Mathématiques - Asinsa 2

Année 2006/2007 - semestre 2

DEVOIR SURVEILLE – Durée : 3h

Exercice 1 : Algèbre bilinéaire

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On note F le sous-ensemble de E constitué des applications s'annulant en zéro : $F = \{f \in E\ ; \quad f(0) = 0\}$. Considérons $g \in F^\perp$ (la notation $\perp$ désigne l'orthogonal pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$). On introduit la suite d'applications f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \\ ng(1/n)x & \text{si } 0 \leq x < 1/n \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n \in F$.
2. En utilisant l'expression de f_n, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (f_n|g) = ||g||^2$.
3. En déduire que $F^\perp = \{0\}$.
4. Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 2 : Théorème des fonctions implicites

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 3xyz = x^3 + y^3 + z^3\}$.

1. Quels sont les points d'intersection de la droite paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (1,1,t)$ et de l'ensemble $\mathcal{S}$?
2. Montrer qu'au point $(1,1,1)$, le théorème des fonctions implicites ne permet pas d'écrire localement l'ensemble $\mathcal{S}$ à l'aide d'une équation cartésienne du type $z = \varphi(x,y)$ ou $x = \varphi(y,z)$ ou $y = \varphi(x,z)$.
3. Montrer qu'au point $(1,1,-2)$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est décrit localement par une équation du type $z = \varphi(x,y)$.
4. Préciser les dérivées partielles premières de l'application φ en $(1,1)$.
5. Ecrire le développement de Taylor au premier ordre pour φ au voisinage de $(1,1)$ et donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ tangent à $\mathcal{S}$ au point $(1,1,-2)$.
6. Montrer que le plan tangent $\mathcal{P}$ est inclu dans l'ensemble $\mathcal{S}$. En déduire l'expression explicite de φ.
7. Décomposer la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ en une somme de trois carrés de formes linéaires.
8. En développant la quantité $(x+y+z)q(x,y,z)$, montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est la réunion du plan $\mathcal{P}$ et d'une droite dont on donnera un paramétrage.

Problème : Étude des fonctions harmoniques du plan

Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Le laplacien de l'application f est, par définition, l'application Δf définie dans l'ouvert U par la relation suivante :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Une telle application f est dite *harmonique* si son laplacien est nul sur U :

$$\forall (x,y) \in U \quad \Delta f(x,y) = 0.$$

Le but du problème est de donner des exemples de telles fonctions puis de démontrer certaines propriétés de ces fonctions : le princpe du maximum, la propriété de la moyenne puis le fait que les fonctions bornées harmoniques dans le plan sont constantes.

Dans tout ce problème, le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne.

Partie 1 : Quelques exemples de fonctions harmoniques

1. Résoudre l'équation différentielle suivante, c'est-à-dire trouver toutes les applications u définies sur $]0,+\infty[$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\forall r \in]0,+\infty[\qquad \frac{1}{r}u'(r) + u''(r) = 0.$$

   Indication : penser à la relation $(ru'(r))' = u'(r) + ru''(r)$.

2. En utilisant la question précédente, déterminer les applications u réelles, définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur la demi-droite $]0,+\infty[$, telles que l'application h, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par la relation ci-dessous, soit harmonique (on pourra poser $r = \sqrt{x^2+y^2}$).

$$h(x,y) = u(\sqrt{x^2+y^2}).$$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante : $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad 2tv'(t) + (1+t^2)v''(t) = 0.$

   Indication : comme pour la première question, essayer de faire apparaître la dérivée d'un produit.

4. En utilisant la question précédente, déterminer les application v réelles, définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur la droite $\mathbb{R}$, telles que l'application k, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$ par la relation ci-dessous, soit harmonique.

$$k(x,y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Partie 2 : Le principe du maximum

Soit f une application réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon r (avec $r > 0$); soit C le cercle de centre O et de rayon r :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \quad x^2+y^2 \leq r^2\}, \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \quad x^2+y^2 = r^2\}.$$

Etant donné un entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par la relation

$$f_n(x,y) = f(x,y) + \frac{x^2+y^2}{n}.$$

1. Démontrer qu'il existe un point (a_n, b_n), appartenant au disque fermé D, en lequel l'application f_n atteint son maximum.
2. Démontrer que, si le point (a_n, b_n) appartient à l'intérieur du disque D alors

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(a_n, b_n) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(a_n, b_n) \leq 0.$$

   Indication : on pourra utiliser le fait que si une application $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ atteint un maximum en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ alors on a $g''(x_0) \leq 0$.
3. En calculant le laplacien de la fonction f_n, en déduire que le point (a_n, b_n) est situé sur le cercle C.
4. Démontrer qu'il existe un point (a, b) du cercle C en lequel la fonction f atteint son maximum sur D.
5. En déduire que si deux applications sont harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$ et égales le long d'un cercle C du plan alors ces deux applications sont égales dans tout le disque D de frontière C.

Partie 3 : Propriété de la moyenne

Soit f une application réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Etant donné un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on considère l'application F définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

On admet que cette application F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que sa dérivée s'obtient en dérivant sous le symbole d'intégration.[1]

1. Pour tout $\rho \in [0, +\infty[$, préciser la valeur de $F'(\rho)$ en utilisant les dérivées partielles de l'application f.
2. Démontrer que le produit $\rho F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\omega = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$ le long du cercle Γ de centre (x_0, y_0) et de rayon ρ :

$$\rho F'(\rho) = \int_\Gamma A(x, y)\mathrm{d}x + B(x, y)\mathrm{d}y.$$

   On précisera la valeur des coefficients A et B en fonction des dérivées partielles de f.
3. Montrer que la forme différentielle ω est une forme fermée.
4. En déduire que la fonction F est constante; préciser sa valeur.
5. Soit D le disque fermé, de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$. En utilisant des coordonnées polaires adaptées, démontrer que l'on a

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r^2 f(x_0, y_0).$$

[1] Plus exactement, si une application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors l'application G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_a^b g(t, x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$G'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t.$$

Partie 4 : Fonctions harmoniques bornées dans le plan

Soit f une application réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Supposons que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x, y)| \leq C.$$

1. Soient D_1 et D_2 deux disques fermés de centres distincts $(0, 0)$ et (x_0, y_0). Soit $r > 0$ le rayon commun de ces disques. La distance d entre les deux centres est supposée strictement inférieure au rayon r : $0 < d < r$. Soit E l'ensemble des points du disque D_2 qui ne sont pas dans le disque D_1.

   En considérant par exemple un disque contenu dans l'intersection des disques D_1 et D_2, démontrer que l'aire de E est majorée par l'expression $\pi r d$.

2. A l'aide par exemple de la question 5, Partie 3, donner un majorant de la valeur absolue de la différence $f(x_0, y_0) - f(0, 0)$ au moyen de la constante C, du rayon r et de d.

3. En déduire que l'application f est constante.

CORRECTION

Exercice 1 : Algèbre bilinéaire

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est par définition continue sur $[0, 1/n[$ ainsi que sur $[1/n, 1]$. Pour montrer qu'elle est continue sur $[0, 1]$, il suffit de vérifier que $\lim_{x < \rightarrow 1/n} f_n(x) = f_n(1/n)$, ce qui est immédiat. D'autre part, pour montrer que $f_n \in F$, on vérifie que $f_n(0) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $(f_n|g)$ est donnée par

$$(f_n|g) = \int_0^{1/n} ng\left(\frac{1}{n}\right) xg(x)\ \mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 g(x)^2\ \mathrm{d}x = ng\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^{1/n} xg(x)\ \mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 g(x)^2\ \mathrm{d}x.$$

   Puisque g est continue sur un ensemble fermé et borné $[0, 1]$, on sait que l'application g est bornée sur $[0, 1]$. Notons C la borne supérieure de $|g|$ sur $[0, 1]$. On a alors

$$\left| \int_0^{1/n} xg(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq C \int_0^{1/n} x\ \mathrm{d}x = \frac{C}{2n^2}.$$

   On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} (f_n|g) = \int_0^1 g(x)^2\ \mathrm{d}x = ||g||^2$.

3. Puisque $g \in F^\perp$ et que $f_n \in F$, on a $(f_n|g) = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} (f_n|g) = 0$. Par unicité de la limite, on obtient $||g||^2 = 0$, c'est-à-dire $g = 0$. Autrement dit, si $g \in F^\perp$ alors $g = 0$: $F^\perp = \{0\}$.

4. On a ainsi $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp$. Or, toutes les applications de E sont orthogonales à l'application nulle : $(F^\perp)^\perp = E$.

Exercice 2 : Théorème des fonctions implicites

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un point appartenant à la droite paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (1, 1, t)$ et la surface $\mathcal{S}$. Il existe donc un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = 1$, $y = 1$ et $z = t$, et d'autre part on a $3xyz = x^3 + y^3 + z^3$. Ainsi, le paramètre t satisfait $3t = 2 + t^3$. Ce polynôme admet 1 et -2 comme racine ce qui montre que l'intersection de la droite et de la surface contient exactement deux points : $(1, 1, 1)$ et $(1, 1, -2)$.

2. Notons f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x, y, z) = 3xyz - (x^3 + y^3 + z^3).$$

   Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 0$, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage du point $(1, 1, 1)$.

3. On vérifie les hypothèses du théorème des fonctions implicites : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, $f(1, 1, -2) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, -2) = -9 \neq 0$. La surface est donc décrite localement par une équation du type $z = \varphi(x, y)$ où φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'application φ satisfait $\varphi(1, 1) = -2$.

4. On dérive la relation (vraie pour (x, y) au voisinage de $(1, 1)$) $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ par rapport à x puis à y. On choisit ensuite $(x, y) = (1, 1)$ pour en déduire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1) = -1.$$

5. A l'aide de la valeur de φ et des dérivées partielles premières de φ en $(1,1)$, on a le développement de Taylor suivant au voisinage de $(1,1)$:

$$\varphi(x,y) = -2-(x-1)-(y-1)+\mathcal{O}(\|(x,y)\|^2) = -x-y+\mathcal{O}(\|(x,y)\|^2).$$

   Le plan tangent à la surface au point $(1,1,-2)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.

6. Si $(x,y,z)\in\mathcal{P}$ alors on a $z=-x-y$ et on trouve que $3xyz = x^3+y^3+z^3$ c'est-à-dire $(x,y,z)\in\mathcal{S}$ ce qui montre l'inclusion $\mathcal{P}\subset\mathcal{S}$. Ainsi, au voisinage de $(1,1,-2)$, l'ensemble $\mathcal{S}$ correspond exactement au plan $\mathcal{P}$. L'application φ est donnée par $\varphi(x,y)=-x-y$.

7. En utilisant, par exemple la méthode de Gauss, on obtient $q(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$.

8. On a $(x+y+z)q(x,y,z) = f(x,y,z)$. Ainsi, $(x,y,z)\in\mathcal{S}$ est équivalent à $(x,y,z)\in\mathcal{P}$ ou $q(x,y,z)=0$. Etant donné la décomposition précédente de q, on a $q(x,y,z)=0$ si et seulement si $x=y=z$. Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ est la réunion du plan $\mathcal{P}$ et de la droite paramétrée par $t\in\mathbb{R}\mapsto(t,t,t)$.

Problème : Étude des fonctions harmoniques du plan

Partie 1 : Quelques exemples de fonctions harmoniques

1. Une application $u\in\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ est une solution si et seulement si $(ru'(r))'=0$ pour tout $r\in\,]0,+\infty[$. Cette dernière équation se résoud simplement en intégrant deux fois. On a

$$u(r) = A\ln(r)+B \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels.}$$

2. Si une application h du type $h(x,y)=u(\sqrt{x^2+y^2})$ est harmonique alors, en calculant le laplacien de h par rapport aux dérivées de u (dérivées des fonctions composées), u est nécessairement solution de l'équation résolue dans la question précédente : $u(r)=A\ln(r)+B$.

3. On remarque que $((1+t^2)v'(t))' = 2tv'(t)+(1+t^2)v''(t)$. On peut donc intégrer facilement l'équation sur v :

$$v(t) = C\arctan(t)+D \quad \text{où } C \text{ et } D \text{ sont deux réels.}$$

4. Une application k du type $k(x,y)=v(y/x)$ est harmonique si v est solution de l'équation résolue dans la question précédente : $v(t)=C\arctan(t)+D$.

Partie 2 : Le principe du maximum

1. L'application f_n est continue sur un ensemble fermé et borné (le disque D), on sait donc qu'elle atteint ses bornes, et en particulier son maximum, sur D.

2. La dérivée seconde de f_n par rapport à la variable x au point (a_n,b_n) est par définition la dérivée seconde de l'application $x\mapsto f_n(x,b_n)$ au point a_n. Puisque cette application atteint son maximum en a_n, on sait que la dérivée seconde y est négative (attention, ceci n'est valable uniquement si la fonction f_n est définie dans un voisinage autour de (a_n,b_n), ce qui est vrai si (a_n,b_n) est à l'intérieur de disque D. On procède de la même manière pour la dérivée seconde par rapport à y.

3. Puisque l'application f est harmonique, le laplacien de f_n vaut celui de l'application $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)/n$, à savoir $\Delta f_n = 2/n$. Au point (a_n, b_n) on a donc une contradiction puisque d'une part $\Delta f_n = 2/n > 0$ et d'autre part d'après la question précédente $\Delta f_n(a_n,b_n) = \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(a_n,b_n) + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(a_n,b_n) \leq 0$. On en déduit que le point (a_n, b_n) n'est pas à l'intérieur du disque D mais sur sa frontière : le cercle C.

4. Les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont à valeurs dans un ensemble fermé et borné (le cercle C). On peut en extraire deux sous-suites qui convergent et telles que les limites a et b sont aussi dans C.

   Soit $(x,y) \in D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(a_n,b_n) \geq f_n(x,y)$ et en passant à la limite, on trouve $f(a,b) \geq f(x,y)$ ce qui prouve que (a,b) est un maximum pour f.

5. Considérons deux applications harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$ et égales le long d'un cercle C. Notons f la différence de ces deux applications. L'application f est harmonique et nulle sur C. D'après les questions précédentes, la maximum d'une fonction harmonique sur un disque est obtenu sur la frontière du disque. On en déduit $f \leq 0$ sur D. En considèrant l'application $-f$, qui est aussi harmonique et nulle sur C, on en déduit que $-f \leq 0$ sur D. Autrement dit, $f = 0$ sur D.

Partie 3 : Propriété de la moyenne

1. En dérivant F on a immédiatement

$$F'(\rho) = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\rho\cos(\theta), y_0+\rho\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\rho\cos(\theta), y_0+\rho\sin(\theta))\ \mathrm{d}\theta.$$

2. Pour calculer une intégrale du type $\int_\Gamma (A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y)$, on commence par paramétrer le cercle Γ, par exemple en utilisant $\theta \in [0,2\pi] \mapsto (x_0+\rho\cos(\theta), y_0+\rho\sin(\theta))$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y) = \int_0^{2\pi} & -\rho\sin(\theta)A(x_0+\rho\cos(\theta), y_0+\rho\sin(\theta))\ \mathrm{d}\theta \\ & + \rho\cos(\theta)B(x_0+\rho\cos(\theta), y_0+\rho\sin(\theta))\ \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

   On reconnait le produit $\rho F'(\rho)$ en choisissant

$$A = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Puisque $\dfrac{\partial A}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et que f est harmonique, on en déduit que $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$: la forme différentielle ω est une forme fermée.

4. On utilise le théorème de Poincaré qui implique que la forme différentielle ω est exacte (car elle est fermée sur un ouvert étoilé, $\mathbb{R}^2$). Puisque la courbe Γ est une courbe fermée, on a donc $\int_\Gamma \omega = 0$. Ceci prouve que $F' = 0$ sur $[0,+\infty[$, c'est-à-dire que F est constante, égale à la valeur obtenue en 0 :

$$\forall \rho \in [0,+\infty[\quad F(\rho) = 2\pi f(x_0,y_0).$$

5. En utilisant le changement en coordonnées polaires suivant :

$$(\rho,\theta) \in [0,r]\times[0,2\pi] \longmapsto (x_0+\rho\cos(\theta), y_0+\rho\sin(\theta)) \in D,$$

   on obtient

$$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^r F(\rho)\rho\ \mathrm{d}\rho = 2\pi f(x_0,y_0)\int_0^r \rho\ \mathrm{d}\rho = \pi r^2 f(x_0,y_0).$$

Partie 4 : Fonctions harmoniques bornées dans le plan

1. Soit D_3 le disque centré au milieu des points $(0,0)$ et (x_0, y_0) et de rayon $r - d/2$. Avec l'inégalité triangulaire, on montre que $D_3 \subset D_1 \cap D_2$. On a les relations suivantes

$$\text{aire}(D_3) = \pi r^2 - \pi r d + \pi d^2/4,$$

$$\text{aire}(E) \leq \text{aire}(D_2) - \text{aire}(D_3) \leq \pi r d.$$

2. D'après la question 5 de la Partie 3 on a

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad f(0,0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_1} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Par différence, on a donc

$$f(x_0, y_0) - f(0,0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_1 \Delta D_2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Puisque l'application f est majorée par C sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit

$$|f(x_0, y_0) - f(0,0)| \leq \frac{C}{\pi r^2} \text{aire}(D_1 \Delta D_2).$$

L'aire de $D_1 \Delta D_2$ étant majorée par $2\pi r d$, on trouve : $|f(x_0, y_0) - f(0,0)| \leq \frac{Cd}{r}$.

3. En faisant tendre r vers $+\infty$, on en déduit que l'application f est constante.