Représentations galoisiennes modulaires

Journée Descartes, une célébration de la géométrie

Nicolas Billerey
Université Clermont Auvergne

31 mars 2022

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Introduction : les représentations galoisiennes en action

Nombres premiers d'Eisenstein

Représentations galoisiennes réductibles

Perspectives

Contexte

- On note $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$.
- Pour un nombre premier l, on désigne par $\overline{\mathbf{F}}_l$ une clôture algébrique du corps $\mathbf{F}_l = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$.
- On munit $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ de la topologie profinie et $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ de la topologie discrète.

Définition

On appelle **représentation galoisienne** (modulo l) tout homomorphisme continu

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l).$$

Exemples de représentations galoisiennes

- $\begin{cases} \nu_1 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_l^\times \\ \nu_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_l^\times \end{cases}$ caractères $\rightsquigarrow \rho = \nu_1 \oplus \nu_2$
- $E/\mathbf{Q}$ courbe elliptique + action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $E[l](\overline{\mathbf{Q}})$

$$\rightsquigarrow \quad \rho_{E,l} \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l)$$

- (Deligne) f forme modulaire **propre** et **parabolique** de poids ≥ 2

$$\rightsquigarrow \quad \rho_{f,l} \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$$

(semi-simple et unique à isomorphisme près vérifiant certaines propriétés)

Représentations galoisiennes modulaires

Définition

Une représentation galoisienne $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ est dite **modulaire** s'il existe une forme modulaire f propre et parabolique de poids ≥ 2 telle que

$$\rho \simeq \rho_{f,l}.$$

On dit alors que ρ **provient** de f.

La méthode modulaire : principe général

Solution particulière d'une équation diophantienne
dépendant d'un nombre premier p

$$\Downarrow$$

Représentation $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ de conducteur N
indépendant de la solution choisie

$$\Downarrow$$

Forme modulaire f de poids 2 et de niveau N telle que $\rho \simeq \rho_{f,p}$

La méthode modulaire : le cas de Fermat

Solution (a, b, c) non triviale $(abc \neq 0)$ de l'équation $x^p + y^p = z^p$

$$\Downarrow$$

(Frey–Hellegouarch)
Représentation $\rho = \rho_{E,p}$ associée à la courbe elliptique
$E\colon Y^2 = X(X - a^p)(X + b^p)$ de conducteur $N = 2$

$$\Downarrow$$

(Wiles–Mazur–Ribet)
Forme modulaire f de poids 2 et de niveau $N = 2$ telle que $\rho \simeq \rho_{f,p}$

CONTRADICTION !

Généralisation : le programme de Darmon (2000)

- La généralisation de cette méthode à d'autres équations diophantiennes fait apparaître des **difficultés à chacune des étapes** :

Généralisation : le programme de Darmon (2000)

- La généralisation de cette méthode à d'autres équations diophantiennes fait apparaître des **difficultés à chacune des étapes** :

- absence de courbe de Frey
- courbes définies sur des corps de nombres
- représentations galoisiennes résiduelles réductibles
- présence de solutions non triviales
- critères d'élimination de formes modulaires après abaissement du niveau
- espaces de formes modulaires trop gros
- ...

Généralisation : le programme de Darmon (2000)

- La généralisation de cette méthode à d'autres équations diophantiennes fait apparaître des **difficultés à chacune des étapes**.
- Néanmoins, Darmon a proposé un programme – encore largement conjectural – permettant d'étendre la méthode modulaire à l'étude des **équations de Fermat généralisées**

$$x^r + y^r = z^p$$

  avec r fixés et p variable.
- Dans l'approche de Darmon, les courbes elliptiques de Frey sont remplacées par des **variétés abéliennes** sur des corps de nombres totalement réels obtenues par spécialisation de variétés abéliennes sur des corps de fonctions.

Modularité de certaines variétés abéliennes de Frey

- Étant donnée une solution propre et non triviale (a, b, c) de l'équation $x^r + y^r = z^p$, Kraus lui associe une certaine courbe hyperelliptique explicite $C_r(a, b)$:

$$
\begin{aligned}
r = 3 : &\quad y^2 = x^3 + 3abx + b^3 - a^3, \\
r = 5 : &\quad y^2 = x^5 + 5abx^3 + 5a^2b^2x + b^5 - a^5, \\
r = 7 : &\quad y^2 = x^7 + 7abx^5 + 14a^2b^2x^3 + 7a^3b^3x + b^7 - a^7.
\end{aligned}
$$

Théorème (B.–Chen–Dieulefait–Freitas, 2021)

La variété abélienne $\mathrm{Jac}(C_r(a, b))$ est modulaire, après extension des scalaires à $\mathbf{Q}(\zeta_r)^+$.

- ➥ Représentation de Frey (Darmon).
- ➥ Théorèmes de relèvements modulaires (Khare–Thorne).
- ➥ Conjecture de modularité de Serre (Khare–Wintenberger).
- ➥ Irréductibilité de certaines représentations galoisiennes (Najman).

Modularité de certaines variétés abéliennes de Frey

- Étant donnée une solution propre et non triviale (a, b, c) de l'équation $x^r + y^r = z^p$, Kraus lui associe une certaine courbe hyperelliptique explicite $C_r(a, b)$:

$$
\begin{aligned}
r = 3 : \quad & y^2 = x^3 + 3abx + b^3 - a^3, \\
r = 5 : \quad & y^2 = x^5 + 5abx^3 + 5a^2b^2x + b^5 - a^5, \\
r = 7 : \quad & y^2 = x^7 + 7abx^5 + 14a^2b^2x^3 + 7a^3b^3x + b^7 - a^7.
\end{aligned}
$$

Théorème (B.–Chen–Dieulefait–Freitas, 2021)

La variété abélienne $\mathrm{Jac}(C_r(a, b))$ est modulaire, après extension des scalaires à $\mathbf{Q}(\zeta_r)^+$.

- ➥ Représentation de Frey (Darmon).
- ➥ Théorèmes de relèvements modulaires (Khare–Thorne).
- ➥ Conjecture de modularité de Serre (Khare–Wintenberger).
- ➥ Irréductibilité de certaines représentations galoisiennes (Najman).

Modularité de certaines variétés abéliennes de Frey

- Étant donnée une solution propre et non triviale (a, b, c) de l'équation $x^r + y^r = z^p$, Kraus lui associe une certaine courbe hyperelliptique explicite $C_r(a, b)$:

$$
\begin{aligned}
r = 3: &\quad y^2 = x^3 + 3abx + b^3 - a^3, \\
r = 5: &\quad y^2 = x^5 + 5abx^3 + 5a^2b^2x + b^5 - a^5, \\
r = 7: &\quad y^2 = x^7 + 7abx^5 + 14a^2b^2x^3 + 7a^3b^3x + b^7 - a^7.
\end{aligned}
$$

Théorème (B.–Chen–Dieulefait–Freitas, 2021)

La variété abélienne $\mathrm{Jac}(C_r(a, b))$ est modulaire, après extension des scalaires à $\mathbf{Q}(\zeta_r)^+$.

- ➥ Représentation de Frey (Darmon).
- ➥ Théorèmes de relèvements modulaires (Khare–Thorne).
- ➥ Conjecture de modularité de Serre (Khare–Wintenberger).
- ➥ Irréductibilité de certaines représentations galoisiennes (Najman).

Modularité de certaines variétés abéliennes de Frey

- Étant donnée une solution propre et non triviale (a, b, c) de l'équation $x^r + y^r = z^p$, Kraus lui associe une certaine courbe hyperelliptique explicite $C_r(a, b)$:

$$
\begin{aligned}
r = 3 : &\quad y^2 = x^3 + 3abx + b^3 - a^3, \\
r = 5 : &\quad y^2 = x^5 + 5abx^3 + 5a^2b^2x + b^5 - a^5, \\
r = 7 : &\quad y^2 = x^7 + 7abx^5 + 14a^2b^2x^3 + 7a^3b^3x + b^7 - a^7.
\end{aligned}
$$

Théorème (B.–Chen–Dieulefait–Freitas, 2021)

La variété abélienne $\mathrm{Jac}(C_r(a, b))$ est modulaire, après extension des scalaires à $\mathbf{Q}(\zeta_r)^+$.

- ➥ Représentation de Frey (Darmon).
- ➥ Théorèmes de relèvements modulaires (Khare–Thorne).
- ➥ Conjecture de modularité de Serre (Khare–Wintenberger).
- ➥ Irréductibilité de certaines représentations galoisiennes (Najman).

Plan de l'exposé

Premier exemple historique

- Soit $E = X_1(11)$ la courbe elliptique de conducteur 11 définie par $y^2 + y = x^3 - x^2$.
  - ➥ La courbe E a un point rationnel d'ordre 5. Pour tout nombre premier $p \neq 11$, on a
$$a_p(E) = p + 1 - \left|\widetilde{E}(\mathbf{F}_p)\right| \equiv 1 + p \pmod 5.$$
  - ➥ La courbe E est modulaire (Eichler) : il existe
$$f_E = \sum_{n \geq 1} a_n q^n = q - q^2 - 2q^3 + 2q^4 + q^5 + \cdots \in \mathbf{Z}[q]$$
une newform de poids 2 et de niveau $\Gamma_0(11)$ telle que $a_n(E) = a_n$ pour tout $n \geq 1$.
  - ➥ En particulier, pour tout nombre premier $p \neq 11$, on a
$$a_p \equiv 1 + p \pmod 5.$$

Second exemple historique

- Soit
$$\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n$$
l'unique newform de poids 12 et de niveau 1.
  - L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ est de dimension 2 et engendré par Δ et la série d'Eisenstein E_{12}.
  - Pour tout nombre premier $p \neq 691$, on a la congruence de Ramanujan
$$\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{691}.$$

Nombres premiers d'Eisenstein

Définition

Soient $M \geq 1$ et $k \geq 2$ deux entiers. On dit qu'un nombre premier l est un **premier d'Eisenstein** de poids k et de niveau M s'il existe une newform

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k^{\text{new}}(\Gamma_0(M))$$

et un idéal premier λ au-dessus de l dans $\overline{\mathbf{Q}}$ tels que pour tout nombre premier p, sauf un nombre fini, on a

$$a_p \equiv 1 + p^{k-1} \pmod{\lambda}.$$

- $l = 5$ est un premier d'Eisenstein de poids 2 et de niveau 11.
- $l = 691$ est un premier d'Eisenstein de poids 12 et de niveau 1.

Quels sont les premiers d'Eisenstein de poids k et de niveau M ? À quoi servent-ils ?

Nombres premiers d'Eisenstein

Définition

Soient $M \geq 1$ et $k \geq 2$ deux entiers. On dit qu'un nombre premier l est un **premier d'Eisenstein** de poids k et de niveau M s'il existe une newform

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(M))$$

et un idéal premier λ au-dessus de l dans $\overline{\mathbf{Q}}$ tels que pour tout nombre premier p, sauf un nombre fini, on a

$$a_p \equiv 1 + p^{k-1} \pmod{\lambda}.$$

- $l = 5$ est un premier d'Eisenstein de poids 2 et de niveau 11.
- $l = 691$ est un premier d'Eisenstein de poids 12 et de niveau 1.

Quels sont les premiers d'Eisenstein de poids k et de niveau M ? À quoi servent-ils ?

Nombres premiers d'Eisenstein

Définition

Soient $M \geq 1$ et $k \geq 2$ deux entiers. On dit qu'un nombre premier l est un **premier d'Eisenstein** de poids k et de niveau M s'il existe une newform

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k^{\text{new}}(\Gamma_0(M))$$

et un idéal premier λ au-dessus de l dans $\overline{\mathbf{Q}}$ tels que pour tout nombre premier p, sauf un nombre fini, on a

$$a_p \equiv 1 + p^{k-1} \pmod{\lambda}.$$

- $l = 5$ est un premier d'Eisenstein de poids 2 et de niveau 11.
- $l = 691$ est un premier d'Eisenstein de poids 12 et de niveau 1.

Quels sont les premiers d'Eisenstein de poids k et de niveau M ? À quoi servent-ils ?

Plan de l'exposé

Modularité des représentations galoisiennes

- Une représentation modulaire ρ est nécessairement **semi-simple** et **impaire** (i.e. $\det \rho(c.c.) = -1$).

Conj. de modularité de Serre (Khare-Wintenberger, 2005)

On considère $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne **irréductible** et **impaire**.

- (Forme faible) La représentation ρ est modulaire.
- (Forme forte) Si $l \geq 5$, alors $\rho \simeq \rho_{f,l}$ avec f de « type optimal ».

Quid des représentations réductibles ?

Modularité des représentations galoisiennes

- Une représentation modulaire ρ est nécessairement **semi-simple** et **impaire** (i.e. $\det \rho(c.c.) = -1$).

Conj. de modularité de Serre (Khare-Wintenberger, 2005)

On considère $\rho \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne **irréductible** et **impaire**.

- (Forme faible) La représentation ρ est modulaire.
- (Forme forte) Si $l \geq 5$, alors $\rho \simeq \rho_{f,l}$ avec f de « type optimal ».

Quid des représentations réductibles ?

Modularité des représentations galoisiennes

- Une représentation modulaire ρ est nécessairement **semi-simple** et **impaire** (i.e. $\det \rho(c.c.) = -1$).

Conj. de modularité de Serre (Khare-Wintenberger, 2005)

On considère $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne **irréductible** et **impaire**.

- (Forme faible) La représentation ρ est modulaire.
- (Forme forte) Si $l \geq 5$, alors $\rho \simeq \rho_{f,l}$ avec f de « type optimal ».

Quid des représentations réductibles ?

Représentations galoisiennes réductibles : questions

- Soit $\rho = \nu_1 \oplus \nu_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne réductible, semi-simple et impaire.
  - (Modularité faible) La représentation ρ est-elle modulaire ?
  - (Abaissement du niveau) La représentation ρ provient-elle d'une forme modulaire (parabolique) de « type optimal » ?
  - (Augmentation du niveau) Pour un entier $k \geq 2$ donné, quels sont les entiers $M \geq 1$ pour lesquels ρ provient d'une newform de poids k et de niveau M ?

Représentations galoisiennes réductibles : réponses

- Soit $\rho = \nu_1 \oplus \nu_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne réductible, semi-simple et impaire.
  - ➥ (Modularité faible) La représentation ρ est-elle modulaire ?

Théorème (B.–Menares, 2016)

Toute représentation galoisienne $\rho = \nu_1 \oplus \nu_2$ semi-simple et impaire est modulaire.

- Démonstration antérieure (2006), mais totalement différente par Ghitza.

Représentations galoisiennes réductibles : réponses

- Soit $\rho = \nu_1 \oplus \nu_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne réductible, semi-simple et impaire.
  - (Abaissement du niveau) La représentation ρ provient-elle d'une forme modulaire (parabolique) de « type optimal » ?

Pas toujours ! Lorsque c'est le cas, on dit que ρ est **fortement modulaire**. On note χ_l le caractère cyclotomique modulo l.

Théorème (B.–Menares, 2018)

On suppose $l > k+1$ et $\epsilon_1, \epsilon_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_l^\times$ de conducteurs $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ tels que $l \nmid \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ et $(\epsilon_1\epsilon_2)(-1) = (-1)^k$. Soit $\eta = \epsilon_1^{-1}\epsilon_2$.
La représentation $\rho = \epsilon_1 \oplus \epsilon_2\chi_l^{k-1}$ est fortement modulaire si et seulement si

$$B_{k,\eta} = 0 \quad \text{ou} \quad \eta(p)p^k - 1 = 0.$$

- Généralisation (à $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 > 1$) d'un résultat de Ribet (1975).

Représentations galoisiennes réductibles : réponses

- Soit $\rho = \nu_1 \oplus \nu_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne réductible, semi-simple et impaire.
  - (Augmentation du niveau) Pour un entier $k \geq 2$ donné, quels sont les entiers $M \geq 1$ pour lesquels ρ provient d'une newform de poids k et de niveau M ?

Pour la représentation $\mathbf{1} \oplus \chi_l^{k-1}$, c'est la question de **déterminer les premiers d'Eisenstein** de poids k et de niveau M !

k \ M	1 (optimal)	premier
2	$\times\times\times\times\times\times\times\times\times\times\times\times\times\times$	Mazur (1977)
≥ 4	Ribet (1975) ou [BM18]	(voir suite)

Représentations galoisiennes réductibles : réponses

- Soit $\rho = \nu_1 \oplus \nu_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_l)$ une représentation galoisienne réductible, semi-simple et impaire.
  - (Augmentation du niveau) Pour un entier $k \geq 2$ donné, quels sont les entiers $M \geq 1$ pour lesquels ρ provient d'une newform de poids k et de niveau M ?

Théorème (B.–Menares, 2016)

Soit $k \geq 4$ un entier pair et l un nombre premier tel que $l > k+1$. Alors, l est un premier d'Eisenstein de poids k et de niveau **premier** $M \neq l$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) l divise $(M^k - 1)(M^{k-2} - 1)$;

(2) l divise $\frac{B_k}{2k}(M^k - 1)$.

Une application

Pour deux entiers $k \geq 2$ et $M \geq 1$, on pose

$$d_k(M) = \max\left\{[\mathbf{Q}_f : \mathbf{Q}];\ f \text{ newform de poids } k \text{ et niveau } \Gamma_0(M)\right\}.$$

Une application

Pour deux entiers $k \geq 2$ et $M \geq 1$, on pose

$$d_k(M) = \max\left\{[\mathbf{Q}_f : \mathbf{Q}];\ f \text{ newform de poids } k \text{ et niveau } \Gamma_0(M)\right\}.$$

Une application

Pour deux entiers $k \geq 2$ et $M \geq 1$, on pose

$$d_k(M) = \max\left\{[\mathbf{Q}_f : \mathbf{Q}];\ f \text{ newform de poids } k \text{ et niveau } \Gamma_0(M)\right\}.$$

- Serre : $d_k(M) \to +\infty$ lorsque $k + M \to +\infty$.

Pour $M \to \infty$ premier :

- Royer (2000), Murty–Sinha (2009) : $d_k(M) \gg_k \sqrt{\log\log M}$.
- Lipnowski–Schaeffer (2018, $k = 2$) / Bettin–Perret-Gentil–Radziwiłł (2019) : $d_k(M) \gg_k \log\log(M)$.

Une application

Pour deux entiers $k \geq 2$ et $M \geq 1$, on pose

$$d_k(M) = \max\left\{[\mathbf{Q}_f : \mathbf{Q}];\ f \text{ newform de poids } k \text{ et niveau } \Gamma_0(M)\right\}.$$

Théorème (B.–Menares, 2016)

Soit $k \geq 2$ un entier pair fixé. Il existe un ensemble **explicite** $\mathcal{P}$ de nombres premiers de densité naturelle inférieure $\geq 3/4$ tel que pour tout $M \in \mathcal{P}$ avec $M \geq (k+1)^4$, on a

$$d_k(M) \geq c_k \log(M), \quad \text{où } c_k = \left(8 \log\left(1 + 2^{(k-1)/2}\right)\right)^{-1}.$$

Plan de l’exposé

On veut aller plus loin et…

- … décrire les premiers d'Eisenstein de tout poids et de tout niveau (sans facteurs carrés).
  Ça semble illusoire : cf. travaux de Ribet et Yoo pour le poids 2.
- … décrire tous les « niveaux non optimaux » (terminologie de Diamond–Taylor) de la représentation

$$\epsilon_1 \oplus \epsilon_2 \chi_l^{k-1}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_l^\times$ sont de conducteurs $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ tels que

$$l \nmid \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 \quad \text{et} \quad (\epsilon_1\epsilon_2)(-1) = (-1)^k.$$

On veut aller plus loin et…

- … décrire les premiers d'Eisenstein de tout poids et de tout niveau (sans facteurs carrés).
  Ça semble illusoire : cf. travaux de Ribet et Yoo pour le poids 2.
- … décrire tous les « niveaux non optimaux » (terminologie de Diamond–Taylor) de la représentation

$$\epsilon_1 \oplus \epsilon_2 \chi_l^{k-1}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_l^\times$ sont de conducteurs $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ tels que

$$l \nmid \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 \quad \text{et} \quad (\epsilon_1\epsilon_2)(-1) = (-1)^k.$$

On veut aller plus loin et…

- … décrire les premiers d'Eisenstein de tout poids et de tout niveau (sans facteurs carrés).
  Ça semble illusoire : cf. travaux de Ribet et Yoo pour le poids 2.
- … décrire tous les « niveaux non optimaux » (terminologie de Diamond–Taylor) de la représentation

$$\epsilon_1 \oplus \epsilon_2 \chi_l^{k-1}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_l^\times$ sont de conducteurs $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ tels que

$$l \nmid \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 \quad \text{et} \quad (\epsilon_1\epsilon_2)(-1) = (-1)^k.$$

Une conjecture

On pose $N = \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ et $\eta = \epsilon_1^{-1}\epsilon_2$.

Conjecture

On suppose $l > k+1$. Soit $r \geq 1$ sans facteurs carrés premier à Nl.

On fait l'hypothèse que $r = 1$ ou $(N,k) \neq (1,2)$.

La représentation $\rho = \epsilon_1 \oplus \epsilon_2\chi_l^{k-1}$ provient d'une newform de poids k, niveau Nr qui est invariante par $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(r)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) on a $(\eta(p)p^k - 1)(\eta(p)p^{k-2} - 1) = 0$ pour tout premier $p \mid r$;

(2) on a $\displaystyle\frac{B_{k,\eta}}{2k}\prod_{q \mid N}(\eta(q)q^k - 1)\prod_{p \mid r}(\eta(p)p^k - 1) = 0$, avec p et q qui parcourent respectivement les diviseurs premiers de r et N.

- Cas $N = 1$: description des premiers d'Eisenstein de poids $k \geq 4$ et de niveau sans facteurs carrés.

Une conjecture

On pose $N = \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ et $\eta = \epsilon_1^{-1}\epsilon_2$.

Conjecture

On suppose $l > k+1$. Soit $r \geq 1$ sans facteurs carrés premier à Nl.

On fait l'hypothèse que $r = 1$ ou $(N, k) \neq (1, 2)$.

La représentation $\rho = \epsilon_1 \oplus \epsilon_2\chi_l^{k-1}$ provient d'une newform de poids k, niveau Nr qui est invariante par $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(r)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) on a $(\eta(p)p^k - 1)(\eta(p)p^{k-2} - 1) = 0$ pour tout premier $p \mid r$;

(2) on a $\dfrac{B_{k,\eta}}{2k}\prod_{q|N}(\eta(q)q^k - 1)\prod_{p|r}(\eta(p)p^k - 1) = 0$, avec p et q qui parcourent respectivement les diviseurs premiers de r et N.

- Cas $N = 1$: description des premiers d'Eisenstein de poids $k \geq 4$ et de niveau sans facteurs carrés.

Résultats connus et en cours

- Cas connus :
  - $N = 1$ et r premier : B.–Menares (2016).
  - $r = 1$: B.–Menares (2018).

Théorème (B.–Menares, 2022)

La conjecture est vraie pour :

(a) r nombre premier (et N quelconque) ;

(b) r produit de **deux** nombres premiers (distincts) **et** $N > 1$.

- La démonstration de (b) :
  - utilise des méthodes totalement différentes : correspondance de Jacquet–Langlands, analogue du lemme de Ihara pour les formes quaternioniques,. . . ;
  - ouvre la voie à une meilleure compréhension de la différence frappante entre le poids 2 et le poids ≥ 4 dans le cas $N = 1$.

Résultats connus et en cours

- Cas connus :
  - $N = 1$ et r premier : B.–Menares (2016).
  - $r = 1$: B.–Menares (2018).

Théorème (B.–Menares, 2022)

La conjecture est vraie pour :

(a) r nombre premier (et N quelconque) ;

(b) r produit de **deux** nombres premiers (distincts) **et** $N > 1$.

- La démonstration de (b) :
  - utilise des méthodes totalement différentes : correspondance de Jacquet–Langlands, analogue du lemme de Ihara pour les formes quaternioniques,. . . ;
  - ouvre la voie à une meilleure compréhension de la différence frappante entre le poids 2 et le poids ≥ 4 dans le cas $N = 1$.

Résultats connus et en cours

- Cas connus :
  - $N = 1$ et r premier : B.–Menares (2016).
  - $r = 1$: B.–Menares (2018).

Théorème (B.–Menares, 2022)

La conjecture est vraie pour :

(a) r nombre premier (et N quelconque) ;

(b) r produit de **deux** nombres premiers (distincts) **et** $N > 1$.

- La démonstration de (b) :
  - utilise des méthodes totalement différentes : correspondance de Jacquet–Langlands, analogue du lemme de Ihara pour les formes quaternioniques,... ;
  - ouvre la voie à une meilleure compréhension de la différence frappante entre le poids 2 et le poids ≥ 4 dans le cas $N = 1$.

(31 mars 1596 – 11 février 1650)

Merci pour votre attention !