U.E. Mathématiques Générales 2 - Licence L1 M.A.S.S., Maths, Info

Feuille d'exercices n° 4 : Suites définies par récurrence.

Remarque : Des exercices sur les suites définies par récurrence peuvent être proposés dans le sujet d'examen.

Suite de l'exercice 3

On définit la suite récurrente (x_n) par

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

(d) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer l'existence d'une constante M telle que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq M|x_{n+1} - x_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une majoration pour $|x_{n+2} - \ell|$.

Solution. Comme pour tout $x > 0$, $|f'(x)| = |\frac{1}{2\sqrt{2+x}}| < \frac{1}{2\sqrt{2}} = M$, on a alors $|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x_{n+1} - x_n|$. De même du fait que $f(\ell) = \ell$ on trouve que pour $n \geq 1$, $|x_n - \ell| = |f(x_{n-1}) - f(\ell)| \leq |\frac{1}{2\sqrt{2}}|x_{n-1} - \ell|$. De proche en proche on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |x_0 - \ell|$.

(e) De combien d'itérations a-t-on besoin pour se rapprocher de quatre ordres à la limite ℓ ?

Solution.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n < 10^{-4} &\iff \\
n \log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) < -4 &\iff \\
-n \log_{10}\left(2\sqrt{2}\right) < -4 &\iff \\
n \log_{10}\left(2\sqrt{2}\right) > 4 &\iff \\
n > \frac{4}{\log_{10}\left(2\sqrt{2}\right)} &\approx 9.
\end{aligned}$$

Exercice 1 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de la manière suivante : $\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$.

(a). Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$.

Solution. On peut montrer cela par récurrence en notant $P(n)$ l'inégalité $0 < u_n < 1$.

$u_0 \in]0, 1[$ par hypothèse, d'où $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Rappelons que $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n)$. Nous avons

$P(n)$ vraie $\Leftrightarrow u_n \in]0, 1[\Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ 0 < 1 - u_n < 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 < u_n(1 - u_n) < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 1.$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

$P(0)$ est vraie. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b). Démontrer que la suite est strictement décroissante. En déduire que la suite possède une limite.

Solution. La suite est strictement décroissante si et seulement si

$$u_{n+1} < u_n \iff u_n - u_n^2 < u_n \iff u_n^2 > 0,$$

ce qui est vrai parce que nous avons déjà montré que, pour tout n, $0 < u_n < 1$, donc en particulier, pour tout n, $u_n \neq 0$.
Une suite bornée et monotone possède forcément une limite.

(c). Calculer la limite ℓ de la suite.

Solution. Pour calculer la limite ℓ de la suite, nous réécrivons d'abord la définition par récurrence comme

$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad f(x) := x - x^2.$$

Donc, si la suite admet une limite, celle-ci doit être un point fixe de la fonction f :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & f(\ell), \end{array}$$

d'où

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell - \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

Nous avons prouvé que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(d). En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer l'existence d'une constante M telle que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq M|u_{n+1} - u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une majoration pour $|u_{n+2} - \ell|$.

Solution. La fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. De plus on peut prouver que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq 1 =: M$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$.
Si on prend $y = u_n$ et $x = u_{n+1}$ (et $M = 1$), on peut réécrire cela $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq |u_{n+1} - u_n|$. Si on prend $y = \ell$, on obtient $|f(x) - f(\ell)| \leq M\,|x - \ell|$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| \leq M\,|x - \ell|$. En choisissant $x = u_0$, par récurrence on peut montrer que $|u_n - \ell| \leq M^n\,|u_0 - \ell|$.
Comme dans ce cas $M = 1$, cela revient à $|u_n - \ell| \leq |u_0 - \ell|$.

(e). Si on voulait savoir combien d'itérations sont nécessaires pour se rapprocher quatre ordres à la limite ℓ, cette majoration serait-elle utile ?

Solution. Non, car $M \geq 1$. A priori, selon la majoration, u_n peut être aussi loin de la limite que u_n.

Exercice 4 :

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathrm{N}}$ vérifiant :

$$0 \leq v_0 \leq u_0, \qquad \forall n \in \mathrm{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

(a). Montrer que $\forall n \in \mathrm{N}$, $0 \leq v_n \leq u_n$.

Solution. On peut montrer cela par récurrence.
Initialisation. $0 \leq v_0 \leq u_0$ par hypothèse.
Hérédité. Supposons $0 \leq v_n \leq u_n$. Nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} &\iff 0 \leq \sqrt{u_n\,v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} \iff 0 \leq 2\sqrt{u_n\,v_n} \leq u_n + v_n \\ &\iff 0 \leq 4u_n\,v_n \leq u_n^2 + v_n^2 + 2u_n\,v_n \iff -4u_n\,v_n \leq 0 \leq u_n^2 + v_n^2 - 2u_n\,v_n \\ &\iff -4u_n\,v_n \leq 0 \leq (u_n - v_n)^2, \end{aligned}$$

ce qui est vrai.

(b). Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathrm{N}}$.

Solution.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \leq 0$.
D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est décroissante :
La suite (v_n) est croissante :

$$v_{n+1} \geq v_n \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{u_n\, v_n} \geq v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n\, v_n \geq v_n^2.$$

Si $v_n = 0$ l'inégalité est vraie ; sinon, $v_n > 0$, dans ce cas

$$u_n\, v_n \geq v_n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \geq v_n,$$

ce qui est vrai.

(c). En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathrm{N}}$ convergent vers la même limite.

Solution. Les deux suites sont monotones et bornées, car $0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$, donc elles convergent. Appelons $\ell_u = \lim_{n\to\infty} u_n$ et $\ell_v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Si on prend la lois de récurrence pour (v_n) on obtient :

$$\begin{array}{ccc} v_{n+1} & = & \frac{u_n+v_n}{2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell_v & = & \frac{\ell_u+\ell_v}{2}, \end{array}$$

ce qui est équivalent à $\ell_v = \ell_u$. Ceci est consistant avec ce que la lois de récurrence pour (u_n) dit :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & \sqrt{u_n\, v_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell_u & = & \sqrt{\ell_u\, \ell_v}, \end{array}$$

si $\ell_u \neq 0$ on obtient $\sqrt{\ell_u} = \sqrt{\ell_v}$, soit $\ell_u = \ell_v$.