bien posé pour $\varepsilon > 0$ n'est pas toujours une mince affaire (voir par exemple le cas des fluides compressibles abordé au chapitre 7 ou le cas du modèle d'Oldroyd discuté au chapitre 1). Ces passages à la limite nécessitent d'utiliser des outils assez variés (techniques d'homogénéisation et méthodes de correcteurs au chapitre 3, estimations d'énergie et études de couche limite aux chapitres 1 et 2, etc). D'un autre coté les problèmes limites obtenus (moralement lorsque $\varepsilon = 0$) sont généralement nouveaux et leur étude théorique n'est pas toujours immédiate. En témoigne le chapitre 2 au cours duquel de nouveaux résultats au sujet de l'équation de Fokker-Planck stationnaire en domaine borné ont été prouvés, répondant ainsi à des questions beaucoup plus générales que celle abordées dans le contexte de ce mémoire.

Des validations numériques des résultats obtenus ont souvent été réalisées. Il semble essentiel de pouvoir, au moins modestement, intégrer les équations étudiées au sein d'un code de calcul ou de pouvoir développer un propre algorithme adapté au modèle. En général cette étape algorithmique est non seulement intéressante du point de vue numérique mais aussi très riche pour l'étude théorique et la compréhension des phénomènes (mathématiques et physiques). Par exemple le schéma numérique mis en place pour l'étude du modèle Reynolds-Oldroyd est très proche de la preuve de l'existence d'une solution au même modèle. Dans ce même chapitre 1, l'analyse de l'erreur est un "copier-coller" d'une estimation d'énergie que l'on peut faire dans le cas du modèle

continu.

Ces trois points de vue (modélisation, théorique et numérique) donnent un bon aperçu des travaux que j'ai effectué depuis 2004. La façon la plus naturelle de conclure ce mémoire est d'en donner quelques perspectives, reprenant en partie certaines ouvertures évoquées au cours des chapitres précédents.

Mathématiques appliquées et applications des mathématiques

D'une manière générale les mathématiques appliquées se doivent d'être appliquées. Bien que j'ai déjà travaillé en collaboration avec des "non mathématiciens", certains de mes travaux peuvent être reformulés et retravaillés afin de s'adapter à un public plus appliqué. Avec Guy Bayada et Sébastien Martin nous sommes actuellement en train de reprendre les résultats concernant le modèle de Reynolds-Oldroyd (chapitre 1) afin de se placer dans un cadre physique précis et réaliste. Les essais numériques pourront alors montrer que nos résultats théoriques peuvent se relire comme des résultats appliqués avec des "vraies" valeurs physiques. Naturellement, pour que le dialogue s'installe facilement avec des mécaniciens, il faut pouvoir répondre à leurs attentes. En particulier, il faut pouvoir réaliser des tests numériques relativement rapidement pour des jeux de données (données initiales, conditions au bord, valeurs des coefficients) très variés. Il est donc important d'avoir un code de calcul relativement bien structuré et documenté. Ce processus est assez général et la plupart des études asymptotiques que j'ai menées pourraient être confrontées à la réalité. L'effort de se rapprocher des applications peut aussi permettre d'avoir d'autres idées d'applications des modèles présentés dans ce mémoire. Ainsi, l'écoulement sanguin ou la micro-fluidique sont clairement des domaines où des fluides généralement non newtoniens s'écoulent dans des domaines minces...

Modéliser le phénomène de cavitation

Le chapitre 6 est essentiellement issu du travail de thèse de Bérénice Grec que j'ai co-encadré avec Guy Bayada. Il consiste en une étude théorique et numérique d'un nouveau modèle d'écoulement diphasique dans un domaine mince. Depuis cette étude, de nombreuses questions s'enchaînent et la plupart d'entre-elles tournent autour de la "cavitation". Ce phénomène de création de bulles d'air lors des chutes de pression est à l'origine de nombreux phénomènes physiques très répandus et généralement liés à l'usure des matériaux. Il semble difficile à modéliser car aucun modèle actuel n'est pertinent. Ceci en fait certainement un challenge très intéressant pour les prochaines années dans le milieu de la mécanique des fluides et des domaines minces. Les premières idées sont de comparer le modèle Reynolds-Cahn-Hilliard (introduit au chapitre 6) avec les autres modèles déjà connus (celui d'Elrod-Adams [Elr81, EA75] ou encore celui basé sur l'équation de Buckley-Leverett [BMV06, Pao03]), puis ensuite de comprendre et de prendre en compte la physique qui fait défaut à ces modèles.

Montrer que les fluides existeront toujours...

D'un point de vue plus théorique, de très nombreux problèmes restent non résolus actuellement. Sans parler des problèmes liés aux équations de Navier-Stokes en dimension 3, on peut mentionner le problème d'existence globale (même en dimension 2) du modèle d'Oldroyd que j'ai présenté dans le chapitre 1, ou même du modèle de FENE évoqué au chapitre 2. Ainsi dans le chapitre 2, j'ai montré que dans un certain régime (issu de problématiques en domaine mince) la relation constitutive fournissant la rhéologie était bien posée : pour chaque champ de vitesse on sait que la contrainte existe. Un nouveau pas dans la compréhension de ces modèles pour des temps longs serait de savoir s'il existe une solution stationnaire non triviale (c'est-à-dire pour laquelle l'extra-contrainte a véritablement un rôle dans le mouvement : $\text{div}(\boldsymbol{\tau}) \neq \mathbf{0}$) des équations complètes du mouvement (équations (1), (2), (3), (9) et (10)).

Des rugosités plus rugueuses ?

Dans le chapitre 3 j'ai résumé les travaux correspondant aux références [10] et [18]. Ceux-ci s'intéressent à la réponse d'un fluide selon la présence de rugosités au bord du domaine. Ces rugosités sont décrites dans les

deux cas par une frontière périodique dont la fréquence et la période sont d'ordre ε^2 , alors que le domaine fluide est d'épaisseur ε .

- La première question naturelle est la suivante : que se passe-t-il lorsque la rugosité n'est plus décrite par une fonction périodique ? Dans le cas d'un domaine fluide bidimensionnel de taille 1 et des rugosités "aléatoires" de taille ε , des résultats récents ont été obtenus par David Gérard-Varet (voir par exemple [GV09]). On peut imaginer prolonger ces résultats dans le cadre des films minces et en déduire les effets de la forme des rugosités sur l'approximation obtenue lorsque ε tend vers 0.

- La seconde question concerne le choix des ordres de grandeur pour le domaine et pour les rugosités. On peut imaginer obtenir des résultats plus généraux pour des domaines d'épaisseur ε mais avec des rugosités de taille ε^a , $a > 1$. On notera simplement que dans le chapitre 3 de ce mémoire (partie 3.2), le choix $a = 2$ est essentiel pour pouvoir fermer "simplement" le système sur les premiers profils. La raison semble purement algébrique et on ne voit pas de formulation équivalente pour $a \neq 2$.

Références bibliographiques

A - Travaux de l'auteur

Les articles mentionnés ci-dessous sont disponibles sur <http://math.univ-lyon1.fr/~chupin>. Ils regroupent mes travaux effectués pendant ma thèse (références [9, 12, 13, 14]), la thèse elle-même [11], ainsi que tous les travaux effectués depuis.

Certains articles (comme [1] ou [3]) ne sont pas discutés dans le document de synthèse, par souci de brièveté et de cohérence.

- [1] S. Balac and L. Chupin. Fast approximate solution of Bloch equation for simulation of RF artifacts in magnetic resonance imaging. *Math. Comput. Modelling*, 48(11-12) :1901–1913, 2008.
- [2] G. Bayada, L. Chupin, and B. Grec. A new model of diphasic fluids in thin films. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics - Dedicated to Giovanni Paolo Galdi on the occasion of his 60th birthday, to appear*, 2008.
- [3] G. Bayada, L. Chupin, and B. Grec. An unconditional existence result for elastohydrodynamic piezo-viscous lubrication problems with Elrod-Adams model of cavitation. *Differential Integral Equations*, 21(1-2) :41–62, 2008.
- [4] G. Bayada, L. Chupin, and B. Grec. Numerical result on diphasic thin film flows. *In preparation*, 2009.
- [5] G. Bayada, L. Chupin, and B. Grec. Viscoelastic fluids in thin domains : a mathematical proof. *Asymptotic Analysis, to appear*, 2009.
- [6] G. Bayada, L. Chupin, and S. Martin. Viscoelastic fluids in a thin domain. *Quart. Appl. Math.*, 65(4) :625–651, 2007.
- [7] G. Bayada, L. Chupin, and S. Martin. Viscoelastic fluids in a thin domain : a mathematical study for a non-Newtonian lubrication problem. In *Mathematical modeling, simulation, visualization and e-learning*, pages 315–321. Springer, Berlin, 2008.
- [8] M. Boutounet, L. Chupin, P. Noble, and J.-P. Vila. Shallow water viscous flows for arbitrary topography. *Commun. Math. Sci.*, 6(1) :29–55, 2008.
- [9] F. Boyer, L. Chupin, and P. Fabrie. Numerical study of viscoelastic mixtures through a Cahn-Hilliard flow model. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 23(5) :759–780, 2004.
- [10] D. Bresch, C. Choquet, L. Chupin, T. Colin, and M. Gisclon. Roughness-induced effect at main order on the reynolds approximation. *Submitted*, 2009.
- [11] L. Chupin. *Contribution à l'étude des mélanges de fluides visco-élastiques*. Thèse de doctorat - Université Bordeaux 1, 2003.
- [12] L. Chupin. Existence result for a mixture of non Newtonian flows with stress diffusion using the Cahn-Hilliard formulation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 3(1) :45–68, 2003.
- [13] L. Chupin. Some theoretical results concerning diphasic viscoelastic flows of the Oldroyd kind. *Adv. Differential Equations*, 9(9-10) :1039–1078, 2004.

- [14] L. Chupin. Boundary layers for stress diffusive perturbation in viscoelastic fluids. *Appl. Math. Lett.*, 18(6) :641–647, 2005.
- [15] L. Chupin. The fene model for viscoelastic thin film flows. *Methods and Applications of Analysis*, 2009.
- [16] L. Chupin. The fene viscoelastic model and thin film flows. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 347 :1041–1046, 2009.
- [17] L. Chupin. Fokker-planck equation in bounded domain. *Annales de l'Institut Fourier*, 2009.
- [18] L. Chupin and S. Martin. Rigorous lubrication approximation of the stokes flow with rough surfaces. *In preparation*, 2009.
- [19] L. Chupin and L. I. Palade. Generalized newtonian and bingham fluid behavior near a sharp edge : application to thin film flow. *Physics Letters A*, 372(42) :6404–6411, 2008.
- [20] L. Chupin and R. Sart. Existence result for stationary compressible fluids and asymptotic behavior in thin films. *Submitted*, 2009.

B - Autres références citées dans ce mémoire

- [AJ92] G. Aronsson and U. Janfalk. On hele-shaw flow of power-law fluids. *European J. Appl. Math.*, 3 n. 4 :343–366, 1992.
- [All92] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [BC86] G. Bayada and M. Chambat. The transition between the Stokes equations and the reynolds equation : a mathematical proof. *Appl. Math. Optim.*, 14(1) :73–93, 1986.
- [BC88] G. Bayada and M. Chambat. New models in the theory of the hydrodynamic lubrication of rough surfaces. *Trans. of the AMS J. of Trib.*, 110 :402–407, 1988.
- [BC89] G. Bayada and M. Chambat. Homogenization of the Stokes system in a thin film flow with rapidly varying thickness. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 23(2) :205–234, 1989.
- [BCC05] N. Benhaboucha, M. Chambat, and I. Ciuperca. Asymptotic behaviour of pressure and stresses in a thin film flow with a rough boundary. *Quart. Appl. Math.*, 63(2) :369–400, 2005.
- [BD03] D. Bresch and B. Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.*, 238(1-2) :211–223, 2003.
- [BD06a] D. Bresch and B. Desjardins. On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(4) :362–368, 2006.
- [BD06b] D. Bresch and B. Desjardins. Stabilité de solutions faibles globales pour les équations de Navier-Stokes compressible avec température. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(3) :219–224, 2006.
- [BD07] D. Bresch and B. Desjardins. On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(1) :57–90, 2007.
- [BDGV07] D. Bresch, B. Desjardins, and D. Gérard-Varet. On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(2) :227–235, 2007.
- [BDL03] D. Bresch, B. Desjardins, and C.-K. Lin. On some compressible fluid models : Korteweg, lubrication, and shallow water systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(3-4) :843–868, 2003.

- [BF06] F. Boyer and P. Fabrie. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [BGV08] A. Basson and D. Gérard-Varet. Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(7) :941–987, 2008.
- [BHAC77] R.B. Bird, O. Hassager, R.C. Armonstrong, and C.F. Curtiss. *Dynamics of Polymeric Fluids*, volume 2 of *Kinetic Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [BL06] F. Boyer and C. Lapuerta. Study of a three component Cahn-Hilliard flow model. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(4) :653–687, 2006.
- [BM08a] D. Bresch and V. Milisic. Higher order boundary layer correctors and wall-laws derivation : a unified approach. *Quart. Appl. Math.*, in press, 2008.
- [BM08b] D. Bresch and V. Milisic. Vers des lois de parois multi-échelle implicites. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(15-16) :833–838, 2008.
- [BMCPV03] F. Bouchut, A. Mangeney-Castelnau, B. Perthame, and J.-P. Vilotte. A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow water flows. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(6) :531–536, 2003.
- [BMV06] G. Bayada, S. Martin, and C. Vázquez. About a generalized Buckley-Leverett equation and lubrication multifluid flow. *European J. Appl. Math.*, 17(5) :491–524, 2006.
- [Boy99] F. Boyer. Mathematical study of multi-phase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptot. Anal.*, 20(2) :175–212, 1999.
- [Boy00] F. Boyer. Theoretical and numerical study of multi-phase flows through order parameter formulation. In *International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999)*, pages 488–490. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [Boy01] F. Boyer. *Écoulements diphasiques de type Cahn-Hilliard*. Thèse de doctorat - Université Bordeaux I, 2001.
- [Boy02] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computers and Fluids*, 31 no 1 :41–68, 2002.
- [BSS05] J.W. Barrett, C. Schwab, and E. Süli. Existence of global weak solutions for some polymeric flow models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(6) :939–983, 2005.
- [BTA04] H. Bellout and F. Talay Akyildiz. Viscoelastic lubrication with Phan-Thein-Tanner fluid (PTT). *ASME J. Tribol.*, 126 :288–291, 2004.
- [BW04] F. Bouchut and M. Westdickenberg. Gravity driven shallow water models for arbitrary topography. *Commun. Math. Sci.*, 2(3) :359–389, 2004.
- [CH58] J.W. Cahn and J.E. Hilliard. Free energy of non-uniform system. i. interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 28 :258–267, 1958.
- [CJBK91] R. M. Crone, M. S. Jhon, B. Bhushan, and T. E. Karis. Modeling the flying characteristics of a rough magnetic head over a rough rigid-disk surface. *ASME J. Tribol.*, 113 :739–749, 1991.
- [DLP02] P. Degond, M. Lemou, and M. Picasso. Viscoelastic fluid models derived from kinetic equations for polymers. *SIAM J. Appl. Math.*, 62 :1501–1519, 2002.
- [DLP04] P. Degond, M. Lemou, and M. Picasso. Constitutive relations for viscoelastic fluid models derived from kinetic theory. In *Dispersive transport equations and multiscale models (Minneapolis, MN, 2000)*, volume 136 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 77–89. Springer, New York, 2004.
- [Dro02] J. Droniou. Non-coercive linear elliptic problems. *Potential Anal.*, 17(2) :181–203, 2002.

- [DV09] J. Droniou and J.-L. Vazquez. Noncoercive convection-diffusion elliptic problems with neumann boundary conditions. *Calc. Var.*, 34(4) :413–434, 2009.
- [Dys77] A. Dyson. Hydrodynamic lubrication of rough surface - a review work. *Proceedings of the 4th Leeds-Lyon Symposium on surfaces roughness on lubrication*, pages 61–69, 1977.
- [EA75] H.G. Elrod and M.L. Adams. A computer program for cavitation. cavitation and related phenomena in lubrication. *Proceedings - Mech. Eng. Publ. Ltd*, pages 37–42, 1975.
- [Elr77] H.G. Elrod. A review of theories for the fluid dynamic effects of roughness on laminar lubricating films. *Proceedings of the 4th Leeds-Lyon Symposium on surfaces roughness on lubrication*, pages 11–26, 1977.
- [Elr81] H.G. Elrod. A cavitation algorithm. *ASME J. Lubrication Technol.*, 103 :350–354, 1981.
- [EM05] Marusic-Paloka E. and Starcevic M. Rigorous justification of the reynolds equations for gas lubrication. *Comptes Rendus Mecanique, Paris*, 333 :534–541, 2005.
- [EM09] Marusic-Paloka E. and Starcevic M. Derivation of reynolds equation for gas lubrication via asymptotic analysis of the compressible navier-stokes system. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 2009.
- [FCGO94] E. Fernández-Cara, F. Guillén, and R.-R. Ortega. Existence et unicité de solution forte locale en temps pour des fluides non newtoniens de type Oldroyd (version L^s-L^r). *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(4) :411–416, 1994.
- [FCGO98] E. Fernández-Cara, F. Guillén, and R.-R. Ortega. Some theoretical results concerning non-Newtonian fluids of the Oldroyd kind. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 26(1) :1–29, 1998.
- [GIM05] Buscaglia G., Ciuperca I., and Jai M. Existence and uniqueness for several non-linear elliptic problems arising in lubrication theory. *J. Differential Equations*, 218 no 1 :187–215, 2005.
- [GKL99] Lielens G., R. Keunings, and V. Legat. The fene-l and fene-ls closure approximations to the kinetic theory of finitely extensible dumbbells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 87 :179–196, 1999.
- [GM01] Buscaglia G. and Jai M. A new numerical scheme for non uniform homogenized problems : application to the non linear reynolds compressible equation. *Math. Probl. Eng.*, 7 no 4 :355–378, 2001.
- [GMB01] I. Ghosh, G.H. McKinley, and R.C. Brown, R.A. and Armstrong. Deficiencies of FENE dumbbell models in describing the rapid stretching of dilute polymer solutions. *Journal of Rheology*, 45 :721, 2001.
- [GP01] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1) :89–102, 2001.
- [Gre08] B. Grec. *Fluides complexes en films minces*. Thèse de doctorat - Université de Lyon, 2008.
- [GS87] C. Guillopé and J.-C. Saut. Résultats d’existence pour des fluides viscoélastiques à loi de comportement de type différentiel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305(11) :489–492, 1987.
- [GS90a] C. Guillopé and J.-C. Saut. Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law. *Nonlinear Anal.*, 15(9) :849–869, 1990.
- [GS90b] C. Guillopé and J.-C. Saut. Global existence and one-dimensional nonlinear stability of shearing motions of viscoelastic fluids of Oldroyd type. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 24(3) :369–401, 1990.
- [GS91] C. Guillopé and J.-C. Saut. Existence and stability of steady flows of weakly viscoelastic fluids. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 119(1-2) :137–158, 1991.

- [GS92] C. Guillopé and J.-C. Saut. Mathematical problems arising in differential models for viscoelastic fluids. In *Mathematical topics in fluid mechanics (Lisbon, 1991)*, volume 274 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 64–92. Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.
- [GV09] D. Gérard-Varet. The Navier wall law at a boundary with random roughness. *Comm. Math. Phys.*, 286(1) :81–110, 2009.
- [HN04] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 171(2) :151–218, 2004.
- [HN05] B. Helffer and F. Nier. *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, volume 1862 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [HRI77] R.-R. Huilgol and Tanner R.-I. The separation of a second order fluid at a straight edge. *J Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2 :89–96, 1977.
- [HTL88] O. Hassager and Lauridsen T.-L. Singular behavior of power-law fluids in hele shaw flow. *J Non-Newtonian Fluid Mech.*, 29 :337–346, 1988.
- [JLLB04] B. Jourdain, T. Lelièvre, and C. Le Bris. Existence of solution for a micro-macro model of polymeric fluid : the FENE model. *J. Funct. Anal.*, 209(1) :162–193, 2004.
- [JM01] W. Jäger and A. Mikelić. On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow. *J. Differential Equations*, 170(1) :96–122, 2001.
- [JM03] W. Jäger and A. Mikelić. Couette flows over a rough boundary and drag reduction. *Comm. Math. Phys.*, 232(3) :429–455, 2003.
- [LC03] A. Lozinski and C. Chauvière. A fast solver for Fokker-Planck equation applied to viscoelastic flows calculations : 2D FENE model. *J. Comput. Phys.*, 189(2) :607–625, 2003.
- [Lio93] P.-L. Lions. Compacité des solutions des équations de navier-stokes compressibles isentropiques. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 317 :115–120, 1993.
- [Lio98] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid dynamics, vol. 2*. Oxford Science Publication, 1998.
- [LM00] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Global solutions for some Oldroyd models of non-Newtonian flows. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 21(2) :131–146, 2000.
- [LM07] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Global existence of weak solutions to some micro-macro models. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(1) :15–20, 2007.
- [LZZ04] T. Li, H. Zhang, and P. Zhang. Local existence for the dumbbell model of polymeric fluids. *Comm. PDE*, 29 :903–923, 2004.
- [Mas08] N. Masmoudi. Well-posedness for the FENE dumbbell model of polymeric flows. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(12) :1685–1714, 2008.
- [Mét76] G. Métivier. Comportement asymptotique des valeurs propres d’opérateurs elliptiques dégénérés. In *Journées : Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975)*, pages 215–249. Astérisque, No. 34–35. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [Mof63] H.-K. Moffatt. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*, 18 :1–18, 1963.
- [MT04] L. Molinet and R. Talhouk. On the global and periodic regular flows of viscoelastic fluids with a differential constitutive law. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 11(3) :349–359, 2004.
- [Noa07] A. I. Noarov. Generalized solvability of the stationary Fokker-Planck equation. *Differ. Uravn.*, 43(6) :813–819, 863, 2007.
- [Old50] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 200 :523–541, 1950.

- [Pao03] L. Paoli. Asymptotic behavior of a two fluid flow in a thin domain : from Stokes equations to Buckley-Leverett equation and Reynolds law. *Asymptot. Anal.*, 34(2) :93–120, 2003.
- [Ren91] M. Renardy. An existence theorem for model equations resulting from kinetic theories of polymer solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(2) :313–327, 1991.
- [Rey86] O. Reynolds. On the theory of lubrication and its application to mr beauchamp tower’s experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A 117 :157–234, 1886.
- [SÉT05] J.-M. Sac-Épée and K. Taous. On a wide class of nonlinear models for non-newtonian fluids with mixed boundary conditions in thin domains. *Asymptot. Anal.*, 44 :151–171, 2005.
- [Tao96] K. Taous. Équations de Reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(11) :1213–1218, 1996.
- [Tic96] J. Tichy. Non-Newtonian lubrication with the convective Maxwell model. *ASME J. Tribol.*, 118 :344–349, 1996.
- [Vig07] P. Vigneaux. *Méthodes Level Set pour des problèmes d’interface en microfluidique*. Thèse de doctorat - Université Bordeaux 1, 2007.
- [Wil09] J. Wilkening. Practical error estimates for reynolds’ lubrication approximation and its higher order corrections. *to appear in SIAM J. Math. Anal.*, 2009.
- [Zee88] E.-C. Zeeman. Stability of dynamical systems. *Nonlinearity*, 1(1) :115–155, 1988.