

GROUPES FINIS

Jean-Pierre SERRE

Cours à l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles, 1978/1979

rédigé par Martine BUHLER et Catherine GOLDSTEIN
(Montrouge, 1979)

révisé et transcrit en L^AT_EX par
Nicolas BILLEREY, Olivier DODANE et Emmanuel REY
(Strasbourg – Paris, 2004)

Table des matières

1	Préliminaires	5
1.1	Actions de groupes	5
1.2	Sous-groupes normaux ; sous-groupes caractéristiques ; groupes simples . .	6
1.3	Filtrations et théorème de Jordan-Hölder	7
2	Théorèmes de Sylow	10
2.1	Définitions	10
2.2	Existence des p -Sylow	10
2.2.1	Première démonstration	11
2.2.2	Seconde démonstration (Miller-Wielandt)	11
2.3	Propriétés des p -Sylow	12
2.4	Fusion	13
3	Groupes résolubles et groupes nilpotents	16
3.1	Groupes résolubles	16
3.2	Suite centrale descendante	19
3.3	Groupes nilpotents	19
3.4	Groupes nilpotents finis	21
3.5	Cas des groupes abéliens	23
3.6	Sous-groupe de Frattini	25
4	Cohomologie et extensions	28
4.1	Définitions	28
4.2	Extensions	30
4.3	Groupes finis : un critère de nullité	34
4.4	Extensions de groupes d'ordres premiers entre eux	35
4.5	Relèvements d'homomorphismes	37

5	Groupes résolubles et sous-groupes de Hall	39
5.1	Π -sous-groupes	39
5.2	Préliminaires : sous-groupes permutables	40
5.3	Systèmes permutables de sous-groupes de Sylow	41
5.4	Démonstration du th. 5.1	42
5.5	Un critère de résolubilité	42
5.6	Démonstration du th. 5.3	43
6	Groupes de Frobenius	44
6.1	Réunion des conjugués d'un sous-groupe	44
6.2	Groupes de Frobenius : définition	46
6.3	Structure de N	47
6.4	Structure de H	48
7	Transfert	51
7.1	Définition	51
7.2	Calcul du transfert	52
7.3	Exemples d'utilisation du transfert	53
7.3.1	Premier exemple (Gauss)	53
7.3.2	Second exemple	54
7.4	Transfert dans un sous-groupe de Sylow	54
7.5	Application : groupes simples d'ordre impair inférieur à 2000	56
7.6	Application : groupes simples non abéliens d'ordre inférieur à 200	56
A	Théorie des caractères	59
A.1	Représentations et caractères	59
A.2	Relations d'orthogonalité	61
A.3	Caractères et fonctions centrales	63
A.4	Exemples de caractères	64
A.5	Propriétés d'intégralité	66
A.6	Application : théorème de Burnside	68
A.7	Démonstration du théorème de Frobenius	69
	Bibliographie	72
	Index	73

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est essentiellement constitué de rappels sur la théorie générale des groupes. La lettre G désigne un groupe.

1.1 Actions de groupes

Définition 1.1 On dit que le groupe G opère à gauche sur un ensemble X si l'on s'est donné une application

$$\begin{cases} G \times X & \longrightarrow X \\ (g, x) & \longmapsto g.x \end{cases}$$

vérifiant les conditions :

- (1) $g.(g'.x) = (gg').x$ pour tout $x \in X$ et tout couple $(g, g') \in G \times G$.
- (2) $1.x = x$ pour tout $x \in X$, où 1 est l'élément neutre de G .

Remarque. La donnée d'une action à gauche de G sur X équivaut à la donnée d'un homomorphisme τ de G dans le groupe \mathcal{S}_X des permutations de X défini pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$ par $\tau(g)(x) = g.x$.

On aurait une définition analogue pour les opérations à droite.

Le groupe G découpe alors X en *orbites* : deux éléments x et y de X sont dans la même orbite si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $x = g.y$. L'ensemble des orbites est le quotient de X par G et est noté $G \backslash X$ dans le cas d'une action à gauche (et X/G dans le cas d'une action à droite).

Définition 1.2 On dit que G agit transitivement sur X si $G \backslash X$ est réduit à un élément.

En particulier, le groupe G agit transitivement sur chaque orbite.

Définition 1.3 Soit $x \in X$; on appelle stabilisateur de x (ou fixateur de x) et on note H_x le sous-groupe de G formé des éléments $g \in G$ qui fixent x (i.e. tels que $g.x = x$).

Remarque. Si G opère transitivement sur X et si $x \in X$, on a une bijection de G/H_x sur X donnée par $gH_x \mapsto g.x$, où G/H_x est l'ensemble des classes à gauche de G modulo H_x . Si $x' \in X$, il existe $g \in G$ tel que $x' = g.x$. Alors $H_{x'} = gH_xg^{-1}$. Donc changer de point de base revient à remplacer le stabilisateur de x par un de ses conjugués. Inversement, si H est un sous-groupe de G , alors G agit transitivement sur G/H et H stabilise la classe de 1. Ainsi la donnée de X sur lequel G opère transitivement revient à celle d'un sous-groupe de G , déterminé à conjugaison près.

Exemple. Soit X une droite affine définie sur un corps K et soit G le groupe des similitudes

$$G = \{x \mapsto ax + b, a \in K^*, b \in K\}.$$

Le groupe G opère transitivement sur X . Si $x \in X$, le stabilisateur de x est le groupe des homothéties centrées en x .

Application. Soit G un groupe fini, dont on note $|G|$ l'ordre. Soit X un ensemble où G opère. On a $X = \coprod_{i \in I} Gx_i$ où les Gx_i sont les orbites (2 à 2 disjointes) sous l'action de G , les x_i formant un système de représentants des éléments de $G \backslash X$. On a vu que Gx_i est en bijection avec G/H_{x_i} , donc $|Gx_i| = |G| \cdot |H_{x_i}|^{-1}$. On en déduit $|X| = \sum_{i \in I} |G| \cdot |H_{x_i}|^{-1}$ puis $|X| \cdot |G|^{-1} = \sum_{i \in I} |H_{x_i}|^{-1}$.

Cas particulier. Le groupe G opère sur lui-même par automorphismes intérieurs ; on a une application :

$$\begin{cases} G & \longrightarrow & \mathcal{S}_G \\ x & \longmapsto & \text{int}_x \end{cases}$$

où $\text{int}_x(y) = xyx^{-1} = {}^x y$. Les orbites sont les classes de conjugaison. Le stabilisateur d'un élément x de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent à x (on l'appelle *centralisateur* de x et on le note $C_G(x)$). On a $1 = \sum_{i \in I} |C_G(x_i)|^{-1}$ où $(x_i)_{i \in I}$ est un système de représentants des classes de conjugaison. Pour $x_i = 1$, on a $C_G(x_i) = G$ et donc $\sup_{i \in I} |C_G(x_i)| = |G|$.

Exercice.

(i) Si h est un entier ≥ 1 , montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de décompositions $1 = \sum_{i=1}^h \frac{1}{n_i}$ avec $n_i \in \mathbf{Z}$, $n_i \geq 1$. [Par exemple, si $h = 3$, les seuls n_i possibles sont $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$ et $(2, 3, 6)$.]

(ii) En déduire que, si un groupe fini G a un nombre de classes de conjugaison égal à h , l'ordre de G est majoré par une constante $N(h)$ ne dépendant que de h . (On peut prendre $N(h)$ de la forme $c_1 c_2^h$, où c_1, c_2 sont des constantes > 0 . J'ignore si l'on peut faire beaucoup mieux.)

1.2 Sous-groupes normaux ; sous-groupes caractéristiques ; groupes simples

Définition 1.4 On dit qu'un sous-groupe H de G est normal (ou invariant) si pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$, on a $xhx^{-1} \in H$.

Cela revient à dire que le sous-groupe H est stable par tout automorphisme intérieur. Une telle situation se décrit par une suite exacte :

$$\{1\} \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow \{1\}.$$

Remarque. Si H est un sous-groupe de G , il existe un plus grand sous-groupe de G dans lequel H est normal, à savoir l'ensemble des $g \in G$ tels que $gHg^{-1} = H$. On l'appelle le *normalisateur de H dans G* , et on le note $N_G(H)$. On dit qu'une partie de G *normalise H* si elle est contenue dans $N_G(H)$.

Définition 1.5 *On dit qu'un sous-groupe H de G est caractéristique s'il est stable par tout automorphisme de G .*

Un tel sous-groupe est normal.

Exemple. Le *centre* de G (ensemble des éléments qui commutent à tous les éléments de G) est un sous-groupe caractéristique. Il en est de même du *groupe dérivé* de G , ainsi des sous-groupes $D^n G$, $C^i G$ et $\Phi(G)$ définis au chap. 3.

Définition 1.6 *On dit qu'un groupe G est simple lorsqu'il a exactement deux sous-groupes normaux : $\{1\}$ et G .*

Exemples.

(1) Les seuls groupes *abéliens* simples sont les groupes cycliques d'ordre premier, c'est-à-dire les groupes $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec p premier.

(2) Le groupe alterné \mathcal{A}_n est simple si $n \geq 5$.

(3) Le groupe $\mathbf{PSL}_n(\mathbf{F}_q)$ est simple pour $n \geq 2$ sauf dans le cas $n = 2$ et $q = 2$ ou 3 .

1.3 Filtrations et théorème de Jordan-Hölder

Définition 1.7 *Une filtration du groupe G est une suite finie $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous-groupes telle que*

$$G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset \cdots \subset G_i \subset \cdots \subset G_n = G$$

avec G_i normal dans G_{i+1} , pour $0 \leq i \leq n-1$.

On appelle *gradués de G* (associé à la filtration $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$) et on note $\text{gr}(G)$ la suite des $\text{gr}_i(G) = G_i/G_{i-1}$, pour $1 \leq i \leq n$.

Définition 1.8 *Une filtration $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ de G est dite de Jordan-Hölder si G_i/G_{i-1} est simple pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Proposition 1.1 *Si G est fini, G possède une suite de Jordan-Hölder.*

Si $G = \{1\}$, on a la suite de Jordan-Hölder triviale ($n = 0$). Si G est simple, on prend $n = 1$. Si G n'est pas simple, on raisonne par récurrence sur l'ordre de G . Soit $N \subset G$, N normal dans G d'ordre maximal. Alors G/N est simple, car sinon il existerait M normal dans G contenant strictement N et distinct de G . Comme $|N| < |G|$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et si $(N_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite de Jordan-Hölder pour N , alors $(N_0, \dots, N_{n-1}, N, G)$ en est une pour G . \square

Remarque. Si G est infini, il peut ne pas posséder de suite de Jordan-Hölder : c'est par exemple le cas de \mathbf{Z} .

Théorème 1.2 (Jordan-Hölder) *Soit G un groupe fini et soit $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de Jordan-Hölder de G . Le gradué de G , à permutation près des indices, ne dépend pas de la suite choisie.*

Il suffit de montrer que si S est un groupe simple fixé et si $n(G, (G_i), S)$ est le nombre de j tels que G_j/G_{j-1} est isomorphe à S , alors $n(G, (G_i), S)$ ne dépend pas de la suite (G_i) .

On commence par une remarque : si H est un sous-groupe de G , une filtration (G_i) sur G induit une filtration (H_i) sur H définie par $H_i = G_i \cap H$. De même, si N est normal, on a une filtration sur G/N définie par $(G/N)_i = G_i/(G_i \cap N)$. La suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow G/N \longrightarrow \{1\}$$

se conserve par filtration :

$$\{1\} \longrightarrow N_i/N_{i-1} \longrightarrow G_i/G_{i-1} \longrightarrow (G/N)_i/(G/N)_{i-1} \longrightarrow \{1\}$$

d'où finalement la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \text{gr}_i(N) \longrightarrow \text{gr}_i(G) \longrightarrow \text{gr}_i(G/N) \longrightarrow \{1\}.$$

Si la filtration initiale est de Jordan-Hölder, $\text{gr}_i(G)$ est simple pour tout i , donc $\text{gr}_i(N)$ est isomorphe à $\{1\}$ ou à $\text{gr}_i(G)$. Par réindexation, on peut donc obtenir une filtration de Jordan-Hölder sur N et de même sur G/N .

Cette remarque permet de démontrer le théorème ; on a en effet deux possibilités : soit $\text{gr}_i(N) = \{1\}$ et $\text{gr}_i(G/N) = \text{gr}_i(G)$, soit $\text{gr}_i(N) = \text{gr}_i(G)$ et $\text{gr}_i(G/N) = \{1\}$. On en déduit une partition de $I = \{0, \dots, n\}$ en deux parties : $I_1 = \{i, \text{gr}_i(N) = \{1\}\}$ et $I_2 = \{i, \text{gr}_i(N) = \text{gr}_i(G)\}$.

On raisonne alors par récurrence sur l'ordre de G . Si $G = \{1\}$, il n'y a pas de problème. Sinon, on peut toujours supposer que G n'est pas simple. Soit alors N un sous-groupe normal tel que $|N| < |G|$ et $|G/N| < |G|$. L'hypothèse de récurrence s'applique à N et G/N : $n(N, (N_i)_{i \in I_2}, S)$ et $n(G/N, ((G/N)_i)_{i \in I_1}, S)$ sont indépendants de la filtration. Or

$$n(G, (G_i)_{i \in I}, S) = n(N, (N_i)_{i \in I_2}, S) + n(G/N, ((G/N)_i)_{i \in I_1}, S),$$

donc $n(G, (G_i)_{i \in I}, S)$ est indépendant de la filtration choisie. \square

Application. On retrouve ainsi l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. En effet, si $n = p_1^{h_1} \cdots p_k^{h_k}$, on a pour $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ la filtration de Jordan-Hölder suivante :

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \supset p_1\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \supset p_1^2\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \supset \cdots \supset p_1^{h_1}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \supset \cdots$$

Donc $\mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z}$ apparaît h_i fois dans le gradué, d'où l'unicité.

Exemples.

(1) Filtration de \mathcal{S}_3 : \mathcal{A}_3 est normal dans \mathcal{S}_3 et \mathcal{A}_3 est cyclique d'ordre 3. D'où la filtration

$$\{1\} \subset \mathcal{A}_3 \subset \mathcal{S}_3.$$

(2) Filtration de \mathcal{S}_4 : \mathcal{A}_4 est normal dans \mathcal{S}_4 avec $(\mathcal{S}_4 : \mathcal{A}_4) = 2$. Dans \mathcal{A}_4 , il existe un sous-groupe normal D de type $(2, 2)$: $D = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (a, b)(c, d), \\ \sigma_2 &= (a, c)(b, d), \\ \sigma_3 &= (a, d)(b, c). \end{aligned}$$

On a donc la filtration

$$\{1\} \subset \{1, \sigma_i\} \subset D \subset \mathcal{A}_4 \subset \mathcal{S}_4.$$

L'ordre des quotients successifs est $2, 2, 3, 2$. Le choix de i étant arbitraire, il n'y a pas unicité de la filtration.

(3) Filtration de \mathcal{S}_n pour $n \geq 5$: le groupe \mathcal{A}_n étant simple, on a la filtration

$$\{1\} \subset \mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n.$$

Chapitre 2

Théorèmes de Sylow

Soit p un nombre premier et soit G un groupe fini.

2.1 Définitions

Définition 2.1 On dit que G est un p -groupe si l'ordre de G est une puissance de p . Si G est d'ordre $p^n m$ avec m premier à p , on dit qu'un sous-groupe H de G est un p -Sylow de G si H est d'ordre p^n .

Remarques.

(1) Soit S un sous-groupe de G ; S est un p -Sylow de G si et seulement si S est un p -groupe et $(G : S)$ est premier à p .

(2) Tout conjugué d'un p -Sylow de G est un p -Sylow de G .

Exemple. Soit K un corps fini de caractéristique p à $q = p^f$ éléments. Soit $G = \mathbf{GL}_n(K)$ le groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans K . Ce groupe est isomorphe à $\mathbf{GL}(V)$ où V est un espace vectoriel sur K de dimension n . On remarque que l'ordre de G est le nombre de bases d'un espace vectoriel de dimension n sur K , soit :

$$|G| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}) = q^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n (q^i - 1) = p^{fn(n-1)/2} m,$$

où $m = \prod_{i=1}^n (q^i - 1)$ est premier à q , donc à p .

Considérons d'autre part le groupe P constitué des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux à 1. C'est un sous-groupe de G d'ordre $|P| = q^{n(n-1)/2} = p^{fn(n-1)/2}$. Donc P est un p -Sylow de G .

2.2 Existence des p -Sylow

Le but de cette section est de démontrer le premier théorème de Sylow :

Théorème 2.1 *Tout groupe fini possède au moins un p -Sylow.*

2.2.1 Première démonstration

Elle repose sur la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Soit H un sous-groupe de G et soit S un p -Sylow de G . Alors il existe $g \in G$ tel que $H \cap gSg^{-1}$ soit un p -Sylow de H .*

Soit X l'ensemble des classes à gauche de G modulo S . Le groupe G (resp. H) agit sur X par translations. Les stabilisateurs des points de X sous G (resp. sous H) sont les conjugués de S (resp. les $H \cap gSg^{-1}$). Or $|X| \not\equiv 0 \pmod{p}$ car S est un p -Sylow de G . L'une des orbites \mathcal{O} de X sous l'action de H a un nombre d'éléments premier à p (sinon $|X|$ serait divisible par p); soit $x \in \mathcal{O}$ et soit H_x le stabilisateur de x dans H . Le groupe H_x est un p -groupe, de la forme $H \cap gSg^{-1}$ (pour un certain g) et $(H : H_x) = |\mathcal{O}|$ est premier à p . Donc H_x est un p -Sylow de H de la forme $H \cap gSg^{-1}$. \square

Corollaire 2.3 *Si G a des p -Sylow et si H est un sous-groupe de G , alors H a aussi des p -Sylow.*

Application. [Une première preuve du th. 2.1] Soit G un groupe fini d'ordre n . On peut plonger G dans le groupe symétrique \mathcal{S}_n . D'autre part, \mathcal{S}_n se plonge dans $\mathbf{GL}_n(K)$ (où K est un corps fini de caractéristique p) : si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de K^n , on associe à σ la transformation linéaire f définie par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Donc G se plonge dans $\mathbf{GL}_n(K)$. D'après l'exemple du § 2.1, $\mathbf{GL}_n(K)$ possède un p -Sylow. Le corollaire ci-dessus permet de conclure.

2.2.2 Seconde démonstration (Miller-Wielandt)

On suppose que $|G| = p^n m$ avec m premier à p . On note X l'ensemble des parties de G à p^n éléments et s le nombre de p -Sylow de G .

Lemme 2.4 $|X| \equiv sm \pmod{p}$.

Le groupe G opère sur X par translations à gauche. Soit $X = \coprod_i X_i$ la décomposition de X en orbites sous l'action de G . Si $A_i \in X_i$, on a $X = \coprod_i GA_i$. On note G_i le stabilisateur de A_i . On rappelle que $|GA_i| = |G|/|G_i|$.

Remarque : $|G_i| \leq p^n$. Soit en effet $x \in A_i$. Si $g \in G_i$, alors gx appartient à A_i , donc peut prendre p^n valeurs. On a donc au plus p^n choix pour g . On distingue donc deux cas :

- Si $|G_i| < p^n$, alors $|GA_i|$ est divisible par p .
- Si $|G_i| = p^n$, alors G_i est un p -Sylow de G .

Réciproquement soit P un p -Sylow de G ; $Pg \in X$ pour tout $g \in G$ et le stabilisateur de Pg est P . De même, si P stabilise une partie A de X , alors $PA \subset A$ donc pour tout $a \in A$, on a $Pa \subset A$ donc $A = Pa$. (les deux ensembles ont mêmes cardinaux). Donc P stabilise exactement son orbite sous l'action de G (et le cardinal de cette orbite est $|G/P| = m$). Finalement

$$|X| = \sum_{i/|G_i| < p^n} |GA_i| + \sum_{i/|G_i| = p^n} |GA_i|$$

soit

$$|X| \equiv 0 + sm \pmod{p}$$

d'où le résultat. \square

Ce lemme nous donne le th. 2.1. En effet, d'après ce lemme, la classe de s modulo p ne dépend que de l'ordre de G . Or $G' = \mathbf{Z}/|G|\mathbf{Z}$ a un unique p -Sylow (qui est isomorphe à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$). Donc $s \equiv 1 \pmod{p}$; en particulier, s est non nul. \square

Remarque. On a démontré en fait que le nombre de p -Sylow d'un groupe G est congru à 1 modulo p . On retrouvera cette propriété ultérieurement.

Corollaire 2.5 (Cauchy) *Si p divise l'ordre de G , alors G contient un élément d'ordre p .*

En effet, soit S un p -Sylow de G (il en existe d'après le th. 2.1); S n'est pas réduit à $\{1\}$ car p divise l'ordre de G . Soit $x \in S$ distinct de $\{1\}$. L'ordre de x est une puissance de p , soit p^m ($m \geq 1$). Alors $x^{p^{m-1}}$ est d'ordre p . \square

2.3 Propriétés des p -Sylow

Théorème 2.6 (Second théorème de Sylow)

- (1) *Tout p -sous-groupe de G est contenu dans un p -Sylow de G .*
- (2) *Les p -Sylow de G sont conjugués.*
- (3) *Le nombre des p -Sylow est congru à 1 modulo p .*

Lemme 2.7 *Soit X un ensemble fini sur lequel opère un p -groupe P et soit X^P l'ensemble des éléments de X fixés par P . Alors $|X| \equiv |X^P| \pmod{p}$.*

Les orbites à un élément de X sous l'action de P sont celles constituées d'un point de X^P . L'ensemble $X - X^P$ est donc réunion d'orbites non triviales, de cardinal divisible par p . \square

On peut alors démontrer les points (1) et (2) du th. 2.6 : soit S un p -Sylow de G et soit P un p -sous-groupe de G . On applique le lemme 2.7 à l'ensemble X des classes à gauche de G modulo S : $|X| \not\equiv 0 \pmod{p}$ donc $|X^P| \not\equiv 0 \pmod{p}$. En particulier, il existe $x \in X$ fixé par P . Le stabilisateur de x contient donc P et est un conjugué de S . Donc P est contenu dans un conjugué de S (c'est-à-dire dans un p -Sylow de G).

Pour le point (2), on applique (1) à $P = S'$ où S' est un p -Sylow de G . Il existe $g \in G$ tel que $S' \subset gSg^{-1}$, donc $S' = gSg^{-1}$. \square

Pour le point (3), on donne une nouvelle démonstration basée sur le lemme suivant :

Lemme 2.8 *Soient S et S' deux p -Sylow de G . Si S' normalise S , alors $S = S'$.*

Soit H le sous-groupe de G engendré par S et S' . Le groupe H normalise S qui est un p -Sylow de H . Donc S est le seul p -Sylow de H (les p -Sylow de H sont conjugués); or S' est un p -Sylow de H donc $S = S'$. \square

Montrons le point (3). Si X est l'ensemble des p -Sylow de G , alors S opère sur X par conjugaison et d'après le lemme 2.8, S est le seul élément de X fixé par S . On réapplique le lemme 2.7 (avec $P = S$) : $|X| \equiv 1 \pmod{p}$. \square

Corollaire 2.9 *Si S est un p -Sylow de G , alors $(G : N_G(S)) \equiv 1 \pmod{p}$.*

L'application f de $G/N_G(S)$ dans l'ensemble des p -Sylow de G , définie par $f(\bar{g}) = gSg^{-1}$ (où g est un représentant quelconque de \bar{g}) est bijective. \square

On a vu que pour tout sous-groupe H de G , il existe un p -Sylow de G dont l'intersection avec H est un p -Sylow de H . Ce n'est pas vrai pour tout p -Sylow de G . Mais si H est normal, on a :

Proposition 2.10 *Soit H un sous-groupe normal de G et soit S un p -Sylow de G . Alors*

- (1) $S \cap H$ est un p -Sylow de H .
- (2) L'image de S dans G/H est un p -Sylow de G/H (et on les obtient tous ainsi).
- (3) (**Frattini**) Si Q est un p -Sylow de H , alors $H.N_G(Q) = G$.

(1) Evident.

(2) L'image de S dans G/H est isomorphe à $S/(H \cap S)$. Si p^a (resp. p^b) est la puissance de p maximale divisant l'ordre de H (resp. de G/H), p^{a+b} est la puissance maximale de p divisant l'ordre de G . Par suite, S a p^{a+b} éléments. De plus, $H \cap S$ a au plus p^a éléments donc $S/(H \cap S)$ au moins p^b et donc exactement p^b . Il s'ensuit que $S/(H \cap S)$ est un p -Sylow de G/H . D'autre part, on obtient tous les p -Sylow par conjugaison, d'où (2).

(3) Soit $g \in G$. On a $gQg^{-1} \subset gHg^{-1} = H$ (H est normal). Or gQg^{-1} est un p -Sylow de H , donc il existe $h \in H$ tel que $gQg^{-1} = hQh^{-1}$, donc $h^{-1}g \in N_G(Q)$ et donc $g \in H.N_G(Q)$. Ainsi $G \subset H.N_G(Q)$, donc $H.N_G(Q) = G$. \square

Corollaire 2.11 *Soit S un p -Sylow de G et soit H un sous-groupe de G contenant $N_G(S)$. Alors $N_G(H) = H$.*

H est normal dans $N_G(H)$ et contient S qui est donc un p -Sylow de H . On applique le point (3) de la proposition ci-dessus : $H.N_G(S) = N_G(H)$. Donc $N_G(H) \subset H$ d'où le résultat. \square

En particulier, si S est un p -Sylow de G , on a $N_G(N_G(S)) = N_G(S)$.

2.4 Fusion

Soit S un p -Sylow de G . On note N le normalisateur de S dans G . On se pose le problème de savoir si deux éléments de S conjugués dans G sont conjugués dans N . On a la :

Proposition 2.12 (Burnside) *Soient X et Y deux parties du centre de S , conjuguées dans G et soit $g \in G$ tel que $gXg^{-1} = Y$. Alors il existe $n \in N$ tel que $nXn^{-1} = gXg^{-1}$ pour tout $x \in X$. En particulier, $nXn^{-1} = Y$.*

On veut trouver $n \in N$ tel que $nXn^{-1} = gXg^{-1}$ pour tout $x \in X$ i.e. $g^{-1}nXn^{-1}g = x$ pour tout $x \in X$. Donc on cherche $n \in N$ tel que $g^{-1}n \in A = C_G(X)$ (le centralisateur de X). Or X est contenu dans le centre de S donc A contient S . De même, $Y = gXg^{-1}$ donc $g^{-1}Sg$ est contenu dans A . Les groupes S et $g^{-1}Sg$ sont des p -Sylow de A (il suffit de regarder leurs ordres) donc sont conjugués dans A : il existe $a \in A$ tel que $ag^{-1}Sga^{-1} = S$. Donc $n = ga^{-1}$ appartient à N et $g^{-1}n$ appartient à A . \square

Corollaire 2.13 *Soient x et y deux éléments du centre de S . S'ils sont conjugués dans G , ils sont conjugués dans N .*

Remarque. L'hypothèse « x et y appartiennent au centre de S » ne peut être supprimée : si l'on prend $G = \mathbf{GL}_3(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ et

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

alors

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \right\}$$

et les éléments

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont conjugués dans G et ne le sont pas dans N .

Disons que deux éléments x, y de S sont *localement conjugués* s'il existe un sous-groupe U de S les contenant tel que x et y soient conjugués dans $N_G(U)$.

Théorème 2.14 (Alperin) *La relation d'équivalence sur S engendrée par la relation « x et y sont localement conjugués » est la relation « x et y sont conjugués dans G ».*

En d'autres termes :

Théorème 2.15 *Si $x, y \in S$ sont conjugués dans G , il existe une suite a_0, \dots, a_n d'éléments de S telle que :*

- (1) $a_0 = x$ et $a_n = y$.
- (2) a_i est localement conjugué de a_{i+1} pour $0 \leq i \leq n-1$.

Cela résulte du théorème plus précis suivant :

Théorème 2.16 *Soit A une partie de S et soit $g \in G$ tel que $A^g \subset S$. Il existe alors un entier $n \geq 1$, des sous-groupes U_1, \dots, U_n de S et des éléments g_1, \dots, g_n de G avec :*

- (1) $g = g_1 \cdots g_n$.
- (2) $g_i \in N_G(U_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.
- (3) $A^{g_1 \cdots g_{i-1}} \subset U_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Remarque. Pour $i = 1$, (3) signifie que $A \subset U_1$. Noter que l'on a $A^{g_1 \cdots g_i} \subset U_i$ pour $1 \leq i \leq n$, comme on le voit en combinant (2) et (3). On a en particulier $A^g \subset U_n$.

Le théorème ci-dessus est un corollaire de celui-ci (prendre A réduit à un élément).

Démonstration. Soit T le sous-groupe de S engendré par A . On raisonne par récurrence sur l'indice $(S : T)$ de T dans S . Si cet indice est 1, on a $T = S$, d'où $S^g = S$ et $g \in N_G(S)$. On prend alors $n = 1$, $g_1 = g$ et $U_1 = S$.

Supposons donc $(S : T) > 1$, i.e. $T \neq S$. Le groupe $T_1 = N_S(T)$ est alors distinct de T . C'est un p -sous-groupe de $N_G(T)$. Choisissons un p -Sylow Σ de $N_G(T)$ contenant T_1 . D'après le th. 2.6, il existe $u \in G$ tel que $\Sigma^u \subset S$. Posons d'autre part $V = T^g$; on a $V \subset S$ par hypothèse. Le groupe Σ^g est un p -Sylow de $N_G(V) = (N_G(T))^g$.

Comme $N_S(V)$ est un p -sous-groupe de $N_G(V)$, il existe $w \in N_G(V)$ tel que $(N_S(V))^w \subset \Sigma^g$. Posons $v = u^{-1}gw^{-1}$. On a $g = uvw$.

On va maintenant décomposer u et v :

(i) On a $T^u \subset \Sigma^u \subset S$. Comme l'indice de T_1 dans S est strictement inférieur à celui de T , l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe des sous-groupes U_1, \dots, U_m de S et des éléments $u_1 \in N_G(U_1), \dots, u_m \in N_G(U_m)$ avec $u = u_1 \cdots u_m$ et $T_1^{u_1 \cdots u_{i-1}} \subset U_i$ pour $1 \leq i \leq m$.

(ii) Posons $T_2 = N_S(V)$ et $T_3 = T_2^{v^{-1}} = T_2^{wg^{-1}u}$. Comme T_2^w est contenu dans Σ^g , on a $T_3 \subset \Sigma^{gg^{-1}u} = \Sigma^u$. Le groupe T_3 est contenu dans S , et $T_3^v = T_2$ aussi. Comme l'indice de T_3 est strictement inférieur à celui de T , on en déduit comme ci-dessus l'existence de sous-groupes V_1, \dots, V_r de S et d'éléments $v_j \in N_G(V_j)$, avec $v = v_1 \cdots v_r$ et $T_3^{v_1 \cdots v_{j-1}} \subset V_j$ pour $1 \leq j \leq r$.

Il reste à vérifier que les sous-groupes $U_1, \dots, U_m, V_1, \dots, V_r, V$ de S et la décomposition $g = u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_r w$ de g satisfont aux conditions du théorème.

On a

$$u_i \in N_G(U_i), \quad v_j \in N_G(V_j), \quad w \in N_G(V)$$

par construction, ainsi que $T^{u_1 \cdots u_{i-1}} \subset U_i$ ($1 \leq i \leq m$) puisque T est contenu dans T_1 . Il reste à voir que

$$T^{u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_{j-1}} \subset V_j$$

pour $1 \leq j \leq r$.

Or $T^{u_1 \cdots u_m} = T^u$ est contenu dans $T_3 = T_2^{wg^{-1}u}$; en effet, $V = T^g$ est normalisé par w^{-1} ; on a donc $T^{gw^{-1}} = V \subset N_S(V) = T_2$, d'où $T \subset T_2^{wg^{-1}}$ et $T^u \subset T_2^{wg^{-1}u}$.

On déduit de là que

$$T^{u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_{j-1}} = T^{uv_1 \cdots v_{j-1}} \subset T_3^{v_1 \cdots v_{j-1}} \subset V_j,$$

ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 3

Groupes résolubles et groupes nilpotents

3.1 Groupes résolubles

Soit G un groupe et soient x, y deux éléments de G . L'élément $x^{-1}y^{-1}xy$ est appelé le *commutateur* de x et y . On le note (x, y) . On a

$$xy = yx(x, y).$$

Si A et B sont deux sous-groupes de G , on note (A, B) le groupe engendré par les commutateurs (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$. Le groupe (G, G) est appelé le *groupe des commutateurs* de G ou encore le *groupe dérivé* de G et est noté $D(G)$. C'est un sous-groupe caractéristique de G . De sa définition résulte aussitôt la :

Proposition 3.1 *Soit H un sous-groupe de G . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) H contient $D(G)$.
- (2) H est normal et G/H est abélien.

En ce sens, $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de G . On le note parfois G^{ab} .

On peut itérer le procédé et définir la suite des sous-groupes dérivés de G :

$$\begin{aligned} D^0G &= G, \\ D^nG &= (D^{n-1}G, D^{n-1}G) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

On a $G \supset D^1G \supset D^2G \supset \dots$.

Définition 3.1 *Un groupe G est dit résoluble s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $D^nG = \{1\}$. On appelle alors classe de résolubilité de G et on note $cl(G)$ le plus petit entier n positif pour lequel $D^nG = \{1\}$.*

Ainsi, $cl(G) = 0$ équivaut à $G = \{1\}$ et $cl(G) \leq 1$ équivaut à dire que G est abélien.

Proposition 3.2 *Soit G un groupe et soit n un entier ≥ 1 . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) G est résoluble de classe $\leq n$,
- (2) Il existe une suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{1\}$ de sous-groupes normaux de G tels que G_i/G_{i+1} soit abélien pour $0 \leq i \leq n-1$,
- (2') Il existe une suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{1\}$ de sous-groupes de G tels que G_i soit normal dans G_{i-1} et que G_{i-1}/G_i soit abélien, pour $1 \leq i \leq n$,
- (3) Il existe un sous-groupe abélien A normal dans G tel que G/A soit résoluble de classe $\leq n-1$.

(1) \Rightarrow (2) Posons $G_i = D^i G$ pour tout $i \geq 0$. Puisque $D(G)$ est stable par tout automorphisme (même non intérieur !) de G , $D^i G$ est normal dans G pour tout i . La suite $(G_i)_{i \geq 0}$ ainsi définie vérifie donc (2).

(2) \Rightarrow (2') est trivial.

(2') \Rightarrow (1) Par récurrence sur k on voit que $D^k G \subset G_k$ pour tout k , d'où $D^n G = \{1\}$.

(1) \Rightarrow (3) On prend $A = D^{n-1} G$.

(3) \Rightarrow (1) D'après l'implication (1) \Rightarrow (2), appliquée à G/A et à $n-1$, il existe une suite

$$A_0 = G \supset A_1 \cdots \supset A_{n-1} = A$$

de sous-groupes normaux de G telle que la suite des quotients

$$G/A \supset A_1/A \supset \cdots \supset A_{n-1}/A = \{1\}$$

vérifie la condition (2). Alors la suite

$$G \supset A_1 \supset \cdots \supset A_{n-1} \supset \{1\}$$

vérifie la condition (2) et l'implication (2) \Rightarrow (1) appliquée à G et à n permet de conclure. \square

Remarque. Tout sous-groupe (et tout groupe quotient) d'un groupe résoluble de classe $\leq n$ est résoluble de classe $\leq n$.

Proposition 3.3 *Soit G un groupe fini et soit $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{1\}$ une suite de Jordan-Hölder de G . Pour que G soit résoluble, il faut et il suffit que G_i/G_{i+1} soit cyclique d'ordre premier pour $0 \leq i \leq n-1$.*

Remarquons d'abord que si un groupe est simple et résoluble, alors son groupe dérivé, étant normal, est réduit à $\{1\}$; le groupe est donc abélien et, étant simple, est cyclique d'ordre premier. Le théorème en résulte. \square

Exemples.

(1) Les groupes \mathcal{S}_n sont résolubles si et seulement si $n \leq 4$.

(2) Un groupe simple non abélien n'est pas résoluble.

(3) Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K et soit

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = 0$$

un drapeau complet (i.e. une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de V tels que $\text{codim}(V_i) = i$). On pose

$$G = \{s \in \mathbf{GL}(V) \mid sV_i = V_i, 0 \leq i \leq n\}$$

(si on choisit dans V une base adaptée au drapeau, G peut être identifié au groupe des matrices triangulaires supérieures).

On définit alors une suite de sous-groupes $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ de G par

$$B_i = \{s \in G \mid (s-1)V_j \subset V_{i+j}, 0 \leq j \leq n-i\}.$$

En particulier, $B_0 = G$.

On va démontrer que $(B_j, B_k) \subset B_{j+k}$ pour $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq k \leq n$ avec $0 \leq j+k \leq n$. Soient en effet $s \in B_j$, $t \in B_k$ et $x \in V_i$. Il existe $v_{i+k} \in V_{i+k}$ tel que

$$tx = x + v_{i+k},$$

puis

$$stx = sx + sv_{i+k} = x + w_{i+j} + v_{i+k} + t_{i+j+k}$$

(avec $w_{i+j} \in V_{i+j}$ et $t_{i+j+k} \in V_{i+j+k}$). De même

$$tsx = t(x + w_{i+j}) = x + v_{i+k} + w_{i+j} + t'_{i+j+k}$$

(avec $t'_{i+j+k} \in V_{i+j+k}$). Donc

$$stx \equiv tsx \pmod{V_{i+j+k}}$$

ou encore

$$s^{-1}t^{-1}stx \equiv x \pmod{V_{i+j+k}}$$

d'où le résultat. En particulier :

- $(B_0, B_i) \subset B_i$ pour $0 \leq i \leq n$, donc les B_i sont normaux dans $B_0 = G$.
- $(B_i, B_i) = D(B_i) \subset B_{2i} \subset B_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$, donc les quotients B_i/B_{i+1} sont abéliens pour $1 \leq i \leq n-1$.
- Enfin, $B_0/B_1 = G/B_1$ s'identifie au groupe des matrices diagonales (abélien car K est commutatif). Donc la suite $B_0 = G \supset B_1 \supset \dots \supset B_n = \{1\}$ vérifie la condition (2) et G est résoluble.

(4) On verra ultérieurement (th. 5.4) que tout groupe d'ordre $p^a q^b$ (où p et q sont premiers) est résoluble.

(5) Mentionnons aussi le (très difficile) théorème de Feit-Thompson¹ : tout groupe d'ordre impair est résoluble (ou encore : l'ordre d'un groupe simple non abélien est pair).

(6) Les groupes résolubles interviennent en théorie des corps. Soit K un corps de caractéristique 0 et soit \overline{K} une clôture algébrique de K . On note K_{rad} le plus petit sous-corps de \overline{K} contenant K tel que pour tout $x \in K_{rad}$ et tout entier $n \geq 1$, on ait $x^{1/n} \in K_{rad}$. On démontre qu'une extension galoisienne finie de K est contenue dans K_{rad} si et seulement si son groupe de Galois est résoluble (i.e. une équation est *résoluble par radicaux* si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. C'est de là que provient la terminologie « résoluble »).

¹Référence : W. Feit et J.G. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. 13 (1963), 775 – 1029.

3.2 Suite centrale descendante

Soit G un groupe. On appelle *suite centrale descendante* de G la suite $(C^n G)_{n \geq 1}$ de sous-groupes de G définie par récurrence par :

$$\begin{aligned} C^1 G &= G, \\ C^{n+1} G &= (G, C^n G) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, $C^n G$ est un sous-groupe caractéristique de G .

Proposition 3.4 *On a $(C^i G, C^j G) \subset C^{i+j} G$ pour tout $i \geq 1$ et tout $j \geq 1$.*

On raisonne par récurrence sur i , la proposition étant claire pour $i = 1$ et tout $j \geq 1$. Soit $j \geq 1$; on a $(C^{i+1} G, C^j G) = ((G, C^i G), C^j G)$. Or $((C^i G, C^j G), G) \subset (C^{i+j} G, G)$ (par hypothèse de récurrence), donc $((C^i G, C^j G), G) \subset C^{i+j+1} G$. De même $((C^j G, G), C^i G)$ est contenu dans $C^{i+j+1} G$. Le lemme suivant permet de conclure. \square

Lemme 3.5 *Si X, Y et Z sont des sous-groupes normaux de G et si H est un sous-groupe de G contenant $((Y, Z), X)$ et $((Z, X), Y)$, alors H contient $((X, Y), Z)$.*

On utilise l'identité de Hall :

$$(x^y, (y, z))(y^z, (z, x))(z^x, (x, y)) = 1,$$

(où $x^y = y^{-1}xy$) qui s'obtient en développant les quarante-deux termes du membre de gauche. (cf. Bourbaki, A.I, § 6). \square

Remarque. L'identité de Hall est l'analogue pour les groupes de l'identité de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

pour les algèbres de Lie. On peut l'utiliser pour associer à tout groupe G muni d'une filtration (G_i) satisfaisant à $(G_i, G_j) \subset G_{i+j}$ une algèbre de Lie $gr(G)$, à savoir

$$gr(G) = \bigoplus_i G_i/G_{i+1}.$$

Si $\xi \in G_i/G_{i+1}$ et $\eta \in G_j/G_{j+1}$, le crochet

$$[\xi, \eta] \in G_{i+j}/G_{i+j+1}$$

est par définition l'image du commutateur (x, y) où x (resp. y) est un représentant dans G_i (resp. G_j) de ξ (resp. η). Ceci s'applique notamment au cas où $G_i = C^i G$ (cf. aussi Bourbaki, Lie II, § 4, n° 4).

3.3 Groupes nilpotents

Définition 3.2 *Un groupe G est dit nilpotent s'il existe un entier n positif tel que $C^{n+1} G = \{1\}$. La classe de nilpotence de G est alors le plus petit tel entier n .*

En particulier :

- Le groupe G est abélien si et seulement s'il est nilpotent de classe ≤ 1 .
- Un produit fini de groupes nilpotents est nilpotent et la classe de nilpotence du produit est la borne supérieure des classes des groupes.
- Un sous-groupe (resp. un groupe quotient) d'un groupe nilpotent est nilpotent.

Proposition 3.6 *Tout groupe nilpotent est résoluble.*

En effet, pour tout $n \geq 0$, on a $D^n G \subset C^{2^n} G$. □

La réciproque est fautive : le groupe \mathcal{S}_3 est résoluble de classe 2. Regardons la suite centrale descendante de \mathcal{S}_3 ; on a $C^1 \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_3$, $C^2 \mathcal{S}_3 = \mathcal{C}_3$ (groupe cyclique d'ordre 3) puis $C^3 \mathcal{S}_3 = \mathcal{C}_3$, etc. La suite est stationnaire et n'atteint pas $\{1\}$. Donc \mathcal{S}_3 n'est pas nilpotent.

On peut former des groupes nilpotents de la façon suivante :

Proposition 3.7 *Un groupe G est nilpotent de classe $\leq n + 1$ si et seulement s'il est extension centrale d'un groupe Γ nilpotent de classe $\leq n$ (i.e. s'il existe une suite exacte $\{1\} \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow \Gamma \rightarrow \{1\}$ où A est contenu dans le centre de G).*

Si G est nilpotent de classe $n + 1$, alors $C^{n+2} G = \{1\}$ donc $C^{n+1} G$ est dans le centre de G . Posons $\Gamma = G/C^{n+1} G$; on a $C^{n+1} \Gamma = \{1\}$ donc Γ est nilpotent de classe $\leq n$.

Réciproquement, si une telle suite exacte existe et si $C^{n+1} \Gamma = \{1\}$, alors $C^{n+1} G \subset A$, donc $C^{n+1} G$ est contenu dans le centre de G , et $C^{n+2} G = \{1\}$. □

Corollaire 3.8 *Soit G un groupe nilpotent et soit H un sous-groupe de G distinct de G . Alors $N_G(H)$ est distinct de H .*

On raisonne par récurrence sur la classe de nilpotence n de G . Si $n = 1$, on a $N_G(H) = G$ (car G est abélien) donc $N_G(H) \neq H$.

Si $n \geq 2$, choisissons un sous-groupe central A de G tel que G/A soit nilpotent de classe $\leq n - 1$. Alors $N_G(H)$ contient A . Si H ne contient pas A alors $N_G(H) \neq H$. Si H contient A , alors H/A est un sous-groupe propre de G/A et l'hypothèse de récurrence montre que $H/A \neq N_{G/A}(H/A)$. Comme $N_G(H)/A = N_{G/A}(H/A)$, on en déduit que $N_G(H)$ est distinct de H . □

Une autre caractérisation des groupes nilpotents est donnée par la

Proposition 3.9 *Un groupe G est nilpotent si et seulement s'il existe une filtration $(G_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ telle que $G_1 = G \supset G_2 \supset \dots \supset G_{n+1} = \{1\}$ avec $(G, G_i) \subset G_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Remarque. Une condition plus forte serait $(G_i, G_j) \subset G_{i+j}$.

Démonstration. Si une telle filtration existe, alors $C^k G \subset G_k$ pour tout $k \geq 1$, donc G est nilpotent. Réciproquement, si G est nilpotent, on prend $G_k = C^k G$. □

Exemple. Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K et soit

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_n = 0$$

un drapeau complet de V . Reprenons l'exemple du § 3.1 et posons

$$B_j = \{g \in \mathbf{GL}(V) \mid (g - 1)V_i \subset V_{i+j}, i \geq 0\}.$$

Alors B_1 est nilpotent; en effet $(B_i)_{i \geq 1}$ est une filtration telle que $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n = \{1\}$ et $(B_i, B_j) \subset B_{i+j}$ comme on l'a vu plus haut.

En application, on a le :

Théorème 3.10 (Kolchin) *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K et soit G un sous-groupe de $\mathbf{GL}(V)$. On suppose que tout élément g de G admet 1 comme unique valeur propre (i.e. $g - 1$ est nilpotent). Alors il existe un drapeau complet de V tel que G soit contenu dans le groupe B_1 correspondant (cf. ci-dessus). En particulier, G est nilpotent.*

On raisonne par récurrence sur la dimension n de V , le cas $n = 0$ étant trivial. Supposons donc $n \geq 1$ et montrons qu'il existe $x \in V$ non nul tel que $gx = x$ pour tout $g \in G$. Le problème étant linéaire, on peut étendre les scalaires et supposer K algébriquement clos. Soit A_G le sous-espace vectoriel de $\text{End}(V)$ engendré par G . C'est une sous-algèbre de $\text{End}(V)$. Distinguons deux cas :

- V est un A_G -module réductible, i.e. il existe $V' \subset V$, stable par G , distinct de 0 et de V . L'hypothèse de récurrence s'applique à V' et fournit un x non nul dans V' tel que $gx = x$ pour tout $g \in G$.
- Si V est irréductible, on a $A_G = \text{End}(V)$ d'après un théorème de Burnside (cf. Bourbaki, A. VIII, § 4, n° 3). Or si $a, a' \in A_G$, on a $n\text{Tr}(aa') = \text{Tr}(a)\text{Tr}(a')$. En effet, c'est clair si $a, a' \in G$ car alors $\text{Tr}(aa') = \text{Tr}(a) = \text{Tr}(a') = n$ et c'est donc vrai dans A_G par linéarité. Si $n > 1$, les éléments a et a' de matrices respectives

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont dans $\text{End}(V)$ donc dans A_G . Or $\text{Tr}(a) = \text{Tr}(a') = 1$ et $\text{Tr}(aa') = 0$, donc $\dim(V) = 1$ et tout x non nul de V convient.

Une fois l'existence de x prouvée, on note V_{n-1} la droite engendrée par x . L'hypothèse de récurrence, appliquée à V/V_{n-1} fournit un drapeau complet pour V/V_{n-1} , stable par G , d'où aussitôt un drapeau complet pour V , stable par G et il est clair que G est contenu dans le sous-groupe B_1 correspondant. \square

3.4 Groupes nilpotents finis

Soit p un nombre premier.

Proposition 3.11 *Tout p -groupe est nilpotent.*

On va en donner deux démonstrations.

- Soit P un p -groupe; alors P peut se plonger dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ pour un entier n suffisamment grand. Donc P est contenu dans un p -Sylow de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, qui est conjugué, comme on l'a déjà vu, à l'ensemble B_1 des matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux égaux à 1. D'après l'exemple du § 3.3, B_1 est nilpotent, donc aussi P .

• On peut supposer $P \neq \{1\}$. Faisons opérer P sur lui-même par automorphismes intérieurs ; l'ensemble des points fixes est le centre $C(P)$ de P . Comme P est un p -groupe, on a d'après le lemme 2.7

$$|P| \equiv |C(P)| \pmod{p},$$

donc $C(P) \neq \{1\}$. Ainsi $P/C(P)$ est d'ordre strictement inférieur à celui de P . Une récurrence permet de conclure. \square

Corollaire 3.12 *Soit G un groupe d'ordre p^n (avec p premier et $n \geq 1$). Alors :*

- (1) *Tout sous-groupe de G d'ordre p^{n-1} est normal.*
- (2) *Si H est un sous-groupe de G , il existe une suite de sous-groupes $(H_i)_{1 \leq i \leq m}$ telle que $H = H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_m = G$ avec $(H_i : H_{i-1}) = p$ pour $2 \leq i \leq m$.*
- (3) *Tout sous-groupe de G distinct de G est contenu dans un sous-groupe d'ordre p^{n-1} .*

(1) Soit H un sous-groupe de G d'ordre p^{n-1} . Alors H est distinct de $N_G(H)$ car G est nilpotent. Donc l'ordre de $N_G(H)$ est p^n et H est normal dans G .

(2) On raisonne par récurrence sur l'ordre de G . Soit donc H un sous-groupe de G , qu'on peut supposer distinct de G . Soit H' un sous-groupe de G , distinct de G , contenant H , d'ordre maximal. Alors H' est distinct de $N_G(H')$, donc $N_G(H') = G$ et H' est normal dans G . En particulier, G/H' est un p -sous-groupe d'ordre p^k pour un certain entier $k \geq 1$. Si $k > 1$, il existe un sous-groupe de G/H' , distinct de $\{1\}$ et de G/H' , donc un sous-groupe de G , distinct de G contenant H' strictement, ce qui est absurde. Donc $k = 1$ et $(G : H') = p$. L'hypothèse de récurrence appliquée à H' donne le résultat.

(3) découle immédiatement de (2). \square

Corollaire 3.13 *Tout produit fini de p -groupes est nilpotent.*

On va démontrer une réciproque.

Théorème 3.14 *Soit G un groupe fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *G est nilpotent.*
- (2) *G est produit de p -groupes.*
- (3) *Pour tout p premier, G a un unique p -Sylow.*
- (4) *Soient p et p' deux nombres premiers distincts et soit S_p (resp. $S_{p'}$) un p -Sylow de G (resp. un p' -Sylow); alors S_p et $S_{p'}$ se centralisent mutuellement (i.e. tout élément de S_p commute à tout élément de $S_{p'}$).*
- (5) *Deux éléments de G d'ordres premiers entre eux commutent.*

(2) \Rightarrow (1) C'est le cor. 3.13 ci-dessus.

(1) \Rightarrow (3) Soit S un p -Sylow de G et soit N son normalisateur. Alors N est son propre normalisateur (cf. cor. 2.11). Puisque nous supposons G nilpotent, cela entraîne $N = G$, cf. cor. 3.8, donc S est normal. Les p -Sylow de G étant conjugués, G a un unique p -Sylow.

(3) \Rightarrow (4) Pour tout nombre premier p , soit S_p l'unique p -Sylow de G : il est normal dans G . Si p et p' sont deux premiers distincts, $S_p \cap S_{p'}$ est réduit à $\{1\}$ car c'est à la fois un p -groupe et un p' -groupe. Or si $x \in S_p$ et $y \in S_{p'}$, on a $x^{-1}y^{-1}xy \in S_p \cap S_{p'}$, d'où $x^{-1}y^{-1}xy = 1$. Donc S_p et $S_{p'}$ se centralisent mutuellement.

(4) \Rightarrow (2) Pour tout p premier, choisissons un p -Sylow de G qu'on note S_p . Le groupe engendré par les S_p (p décrivant l'ensemble des nombres premiers) est G tout entier (car son ordre est divisible par celui de G). Définissons alors une application

$$\varphi : \begin{cases} \prod_p S_p & \longrightarrow G \\ (s_p)_p & \longmapsto \prod_p s_p. \end{cases}$$

Par hypothèse, φ est un homomorphisme, car les S_p se centralisent mutuellement. D'autre part, φ est surjective, car G est engendré par les S_p . Enfin G et $\prod_p S_p$ ont même cardinal, donc φ est un isomorphisme, ce qui démontre (2).

(2) \Rightarrow (5) Supposons que G soit un produit de p -groupes G_p . Soient x et y deux éléments de G d'ordres premiers entre eux. Alors $x = (x_p)_p$ et $y = (y_p)_p$ et pour tout p on a $x_p = 1$ ou $y_p = 1$. En effet, on a $x_p = 1$ si et seulement si p ne divise pas l'ordre de x . Donc $x^{-1}y^{-1}xy = (x_p^{-1}y_p^{-1}x_p y_p)_p = (1)$, donc $xy = yx$.

(5) \Rightarrow (4) C'est évident.

En résumé, nous avons montré les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} (1) & \longleftarrow & (2) & \longrightarrow & (5) \\ & & \Downarrow & & \swarrow \\ (3) & \longrightarrow & (4) & & \end{array}$$

Le théorème en résulte. □

3.5 Cas des groupes abéliens

Tout groupe abélien est nilpotent ; d'après le § 3.4, tout groupe abélien est produit de p -groupes abéliens. On peut alors poursuivre la décomposition grâce au

Théorème 3.15 *Tout p -groupe abélien est produit de groupes cycliques.*

Remarque. Si G est un p -groupe abélien fini, il existe un entier n tel que $p^n x = 0$ pour tout $x \in G$, et l'on peut considérer G comme un module sur $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ (pour n assez grand). Il suffit donc de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.16 *Tout module (non nécessairement fini) sur $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ est somme directe de modules monogènes (isomorphes à $\mathbf{Z}/p^i \mathbf{Z}$ pour $i \leq n$).*

Soit G un module sur $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ et soit V le module quotient G/pG : c'est un espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Notons G_i l'ensemble $\{x \in G \mid p^i x = 0\}$. Les G_i définissent une filtration de G :

$$G_0 = 0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G.$$

Soit V_i l'image de G_i dans V , alors

$$V_0 = 0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V.$$

On peut choisir une base S de V adaptée à cette décomposition (i.e. $S_i = S \cap V_i$ est une base de V_i).

Si $s \in S$, on note $i(s)$ le plus petit i pour lequel $s \in S_i$ et on choisit un représentant \bar{s} de s dans $G_{i(s)}$. On a $p^{i(s)}\bar{s} = 0$. Soit $G' = \bigoplus_{s \in S} \mathbf{Z}/p^{i(s)}\mathbf{Z}$; on définit un homomorphisme φ de G' dans G de la façon suivante : si $(n_s)_{s \in S} \in G'$, on pose $\varphi((n_s)) = \sum_{s \in S} n_s \bar{s}$. On va montrer que φ est un isomorphisme.

• φ est surjectif : il suffit de prouver que le sous-groupe H de G engendré par les \bar{s} est G tout entier. Or l'application projection de H dans V est surjective (par définition, \bar{s} s'envoie sur s qui parcourt une base de V). Donc $H + pG = G$ ou encore $G = pG + H$. En itérant,

$$G = p(pG + H) = p^2G + H = \dots = p^nG + H = H.$$

• φ est injectif : soit $(n_s) \in G'$ tel que $\sum_{s \in S} n_s \bar{s} = 0$ dans G . Montrons que n_s est divisible par p^i pour tout i (donc $n_s = 0$). En effet, montrons par récurrence sur i que $n_s \in p^i (\mathbf{Z}/p^{i(s)}\mathbf{Z})$. Pour $i = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si c'est vrai jusqu'à l'ordre k , on a $n_s \in p^k (\mathbf{Z}/p^{i(s)}\mathbf{Z})$. En particulier $n_s = 0$ si $i(s) \leq k$. On regarde donc les s pour lesquels $i(s) \geq k + 1$. Par hypothèse,

$$\sum_{i(s) \geq k+1} n_s \bar{s} = 0.$$

Posons $n_s = p^k m_s$ avec $m_s \in \mathbf{Z}/p^{i(s)}\mathbf{Z}$; on a

$$p^k \sum_{i(s) \geq k+1} m_s \bar{s} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i(s) \geq k+1} m_s \bar{s} \in G_k,$$

d'où, par projection,

$$\sum_{i(s) \geq k+1} m_s s \in V_k.$$

Vu le choix de S , on en déduit que $m_s \equiv 0 \pmod{p}$. Donc p^{k+1} divise n_s et on en déduit que n_s appartient à $p^{k+1} (\mathbf{Z}/p^{i(s)}\mathbf{Z})$. \square

Exercice. Si G est un module sur $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, tout sous-module de G isomorphe à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ est facteur direct.

Application des 2-groupes : constructions par règle et compas. Soit K un corps de caractéristique quelconque et soit L une extension galoisienne de K dont le groupe de Galois G est un 2-groupe. D'après le cor. 3.12, il existe G' normal dans G , d'indice 2, donc un corps intermédiaire L' , fixé par G' , qui est une extension quadratique de K . Si on itère, L/K apparaît comme une tour d'extensions quadratiques.

Réciproquement, si L/K est une telle tour, l'extension galoisienne engendrée a pour groupe de Galois un 2-groupe. On a ainsi une caractérisation des extensions galoisiennes dont le groupe est un 2-groupe. Si la caractéristique de K est distincte de 2, une extension quadratique est de la forme $K[\sqrt{a}] \simeq K[X]/(X^2 - a)$ où $a \in K^* - K^{*2}$. (Si $\text{car} K = 2$ on remplace $X^2 - a$ par $X^2 + X + a$).

Ceci rejoint le problème des nombres constructibles par règle et compas : ce sont les

nombres (algébriques sur \mathbf{Q}) contenus dans une extension galoisienne de \mathbf{Q} dont le groupe de Galois est un 2-groupe.

Exemple. $\sqrt[3]{2}$ ne marche pas, car $X^3 - 2$ est irréductible et le groupe de Galois associé à la plus petite extension possible contenant $\sqrt[3]{2}$ est \mathcal{S}_3 dont l'ordre n'est pas une puissance de 2.

3.6 Sous-groupe de Frattini

Soit G un groupe fini. On appelle *sous-groupe de Frattini* de G et on note $\Phi(G)$ l'intersection des sous-groupes maximaux² de G . C'est un sous-groupe caractéristique de G .

Un problème intéressant est de savoir à quelles conditions une partie S de G engendre le groupe G . On a la proposition suivante :

Proposition 3.17 *Soit S une partie de G et soit H le sous-groupe engendré par S . On a $H = G$ si et seulement si $H \cdot \Phi(G) = G$, i.e. si S engendre $G/\Phi(G)$.*

En effet, si $H \cdot \Phi(G) = G$ et $H \neq G$, il existe H' maximal contenant H et distinct de G ; $\Phi(G)$ est aussi contenu dans H' par définition : $G = H \cdot \Phi(G)$ est donc contenu dans H' , ce qui est absurde. \square

Théorème 3.18 *Le groupe $\Phi(G)$ est nilpotent.*

On va utiliser la caractérisation (3) du th. 3.14. Soit S un p -Sylow de $\Phi(G)$ (pour un p premier quelconque). On a vu dans l'étude des groupes de Sylow (prop. 2.10) que $G = \Phi(G) \cdot N_G(S)$. D'après la proposition ci-dessus, on a $N_G(S) = G$, donc S est normal dans G , donc dans $\Phi(G)$, donc est l'unique p -Sylow de $\Phi(G)$ qui est alors nilpotent. \square

Dans le cas où G est un p -groupe, on a une caractérisation simple de $\Phi(G)$:

Théorème 3.19 *Si G est un p -groupe, $\Phi(G)$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs et les puissances p -ièmes de G , i.e. $\Phi(G) = (G, G) \cdot G^p$.*

Si G est d'ordre p^n , ses sous-groupes H maximaux sont d'ordre p^{n-1} , donc sont normaux, donc sont des noyaux d'homomorphismes surjectifs de G dans $G/H \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (et réciproquement un tel homomorphisme définit un sous-groupe maximal de G). Donc $\Phi(G)$ est l'intersection des noyaux d'homomorphismes surjectifs de G dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Or un tel homomorphisme est trivial sur (G, G) et G^p . Donc $(G, G) \cdot G^p \subset \Phi(G)$.

Réciproquement $V = G/(G, G) \cdot G^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, dans lequel 0 est l'intersection d'hyperplans. Or un hyperplan est le noyau d'un homomorphisme de V dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Le groupe $(G, G) \cdot G^p$ contient donc $\Phi(G)$. Finalement $\Phi(G) = (G, G) \cdot G^p$. \square

Application. $G/\Phi(G)$ est donc le plus grand quotient de G qui soit abélien élémentaire (i.e. produit de groupes cycliques d'ordre p).

²Un sous-groupe H de G est dit *maximal* s'il est distinct de G et maximal pour cette propriété; on dit alors que l'action de G sur G/H est *primitive*.

Corollaire 3.20 *Une partie S de G engendre G si et seulement si son image dans $G/(G, G).G^p$ engendre ce groupe.*

En effet, on a alors $\langle S \rangle \cdot \Phi(G) = G$ donc $\langle S \rangle = G$. □

Ainsi le cardinal minimum d'une partie S génératrice de G est $\dim_{\mathbf{F}_p}(G/\Phi(G))$ (dans le cas où G est un p -groupe).

Caractérisations par les sous-groupes à deux générateurs. On peut dans la même veine étudier si les propriétés de certains sous-groupes de G permettent de démontrer des propriétés analogues pour le groupe tout entier.

Proposition 3.21 *Soit G un groupe (resp. un groupe fini). Supposons que tout sous-groupe de G engendré par deux éléments soit commutatif (resp. nilpotent). Alors G est commutatif (resp. nilpotent).*

Soient $x, y \in G$. Le groupe $\langle x, y \rangle$ est commutatif, donc $xy = yx$. Pour les groupes nilpotents finis, on utilise la caractérisation (5) du th. 3.14. □

On peut se demander si un théorème analogue est vrai pour les groupes résolubles. On va d'abord définir la notion de *groupe simple minimal*. Soit G un groupe fini simple non abélien. On dit que G est *minimal* si tout sous-groupe de G distinct de G est résoluble.

Lemme 3.22 *Si G n'est pas résoluble, il existe un sous-groupe H de G et un sous-groupe normal K de H , tels que H/K soit simple minimal.*

Exemple. $G = \mathcal{A}_6$ est simple (non minimal) ; on peut prendre $H = \mathcal{A}_5$ et $K = \{1\}$.

Démonstration. Soit H un sous-groupe non résoluble minimal de G et soit K un sous-groupe normal de H , distinct de H , et maximal. Le groupe K est résoluble (car strictement contenu dans H). Le quotient H/K est simple (car K est maximal) et non abélien (sinon H serait résoluble) ; il est de plus minimal (tout sous-groupe s'obtient comme quotient par K d'un sous-groupe H' contenant K et contenu dans H , donc est résoluble).

On a alors une réponse partielle à notre question :

Proposition 3.23 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Tout groupe simple minimal peut être engendré par deux éléments.*
- (2) *Tout groupe tel que ses sous-groupes engendrés par deux éléments soient résolubles est résoluble.*

Supposons (2). Soit G simple minimal ; si $\langle x, y \rangle \neq G$ pour tout couple $(x, y) \in G \times G$, alors $\langle x, y \rangle$ est résoluble comme sous-groupe de G strict et d'après (2), G est aussi résoluble, ce qui est impossible.

Supposons (1). Si G n'est pas résoluble, il existe H et K comme dans le lemme 3.22. Le groupe H/K est simple minimal donc engendré par deux éléments \bar{x} et \bar{y} . Soit H' le sous-groupe de H engendré par x et y (représentants respectifs de \bar{x} et \bar{y}). C'est un

groupe résoluble par hypothèse ; or H/K est l'image par projection de H' donc est aussi résoluble, ce qui est absurde. \square

On est donc ramené au problème suivant : trouver la liste de tous les groupes simples minimaux et chercher s'ils sont engendrés par deux éléments. Ce problème a été résolu par Thompson, qui a montré³ que tout groupe simple minimal est isomorphe à l'un des suivants (que l'on peut engendrer par deux éléments) :

- $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_p)$, $p \geq 5$, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}$,
- $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_{2^p})$, p premier ≥ 3 ,
- $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_{3^p})$, p premier ≥ 3 ,
- $\mathbf{PSL}_3(\mathbf{F}_3)$,
- groupes de Suzuki $Sz(2^p)$, p premier ≥ 3 .

Signalons un problème : est-il vrai qu'un groupe simple non abélien qui est *minimal* au sens naïf (i.e. qui ne contient pas de sous-groupe propre non abélien qui soit simple) est minimal au sens défini plus haut ?⁴

³Références : J.G. Thompson, *Non solvable finite groups all of whose local subgroups are solvable*, I, II, ..., VI, Bull. A.M.S. 74 (1968), 383 – 437 ; Pac. J. Math. 33 (1970), 451 – 536 ; ... ; Pac. J. Math. 51 (1974), 573 – 630.

Il existe une démonstration indépendante du théorème de classification de Thompson : P. Flavell, *Finite groups in which two elements generate a solvable group*, Invent. math. 121 (1995), 279 – 285.

⁴Réponse : oui, d'après la classification des groupes simples.

Chapitre 4

Cohomologie et extensions

4.1 Définitions

Soient G un groupe (noté multiplicativement) et A un G -module (autrement dit un groupe abélien noté additivement sur lequel G opère par automorphismes). On note sa le transformé de l'élément $a \in A$ par l'élément $s \in G$. On a

$$\begin{aligned}(st)a &= s(ta), \\ 1a &= a, \\ s(a_1 + a_2) &= sa_1 + sa_2,\end{aligned}$$

si $s, t \in G$ et $a, a_1, a_2 \in A$.

Des exemples d'une telle situation sont donnés par :

- (1) Action triviale d'un groupe G sur un groupe abélien A : $sa = a$ pour $s \in G$ et $a \in A$.
- (2) Si L est une extension galoisienne du corps K , de groupe de Galois G , alors G opère par automorphismes sur L muni de l'addition ou L^* muni de la multiplication.

Définition 4.1 *Soit n un entier positif ou nul. On appelle n -cochaîne, ou cochaîne de degré n sur G à valeurs dans A toute fonction de n variables de G à valeurs dans A :*

$$f : \begin{cases} G \times G \times \cdots \times G & \longrightarrow A \\ (s_1, s_2, \dots, s_n) & \longmapsto f(s_1, s_2, \dots, s_n). \end{cases}$$

L'ensemble des cochaînes, muni de l'addition induite par celle de A , forme un groupe abélien noté $C^n(G, A)$.

Exemples.

$n = 0$: par convention, une fonction de 0 variable à valeurs dans A est un élément de A . D'où $C^0(G, A) = A$. On note f_a l'élément de $C^0(G, A)$ correspondant à l'élément $a \in A$.

$n = 1$: $C^1(G, A) = \{f : G \rightarrow A\}$.

$n = 2$: $C^2(G, A) = \{f : G \times G \rightarrow A\}$.

Définition 4.2 Si $f \in C^n(G, A)$, on appelle cobord de f et on note df l'élément de $C^{n+1}(G, A)$ défini par la formule :

$$df(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}) = s_1 f(s_2, \dots, s_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i s_{i+1}, \dots) + (-1)^{n+1} f(s_1, \dots, s_n).$$

Regardons ce qu'est d pour les petites valeurs de n .

• $d : C^0(G, A) \rightarrow C^1(G, A)$. Soit $a \in A$; on cherche df_a . On a $df_a(s) = sa - a$. Noter que $df_a = 0$ si et seulement si a est fixé par G .

• $d : C^1(G, A) \rightarrow C^2(G, A)$. Soit f une 1-cochaîne; on a

$$df(s, t) = sf(t) - f(st) + f(s).$$

• $d : C^2(G, A) \rightarrow C^3(G, A)$. Soit f une 2-cochaîne; on a

$$df(u, v, w) = uf(v, w) - f(uv, w) + f(u, vw) - f(u, v).$$

Théorème 4.1 (Formule fondamentale) On a $d \circ d = 0$. Autrement dit, le composé

$$C^n(G, A) \xrightarrow{d} C^{n+1}(G, A) \xrightarrow{d} C^{n+2}(G, A)$$

est nul.

Nous allons faire la vérification seulement dans les cas $n = 0$ et $n = 1$, laissant en exercice la vérification générale.

Soit $a \in A$. On a $df_a(s) = sa - a$ d'où

$$\begin{aligned} d \circ d(f_a)(s, t) &= sdf_a(t) - df_a(st) + df_a(s) \\ &= s(ta - a) - (sta - a) + (sa - a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Regardons maintenant $f \in C^1(G, A)$:

$$\begin{aligned} d \circ d(f)(u, v, w) &= udf(v, w) - df(uv, w) + df(u, vw) - df(u, v) \\ &= u(vf(w) - f(vw) + f(v)) - (uvf(w) - f(uvw) + f(uv)) \\ &\quad + (uf(vw) - f(uvw) + f(u)) - (uf(v) - f(uv) + f(u)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Définition 4.3 Une n -cochaîne f est dite un n -cocycle si $df = 0$. Elle est dite un n -cobord s'il existe une $(n-1)$ -cochaîne g telle que $f = dg$.

D'après le th. 4.1, tout n -cobord est un n -cocycle. On note $Z^n(G, A)$ le groupe des n -cocycles et $B^n(G, A)$ le groupe des n -cobords.

On note $H^n(G, A)$ le groupe quotient $Z^n(G, A)/B^n(G, A)$ et on l'appelle le n -ième groupe de cohomologie de G à valeurs dans A .

Exemples.

(1) Pour $n = 0$, on convient que $B^0 = \{0\}$. En notant A^G le groupe des éléments de A fixés par G , on a vu que

$$df_a = 0 \iff a \in A^G,$$

et donc $H^0(G, A) = A^G$.

(2) Pour $n = 1$, un élément de $Z^1(G, A)$ est une application f de G dans A telle que $df(s, t) = 0$ pour tous $s, t \in G$, ce qui donne

$$f(st) = sf(t) + f(s).$$

On dit que f est un *homomorphisme croisé*. Si l'action de G sur A est triviale, on a $sf(t) = f(t)$ et f est un homomorphisme de G dans A ; comme $B^1(G, A) = \{0\}$, on a alors

$$H^1(G, A) = \text{Hom}(G, A),$$

où $\text{Hom}(G, A)$ est le groupe des homomorphismes de groupes de G dans A .

(3) Pour $n = 2$, une 2-cochaîne f est un 2-cocycle si

$$uf(v, w) - f(uv, w) + f(u, vw) - f(u, v) = 0$$

pour tous $u, v, w \in G$. Une telle cochaîne s'appelle aussi un *système de facteurs*.

4.2 Extensions

Définition 4.4 Soient A et G deux groupes. On dit que E est une extension de G par A si l'on a une suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}$$

avec A normal dans E .

Remarque. Dans ce §, on suppose A commutatif.

Toute extension E de G par A définit une action de G sur A de la manière suivante : remarquons d'abord que E agit sur A par automorphismes intérieurs (puisque A est normal dans E); on a un homomorphisme

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & \text{Aut}(A) \\ e & \longmapsto & \text{Int}(e)|_A, \end{cases}$$

qui passe au quotient G : en effet, si $s \in G$, on choisit $e \in E$ qui relève s ; alors $\text{Int}(e)$ ne dépend pas du choix du relèvement de s ; changer e en e' au dessus de s revient en effet à le multiplier par un élément a de A , or a agit trivialement sur A par automorphismes intérieurs puisque A est abélien. Donc G agit sur A :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \text{Aut}(A) \\ & \searrow & \nearrow \\ & G & \end{array}$$

On va donc considérer A comme un G -module ; les lois de groupe étant écrites multiplicativement, la loi d'action de G sur A sera écrite ${}^s a$ pour $a \in A$ et $s \in G$. On va associer à toute extension de G par A une classe de cohomologie de $H^2(G, A)$ qui détermine cette extension à isomorphisme près. Et l'on verra que tout élément de $H^2(G, A)$ peut être obtenu ainsi, cf. th. 4.3.

Soit E une extension de G par A ; on a une surjection π de E sur G .

Définition 4.5 Une section h de π est une application de G dans E telle que $\pi \circ h = \text{Id}_G$.

$$\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \curvearrowright h \\ G \end{array}$$

Au-dessus de $s \in G$, on choisit un point dans la fibre $\pi^{-1}(s)$. Tout élément $e \in E$ s'écrit alors de manière unique $ah(x)$, avec $a \in A$ et $x \in G$ (en fait $x = \pi(e)$).

Cherchons à mettre sous la forme $ch(z)$ l'élément $ah(x)bh(y)$. On a

$$ah(x)bh(y) = ah(x)bh(x)^{-1}h(x)h(y).$$

L'action de $x \in G$ sur A est donnée par l'action de l'automorphisme intérieur d'un élément de E au-dessus de x , par exemple $h(x)$. Donc $h(x)bh(x)^{-1} = {}^x b$ (qui est dans A , puisque A est normal). Posons

$$h(x)h(y) = f_h(x, y)h(xy).$$

On a $f_h(x, y) \in A$ puisque $h(x)h(y)$ et $h(xy)$ ont même image dans G par π . On a finalement obtenu :

$$ah(x)bh(y) = a {}^x b f_h(x, y)h(xy)$$

avec $a {}^x b f_h(x, y) \in A$.

Nous allons maintenant voir comment f_h varie avec h . Soient donc h et h' deux sections de π ($h, h' : G \rightarrow E$). Alors $h(s)$ et $h'(s)$ diffèrent par un élément de A . Posons $h'(s) = l(s)h(s)$; l'application l est une 1-cochaîne de G à valeurs dans A . Calculons $f_{h'}$ à l'aide de l et de f_h . On a

$$h'(s)h'(t) = f_{h'}(s, t)h'(st) = f_{h'}(s, t)l(st)h(st),$$

mais

$$\begin{aligned} h'(s)h'(t) &= l(s)h(s)l(t)h(t) \\ &= l(s)h(s)l(t)h(s)^{-1}h(s)h(t) \\ &= l(s) {}^s l(t) f_h(s, t) h(st), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} f_{h'}(s, t) &= l(s) {}^s l(t) f_h(s, t) l(st)^{-1} \\ &= f_h(s, t) {}^s l(t) l(s) l(st)^{-1}, \end{aligned}$$

car A est commutatif. Or, en notation multiplicative, on a

$$dl(s, t) = {}^s l(t)l(s)l(st)^{-1}.$$

D'où

$$f_{h'} = f_h dl.$$

Donc, quand h varie, f_h ne change que par multiplication par un cobord. On peut donc associer à E la classe de cohomologie de f_h dans $H^2(G, A)$; appelons e cette classe. Quand trouve-t-on $e = 0$? Cela signifie (en notation multiplicative) qu'il existe une section h telle que $f_h(s, t) = 1$ pour tous $s, t \in G$, i.e. que h est un homomorphisme.

Définition 4.6 Une extension E de G par A est dite triviale s'il existe un homomorphisme $h : G \rightarrow E$ telle que $\pi \circ h = \text{Id}_G$ (ou, de façon équivalente, si $e = 0$).

Examinons une telle extension : tout élément de E s'écrit $ah(s)$ de manière unique et $ah(s)bh(t) = a{}^s bh(st)$. Donc on connaît E dès qu'on connaît A , G et l'action de G sur A . Le groupe E est isomorphe au groupe des couples (a, s) avec $a \in A$ et $s \in G$, muni de la loi

$$(a, s)(b, t) = (a{}^s b, st).$$

On appelle un tel E un *produit semi-direct* de G par A . On vient de voir : la classe nulle de $H^2(G, A)$ correspond à l'extension triviale de G par A , qui est le produit semi-direct de G par A défini par l'action de G sur A .

Théorème 4.2 L'application f_h est un 2-cocycle de G à valeurs dans A .

Il faut vérifier que f_h appartient au noyau de d , l'homomorphisme de cobord. L'écriture est ici multiplicative; il faut donc voir que

$$df_h(u, v, w) = 1$$

pour tous $u, v, w \in G$; or df_h s'écrit

$$df_h(u, v, w) = {}^u f_h(v, w)f_h(u, vw)f_h(uv, w)^{-1}f_h(u, v)^{-1}.$$

Nous allons écrire $h(u)h(v)h(w)$ sous la forme $ah(uvw)$ avec $a \in A$ de deux manières différentes en utilisant l'associativité de la loi de groupe dans E .

On a

$$(h(u)h(v))h(w) = f_h(u, v)f_h(uv, w)h(uvw)$$

et

$$h(u)(h(v)h(w)) = {}^u f_h(v, w)f_h(u, vw)h(uvw)$$

d'où

$${}^u f_h(v, w)f_h(u, vw) = f_h(u, v)f_h(uv, w)$$

ce qui est bien

$$df_h(u, v, w) = 1. \quad \square$$

Nous allons enfin voir :

Théorème 4.3 Toute classe de cohomologie de $H^2(G, A)$ correspond à une extension de G par A .

On va reconstruire la situation précédente : soit $f \in Z^2(G, A)$. Définissons E ensemblistement par $E = A \times G$. On définit la loi de E par

$$(a, s)(b, t) = (a {}^s b f(s, t), st).$$

Tout d'abord E est un groupe :

- La loi est associative : le calcul fait ci-dessus pour voir que f_h est un 2-cocycle à partir de l'associativité de la loi de E se reprend à l'envers.
- Si $\varepsilon = f(1, 1)^{-1}$, alors l'élément $(\varepsilon, 1)$ est élément neutre. En effet,

$$(a, s)(\varepsilon, 1) = (a {}^\varepsilon f(s, 1), s)$$

or f est un 2-cocycle donc $df = 1$ et

$$df(s, 1, 1) = {}^s f(1, 1) f(s, 1)^{-1} f(s, 1) f(s, 1)$$

donc

$$1 = df(s, 1, 1) = {}^s \varepsilon^{-1} f(s, 1)^{-1}$$

et $(\varepsilon, 1)$ est bien élément neutre.

- On fait de même le calcul de l'inverse.

On a un homomorphisme surjectif évident de E dans G :

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & G \\ (a, s) & \longmapsto & s \end{cases}$$

et l'application

$$\begin{cases} A & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & (a\varepsilon, 1) \end{cases}$$

est un homomorphisme (car A est abélien) évidemment injectif.

Finalement on a bien :

$$\{1\} \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}. \quad \square$$

Interprétation de $H^1(G, A)$ en termes d'extensions. Soit E une extension triviale de G par A . Choisissons une section $h : G \rightarrow E$ qui soit un homomorphisme (ce qui identifie E au produit semi-direct $G.A$). Soit h' une autre section ; on peut écrire h' de façon unique comme $h' = l.h$, où l est une 1-cochaîne $G \rightarrow A$. On a $f_{h'} = f_h.dl = dl$ puisque $f_h = 1$. Pour que h' soit un homomorphisme, il faut et il suffit que $f_{h'} = 1$, i.e. que $dl = 1$, autrement dit que l soit un 1-cocycle.

D'autre part, si on conjugue h par un élément a de A , on obtient une section qui est un homomorphisme. Soit h' cette section. A quoi cela correspond-il en termes de l ? On a

$$h'(x) = ah(x)a^{-1} = l(x)h(x)$$

avec $l(x) = a^x a^{-1}$. Donc $l = df_a$ (où f_a est l'élément de $C^0(G, A)$ correspondant à a). Donc l doit être un cobord. D'où :

Théorème 4.4 *Les classes de conjugaison (par les éléments de A , ou de G) des sections de E qui sont des homomorphismes correspondent bijectivement aux éléments du groupe de cohomologie $H^1(G, A)$.*

[Noter que cette correspondance *dépend* du choix de h . Une façon plus intrinsèque de s'exprimer consiste à dire que l'ensemble des classes de sections-homomorphismes est un espace principal homogène (« torseur ») sous l'action de $H^1(G, A)$.]

Corollaire 4.5 *Pour que les sections de π qui sont des homomorphismes soient conjuguées, il faut et il suffit que $H^1(G, A) = \{0\}$.*

4.3 Groupes finis : un critère de nullité

Soit G un groupe à m éléments et soit A un G -module.

Théorème 4.6 *Soient $n \geq 1$ et $x \in H^n(G, A)$. On a $mx = 0$.*

Soit $f \in Z^n(G, A)$ un n -cocycle représentant x . Il faut construire $F \in C^{n-1}(G, A)$ tel que $dF = mf$.

Prenons $F_1(s_1, \dots, s_{n-1}) = \sum_{s \in G} f(s_1, \dots, s_{n-1}, s)$. Comme $f \in Z^n(G, A)$, on a $df = 0$. Or

$$\begin{aligned} df(s_1, \dots, s_{n+1}) &= s_1 f(s_2, \dots, s_{n+1}) - f(s_1 s_2, s_3, \dots, s_{n+1}) + \dots \\ &\quad + (-1)^n f(s_1, \dots, s_n s_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(s_1, \dots, s_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{s_{n+1} \in G} df(s_1, \dots, s_{n+1}) &= s_1 F_1(s_2, \dots, s_n) - F_1(s_1 s_2, \dots, s_n) + \dots \\ &\quad + (-1)^n F_1(s_1, \dots, s_{n-1}) + (-1)^{n+1} m f(s_1, \dots, s_n). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que si s_{n+1} parcourt G , $s_n s_{n+1}$ aussi (s_n étant fixé). On a ainsi obtenu

$$(-1)^n m f(s_1, \dots, s_n) = dF_1(s_1, \dots, s_n).$$

On pose donc $F = (-1)^n F_1$ qui vérifie $dF = mf$, d'où le résultat. \square

Corollaire 4.7 *Si l'application $a \mapsto ma$ est un automorphisme de A (m étant l'ordre de G) alors $H^n(G, A) = \{0\}$ pour tout $n \geq 1$.*

En effet, $x \mapsto mx$ est alors un automorphisme de $C^n(G, A)$ qui commute à d . Donc c'est un automorphisme de $H^n(G, A)$ par passage au quotient. Or c'est dans ce cas l'application nulle d'où $H^n(G, A) = \{0\}$. \square

Corollaire 4.8 *Si G et A sont finis d'ordres premiers entre eux alors $H^n(G, A) = \{0\}$ pour tout $n \geq 1$.*

En effet $a \mapsto ma$ est alors un automorphisme de A . \square

Corollaire 4.9 *Si G et A sont finis d'ordres premiers entre eux alors :*

- (1) *Toute extension E de G par A est triviale.*
- (2) *Deux homomorphismes sections de $G \rightarrow E$ sont conjugués par un élément de A .*

On a $H^n(G, A) = \{0\}$ si $n \geq 1$. Le cas $n = 2$ donne (1) et le cas $n = 1$ donne (2) d'après l'étude faite en 4.2. \square

4.4 Extensions de groupes d'ordres premiers entre eux

Nous allons étendre certains résultats sur les extensions d'un groupe G par un groupe A commutatif au cas où A est résoluble ou même quelconque.

Théorème 4.10 (Zassenhaus) *Soient A et G deux groupes finis d'ordres premiers entre eux et considérons une extension $\{1\} \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow \{1\}$. Alors :*

- (1) *Il existe un sous-groupe de E (supplémentaire de A) qui se projette isomorphiquement sur G (E est produit semi-direct).*
- (2) *Si A ou G est résoluble, deux tels sous-groupes sont conjugués par un élément de A (ou de E , cela revient au même).*

On raisonne par récurrence sur $|E|$; on peut supposer A et G distincts de $\{1\}$.

Premier cas : A est résoluble. On démontre d'abord le

Lemme 4.11 *Soit X un groupe résoluble non réduit à $\{1\}$. Il existe un nombre premier p et un p -sous-groupe Y de X distinct de $\{1\}$ tel que Y soit abélien élémentaire et caractéristique.*

On rappelle qu'un p -groupe abélien est dit *élémentaire* si ses éléments distincts de 1 sont d'ordre p et qu'un sous-groupe d'un groupe X est caractéristique s'il est stable par tout automorphisme de X .

Démonstration du lemme. Soient $D^i(X)$ les dérivés successifs de X . Comme X est résoluble, il existe i tel que $D^i(X)$ est distinct de $\{1\}$ et $D^{i+1}(X)$ est réduit à $\{1\}$. Alors $D^i(X)$ est un sous-groupe de X abélien et différent de $\{1\}$. De plus, il est caractéristique. Soit alors p divisant l'ordre de $D^i(X)$ et soit Y le groupe des éléments de $D^i(X)$ d'ordre divisant p . Alors Y est abélien, différent de $\{1\}$, caractéristique (un automorphisme de X transforme un élément d'ordre p en un autre de même ordre) et est un p -groupe élémentaire. \square

Retour à la démonstration du théorème. Appliquons le lemme avec $X = A$ et $Y = A'$ et remarquons que A' est normal dans E : un automorphisme intérieur de E restreint à A est un automorphisme de A (car A est normal dans E) et laisse donc A' , qui est caractéristique, invariant.

Si $A = A'$, alors A est abélien et le théorème est connu. Sinon, comme A' est normal dans E , on peut passer au quotient par A' et on obtient la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow A/A' \longrightarrow E/A' \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}.$$

La situation se décrit par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \\ & & E/A' \\ & \nearrow & \downarrow \\ G & \longrightarrow & E/A \end{array}$$

Comme E/A' est de cardinal strictement inférieur à celui de E , l'hypothèse de récurrence entraîne que G se relève en un sous-groupe G' de E/A' . Soit E' l'image réciproque de G' par la projection $E \rightarrow E/A'$. Alors on a la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow A' \longrightarrow E' \longrightarrow G' \longrightarrow \{1\}.$$

Or A' est abélien. D'après le § 4.3, on peut donc relever G' en un sous-groupe de E' . On obtient ainsi un relèvement de G dans E .

Montrons que deux tels relèvements G' et G'' sont conjugués par un élément de A . On a

$$E = A.G' \text{ et } E = A.G''.$$

L'hypothèse de récurrence, appliquée à E/A' , montre qu'il existe $a \in A$ tel que $aG'a^{-1}$ et G'' aient même image dans E/A' . Quitte à remplacer G' par $aG'a^{-1}$, on peut donc supposer que $A'.G' = A'.G''$. La conjugaison par un élément de A de G' et G'' résulte alors du cas abélien (cf. § 4.3), appliqué à $A'.G' = A'.G''$.

Deuxième cas : assertion (1) dans le cas général. Soit p premier divisant l'ordre de A et soit S un p -Sylow de A (cf. § 2.2). Soit E' le normalisateur dans E de S . D'après le § 2.3, on a $E = A.E'$. Soit $A' = E' \cap A$; A' est normal dans E' et l'on a la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow A' \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}.$$

Distinguons deux cas :

- Si $|E'| < |E|$, l'hypothèse de récurrence permet de relever G dans E' , donc dans E .
- Si $|E'| = |E|$ alors S est normal dans E donc aussi dans A . On passe au quotient :

$$\{1\} \longrightarrow A/S \longrightarrow E/S \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}$$

avec E/S de cardinal strictement inférieur à celui de E . Par l'hypothèse de récurrence, G se relève en G_1 de E/S . Soit E_1 l'image réciproque de G_1 par la projection $E \rightarrow E/S$. On a la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow S \longrightarrow E_1 \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}.$$

Or S est un p -groupe donc est résoluble et l'on est ramené au premier cas.

Troisième cas : assertion (2) lorsque G est résoluble. Soient G et G' deux relèvements de G dans E . On a

$$E = A.G' \text{ et } E = A.G''.$$

Soient p un nombre premier et I un sous-groupe abélien normal différent de $\{1\}$ de G (cf. lemme 4.11) et soit \tilde{I} son image réciproque dans E par la projection $E \rightarrow G$. Soient $I' = \tilde{I} \cap G'$ et $I'' = \tilde{I} \cap G''$. On a

$$A.I' = A.I'' (= \tilde{I}).$$

Les groupes I' et I'' sont des p -Sylow de \tilde{I} ; il existe donc $x \in \tilde{I}$ tel que $I'' = xI'x^{-1}$; si on écrit x sous la forme ay avec $a \in A$ et $y \in I'$, on a $I'' = aI'a^{-1}$. Quitte à remplacer I' par $aI'a^{-1}$, on peut donc supposer $I'' = I'$.

Soit N le normalisateur de $I' = I''$ dans E . On a $G' \subset N$ et $G'' \subset N$. Si N est distinct de E , l'hypothèse de récurrence appliquée à N montre que G' et G'' sont conjugués. Si $N = E$, autrement dit si I' est normal dans E , l'hypothèse de récurrence appliquée à E/I' montre qu'il existe $a \in A$ tel que $I'.aG'a^{-1} = I'.G''$. Puisque I' est normal et contenu à la fois dans G' et G'' , cela entraîne

$$aG'a^{-1} = G'',$$

d'où le résultat. \square

Remarque. L'hypothèse « A ou G est résoluble » faite dans (2) est automatiquement satisfaite d'après le théorème de Feit-Thompson (cf. § 3.1) disant que tout groupe d'ordre impair est résoluble.

4.5 Relèvements d'homomorphismes

Soient $\{1\} \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{\pi} \Phi \rightarrow \{1\}$ une suite exacte, G un groupe et φ un homomorphisme de G dans Φ . Peut-on relever φ en un homomorphisme ψ de G dans E ?

$$\begin{array}{ccccccc} \{1\} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & \Phi & \longrightarrow & \{1\} \\ & & & & & & \uparrow \varphi & & \\ & & & & & \swarrow \psi & G & & \end{array}$$

La question équivaut à celle du relèvement de G dans une extension E_φ de G par A associée à φ , définie de la façon suivante :

$$E_\varphi = \{(g, e) \in G \times E \mid \varphi(g) = \pi(e)\}$$

muni de la loi de groupe habituelle pour le produit cartésien. Alors A se plonge dans E_φ par $a \mapsto (1, a)$ et E_φ se projette sur G par $(g, e) \mapsto g$.

$$\begin{array}{ccc} E_\varphi & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ G & \xrightarrow{\varphi} & \Phi \end{array}$$

On a la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow A \longrightarrow E_\varphi \longrightarrow G \longrightarrow \{1\}.$$

(on dit parfois que E_φ est l'*image réciproque* (« pull-back ») de l'extension E par l'homomorphisme φ).

Voyons l'équivalence des deux problèmes. Soit ψ un relèvement de φ . Alors l'ensemble $G_\psi = \{(g, \psi(g)), g \in G\}$ est un sous-groupe de E_φ qui est un relèvement de G .

Soit maintenant G' un relèvement de G . Alors G' est formé de couples (g, e) avec $g \in G$ et $e \in E$, chaque $g \in G$ apparaissant dans un et un seul couple. Alors ψ défini par $\psi(g) = e$ est un homomorphisme qui relève φ .

De plus, deux relèvements ψ' et ψ'' sont conjugués par $a \in A$ si et seulement si $G_{\psi'}$ et $G_{\psi''}$ sont conjugués par $(1, a) \in E_\varphi$. Le § 4.4 donne alors le

Théorème 4.12 Soit $\{1\} \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow \Phi \rightarrow \{1\}$ une suite exacte et soit φ un homomorphisme d'un groupe G dans le groupe Φ . Supposons G et A finis d'ordres premiers entre eux. Alors :

- (1) Il existe un homomorphisme ψ de G dans E qui relève φ .
- (2) Si G ou A est résoluble, deux tels homomorphismes sont conjugués par un élément de A .

Application. On se donne un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ où p ne divise pas l'ordre de G . On va voir qu'on peut relever φ en $\varphi_\alpha : G \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})$ pour tout $\alpha \geq 1$.

Commençons par relever φ en φ_2 . On a la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \longrightarrow \{1\}$$

où A est formé des matrices de la forme $1 + pX$ avec X matrice $n \times n$ modulo p et où l'application de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est la réduction modulo p . Le groupe A est alors isomorphe à $\mathbf{M}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ qui est un p -groupe abélien. On peut donc appliquer le théorème précédent et relever φ en φ_2 de manière essentiellement unique.

Le même argument permet de relever φ_α en $\varphi_{\alpha+1}$. On a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \{1\} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p^{\alpha+1}\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z}) \longrightarrow \{1\} . \\ & & & & \uparrow & \nearrow & \\ & & & & G & & \end{array}$$

$\varphi_{\alpha+1}$ φ_α

On peut passer à la limite projective : comme $\varprojlim (\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_p$, on obtient une représentation

$$\varphi_\infty : G \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_p) \hookrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Q}_p) .$$

Or \mathbf{Q}_p est de caractéristique 0 : ainsi, à partir d'une représentation en caractéristique p , on en obtient une en caractéristique 0.

Chapitre 5

Groupes résolubles et sous-groupes de Hall

Nous allons essayer de généraliser les théorèmes de Sylow. Le problème était alors le suivant : soit G un groupe d'ordre $\prod_p p^{\alpha(p)}$ (où p est premier), existe-t-il, pour tout nombre premier p , un sous-groupe de G d'ordre $p^{\alpha(p)}$?

On peut se demander si, plus généralement, pour tout n divisant l'ordre de G , on peut trouver un sous-groupe de G d'ordre n . C'est vrai si G est nilpotent, mais faux sans hypothèse sur G ; même « G résoluble » est insuffisant : le groupe \mathcal{A}_4 , d'ordre 12 est résoluble et n'a pas de sous-groupe d'ordre 6. On va donc faire des hypothèses plus restrictives sur n .

5.1 Π -sous-groupes

Soit Π un ensemble de nombres premiers et soit Π' son complémentaire. Si $n \in \mathbf{N}$, on écrit $n = n_\Pi n_{\Pi'}$, avec n_Π (resp. $n_{\Pi'}$) divisible uniquement par des éléments de Π (resp. Π'). Un groupe G est appelé un Π -groupe si tous les facteurs premiers de l'ordre de G appartiennent à Π .

Le problème consiste en la recherche des Π -sous-groupes d'un groupe donné et de ses Π -sous-groupes maximaux tels qu'ils sont définis ci-dessous.

Définition 5.1 *Soit G un groupe et soit Π un ensemble de nombres premiers. On appelle Π -Sylow ou Π -sous-groupe de Hall de G un sous-groupe H tel que $|H| = |G|_\Pi$.*

Remarque. Si $\Pi = \{p\}$, un Π -Sylow de G est un p -Sylow de G .

Théorème 5.1 (P. Hall) *Soient G un groupe résoluble et Π un ensemble de nombres premiers. Alors :*

- (1) G possède des Π -Sylow.
- (2) Soient S_Π un Π -Sylow de G et H un Π -sous-groupe de G . Alors H est contenu dans un conjugué de S_Π .

La démonstration de ce théorème sera donnée au § 5.4.

Corollaire 5.2 *Deux Π -Sylow d'un groupe résoluble sont conjugués.*

L'hypothèse « résoluble » est essentielle :

Théorème 5.3 *Si pour tout ensemble Π de nombres premiers, G possède un Π -Sylow, alors G est résoluble.*

La démonstration sera donnée au § 5.6.

Théorème 5.4 (Burnside) *Soient p et q deux nombres premiers. Tout groupe d'ordre $p^a q^b$ ($a, b \in \mathbf{N}$) est résoluble.*

En effet, la question de l'existence de Π -Sylow ne se pose vraiment que si $\Pi = \{p\}$ ou $\{q\}$ ou $\{p, q\}$. Les théorèmes de Sylow (cf. § 2.2) répondent dans les deux premiers cas et G lui-même convient dans le troisième. Le th. 5.3 assure alors que G est résoluble. \square

En fait le théorème de Burnside sera démontré en annexe (cf. th. A.21) par la théorie des caractères et il sera utilisé dans la démonstration du th. 5.3.

5.2 Préliminaires : sous-groupes permutables

Nous allons démontrer quelques lemmes sur les produits de sous-groupes.

Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe G . Notons $A.B$ l'ensemble des produits ab , où $a \in A$ et $b \in B$.

Lemme 5.5 *Il y a équivalence entre :*

- (1) $A.B = B.A$.
- (2) $A.B$ est un sous-groupe de G .

(1) \Rightarrow (2) car si $A.B = B.A$, on a $A.B.A.B \subset A.A.B.B \subset A.B$ et $(A.B)^{-1} \subset B.A = A.B$ et $A.B$ est un sous-groupe de G .

(2) \Rightarrow (1) Si $A.B$ est un sous-groupe de G , on a $A.B = (A.B)^{-1} = B.A$. \square

On dit que deux groupes A et B sont *permutables* si $A.B = B.A$.

Lemme 5.6 *Soient A_1, \dots, A_n des sous-groupes de G deux à deux permutables. Alors $A_1 \dots A_n$ est un sous-groupe de G .*

La démonstration se fait par récurrence sur n . Le lemme 5.5 donne le cas $n = 2$. D'après l'hypothèse de récurrence, $A_1 \dots A_{n-1}$ est un groupe. Il est permutable avec A_n car $A_1 \dots A_{n-1}.A_n = A_1 \dots A_n.A_{n-1}$, d'où après $(n-1)$ opérations $A_1 \dots A_{n-1}.A_n = A_n.A_1 \dots A_{n-1}$. D'après le lemme 5.5, $A_1 \dots A_n$ est un sous-groupe de G . \square

Lemme 5.7 *Il y a équivalence entre :*

- (1) $A.B = G$.
- (1') $B.A = G$.
- (2) G opère transitivement sur $G/A \times G/B$.

De plus, si G est fini, ces propriétés sont équivalentes à chacune des suivantes :

$$(3) (G : A \cap B) = (G : A).(G : B).$$

$$(3') (G : A \cap B) \geq (G : A).(G : B).$$

En effet :

(1) \Leftrightarrow (1') car si $A.B = G$, $A.B$ est un sous-groupe et d'après le lemme 5.5, on a $A.B = B.A$, donc $B.A = G$.

(1) \Rightarrow (2) Il s'agit de prouver que pour tous $g_1, g_2 \in G$, il existe $g \in G$ tel que $g \in g_1A$ et $g \in g_2B$. Or par hypothèse, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $g_1^{-1}g_2 = ab$, d'où $g_1a = g_2b^{-1}$ et l'élément $g = g_1a = g_2b^{-1}$ convient.

(2) \Rightarrow (1) Le groupe G opère transitivement sur $G/A \times G/B$. Prenons donc, pour tout $g_1 \in G$, un élément $g \in G$ tel que $g \in 1.A$ et $g \in g_1.B$. Cela entraîne $g_1 \in A.B$, i.e. $A.B = G$.

Soit maintenant G un groupe fini. Montrons (2) \Leftrightarrow (3). Soit $\dot{1}$ l'image de l'élément unité de G dans G/A (resp. G/B). Le stabilisateur de $(\dot{1}, \dot{1})$ par l'action de G sur $G/A \times G/B$ est $A \cap B$. Le nombre n d'éléments de l'orbite de $(\dot{1}, \dot{1})$ est donc l'indice $(G : A \cap B)$ de $A \cap B$ dans G . Or

$$\begin{aligned} G \text{ opère transitivement sur } G/A \times G/B &\iff n = |G/A| \times |G/B| \\ &\iff n = (G : A)(G : B) \\ &\iff (G : A \cap B) = (G : A)(G : B), \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équivalence entre (2) et (3).

(3') \Leftrightarrow (3) car $(G : A \cap B)$ est le cardinal de l'orbite de $(1, 1)$, cardinal majoré par celui de $G/A \times G/B$, qui est $(G : A)(G : B)$. \square

Lemme 5.8 *Les propriétés du lemme 5.7 sont vraies si les indices de A et B dans G sont premiers entre eux.*

En effet, $(G : A \cap B)$ est divisible par $(G : A)$ et $(G : B)$ donc par leur produit, ce qui prouve (3') du lemme précédent. \square

5.3 Systèmes permutables de sous-groupes de Sylow

Soit G un groupe. Pour tout nombre premier p , choisissons un p -Sylow H_p de G . Nous dirons que le système $\{H_p\}$ est *permutable* si les H_p sont deux à deux permutables au sens du § 5.2. Dans ce cas, si Π est un ensemble de nombres premiers, le groupe $H_\Pi = \prod_{p \in \Pi} H_p$ est un Π -sous-groupe de G .

Théorème 5.9 *Si G est résoluble, G possède un système permutable de sous-groupes de Sylow.*

La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre de G . On suppose $G \neq \{1\}$; d'après le lemme 4.11, il existe alors un nombre premier p_0 et un p_0 -sous-groupe normal A de G distinct de $\{1\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, le groupe G/A possède un système

permutable $\{H'_p\}$ de p -Sylow. Soit $H' = \prod_{p \neq p_0} H'_p$; c'est un sous-groupe de G/A d'ordre $\prod_{p \neq p_0} |H'_p|$. Soit G' son image réciproque dans G , on a une suite exacte :

$$\{1\} \longrightarrow A \longrightarrow G' \longrightarrow H' \longrightarrow \{1\}.$$

Comme A et H' sont d'ordres premiers entre eux, il existe un sous-groupe H de G qui relève H' (cf. §4.4). Si $p \neq p_0$, posons H_p le sous-groupe de H qui relève H'_p ; les H_p sont des p -Sylow de G deux à deux permutable. Pour $p = p_0$, définissons H_p comme l'image réciproque de H'_{p_0} dans G . C'est un p_0 -Sylow de G qui permute aux H_p ($p \neq p_0$). Le système $\{H_p\}$ répond donc à la question. \square

5.4 Démonstration du th. 5.1

L'assertion (1) sur l'existence de Π -Sylow résulte du th. 5.9 et du lemme 5.6.

Prouvons l'assertion (2) par récurrence sur l'ordre de G . Prenons comme au § 5.3 un p_0 -sous-groupe normal A de G distinct de $\{1\}$. Soient H' et S'_Π les images respectives de H et S_Π dans $G' = G/A$. D'après l'hypothèse de récurrence H' est contenu dans un conjugué de S'_Π . Quitte à remplacer H' par un de ses conjugués, on peut donc supposer $H' \subset S'_\Pi$. Il faut maintenant examiner deux cas :

- $p_0 \in \Pi$. Alors $A \subset S_\Pi$ car S_Π contient un p_0 -Sylow S_0 de G et comme A est normal, $A \subset S_0$ (cf. les théorèmes de Sylow). L'inclusion $H' \subset S'_\Pi$ donne alors $H \subset S_\Pi$.
- $p_0 \notin \Pi$. Alors les ordres de A et S_Π sont premiers entre eux et on a $A \cap H = \{1\}$, et $A \cap S_\Pi = \{1\}$. Les projections $H \rightarrow H'$ et $S_\Pi \rightarrow S'_\Pi$ sont des isomorphismes. Soit \tilde{H} le sous-groupe de S_Π qui se projette sur H' ; dans $A.H$ les groupes H et \tilde{H} sont des relèvements de H' ; ils sont donc conjugués (voir le § 4.4, th. 4.10). \square

5.5 Un critère de résolubilité

Théorème 5.10 (Wielandt) *Soit G un groupe fini et soient H_1, H_2, H_3 trois sous-groupes de G . Si les H_i sont résolubles et si leurs indices sont premiers entre eux deux à deux, alors G est résoluble.*

La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre de G . Remarquons tout d'abord que $G = H_1.H_2$. En effet, les indices $(G : H_1)$ et $(G : H_2)$ sont premiers entre eux, donc comme chacun d'eux divise $(G : H_1 \cap H_2)$, on a $(G : H_1 \cap H_2) \geq (G : H_1)(G : H_2)$ et d'après le lemme 5.7, on a $G = H_1.H_2$.

On peut supposer que $H_1 \neq \{1\}$. D'après le lemme 4.11, il existe un nombre premier p et un p -sous-groupe normal A de H_1 différent de $\{1\}$. On peut supposer que p ne divise pas $(G : H_2)$. Alors H_2 contient un p -Sylow de G , donc un conjugué de A . Comme $G = H_1.H_2$, tout conjugué de A est de la forme $h_2^{-1}h_1^{-1}Ah_1h_2$ avec $h_i \in H_i$ ($i = 1, 2$) et comme A est normal dans H_1 , et qu'un de ses conjugués est contenu dans H_2 , tous ses conjugués sont dans H_2 .

Soit \tilde{A} le sous-groupe de G engendré par les conjugués de A . Alors \tilde{A} est normal dans G et contenu dans H_2 , donc \tilde{A} est résoluble. Soit H'_i l'image de H_i dans $G' = G/\tilde{A}$. Les indices $(G' : H'_i)$ sont premiers entre eux deux à deux (car $(G' : H'_i)$ divise $(G : H_i)$) et les H'_i sont résolubles. L'hypothèse de récurrence montre alors que G' est résoluble; donc G est résoluble. \square

5.6 Démonstration du th. 5.3

Soit p un nombre premier et soit G un groupe. On appelle p -complément de G tout sous-groupe H de G qui est un p' -Sylow où p' est l'ensemble des nombres premiers différents de p .

Nous allons démontrer le th. 5.3 sous la forme apparemment plus forte suivante :

Théorème 5.11 *Si, pour tout nombre premier p , le groupe G a un p -complément, alors G est résoluble.*

On raisonne par récurrence sur $|G|$. On distingue deux cas.

- Le nombre des facteurs premiers de $|G|$ est ≤ 2 , autrement dit $|G|$ est de la forme $p^a q^b$, où p et q sont premiers. D'après un théorème de Burnside, (démontré grâce à la théorie des caractères, cf. § A.6), G est résoluble.
- Le nombre des facteurs de l'ordre de G est supérieur ou égal à 3. Soient p_i ($i = 1, 2, 3$) de tels facteurs et H_i ($i = 1, 2, 3$) un p_i -complément de G . Alors les indices $(G : H_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ sont premiers entre eux deux à deux.

De plus, H_i possède un p -complément pour tout nombre premier p . En effet, si $p = p_i$, alors H_i est son propre p_i -complément. Sinon, soit H_p un p -complément pour G ; comme $(G : H_i)$ et $(G : H_p)$ sont premiers entre eux, le lemme 5.8 montre que

$$(G : H_i \cap H_p) = (G : H_i)(G : H_p),$$

d'où $(H_i : H_i \cap H_p)$ est la plus grande puissance de p divisant l'ordre de H_i . Comme $H_i \cap H_p$ est un p' -groupe, $H_i \cap H_p$ est un p -complément de H_i . D'après l'hypothèse de récurrence, H_i est résoluble. Mais alors G satisfait aux hypothèses du th. 5.10, donc G est résoluble. \square

Chapitre 6

Groupes de Frobenius

6.1 Réunion des conjugués d'un sous-groupe

Théorème 6.1 (Jordan) *Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G distinct de G ; alors $\bigcup_{g \in G} (gHg^{-1}) \neq G$. De façon plus précise, on a :*

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| \leq |G| - \left(\frac{|G|}{|H|} - 1 \right).$$

On sait évidemment que 1 appartient à $H \cap (gHg^{-1})$ pour tout $g \in G$. On raisonne sur $G - \{1\}$. On a

$$\bigcup_{g \in G} (gHg^{-1} - \{1\}) = \bigcup_{g \in G/H} (gHg^{-1} - \{1\})$$

d'où

$$\left| \bigcup_{g \in G} (gHg^{-1} - \{1\}) \right| \leq \frac{|G|}{|H|} (|H| - 1)$$

puis

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| \leq |G| - \frac{|G|}{|H|} + 1. \quad \square$$

On va voir que cette propriété reste vraie sans supposer que G est fini, pourvu que $(G : H) < \infty$. On utilise un lemme :

Lemme 6.2 *Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G d'indice fini n . Il existe un sous-groupe N normal dans G et contenu dans H , tel que l'indice $(G : N)$ divise $n!$.*

En effet, le groupe G agit sur $X = G/H$ qui a n éléments. On obtient ainsi un homomorphisme φ de G dans le groupe \mathcal{S}_X des permutations de X qui est de cardinal $n!$. Le groupe $N = \ker \varphi$ répond à la question. \square

Si l'on applique le th. 6.1 à G/N et H/N , on constate que la réunion des conjugués de H ne remplit pas G modulo N donc, *a fortiori*, que $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \neq G$. \square

Remarque. Le cas $G = SO_3(\mathbf{R})$ et $H = \mathbf{S}_1$ montre que l'hypothèse $(G : H) < \infty$ ne peut être supprimée.

Mentionnons deux reformulations du th. 6.1 :

Théorème 6.1' *Si un sous-groupe H de G rencontre toutes les classes de conjugaison de G , on a $H = G$.*

(C'est un critère souvent utilisé en théorie des nombres, G étant un groupe de Galois.)

Théorème 6.1'' *Si G opère transitivement sur un ensemble X , et si $|X| \geq 2$, il existe un élément de G qui opère sans point fixe.*

En effet, si H est le fixateur d'un point de X , on choisit un élément qui n'appartient à aucun conjugué de H . \square

Voici deux applications du théorème ci-dessus :

Tout corps fini est commutatif (théorème de Wedderburn). En effet, soit D un corps fini et soit F son centre. On sait que $(D : F)$ est un carré n^2 et que tout $x \in D$ est contenu dans un sous-corps L commutatif, contenant F et tel que $(L : F) = n$. Comme deux tels sous-corps sont isomorphes, le théorème de Skolem-Noether montre qu'ils sont conjugués. Si L est l'un d'eux et si l'on pose $G = D^*$ et $H = L^*$, on a $G = \bigcup gHg^{-1}$, d'où $G = H$, $n = 1$ et D est commutatif.

Racine d'une équation modulo p . Soit $f = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$ un polynôme à coefficients dans \mathbf{Z} , irréductible sur \mathbf{Q} . Si p est un nombre premier, notons f_p la réduction de f modulo p ; c'est un élément de $\mathbf{F}_p[X]$. Notons \mathcal{P}_f l'ensemble des p tels que f_p ait une racine (au moins) dans \mathbf{F}_p . On va voir que la densité de \mathcal{P}_f est strictement inférieure à 1 dès que $n \geq 2$. [On dit que \mathcal{P} a une densité égale à ρ si

$$\frac{|\{p \leq x, p \in \mathcal{P}\}|}{|\{p \leq x\}|} \longrightarrow \rho \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty.]$$

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des racines de f dans une extension de \mathbf{Q} et soit G le groupe de Galois de f . Ce groupe opère transitivement sur X ; on a $X \simeq G/H$ où H est le fixateur de x_1 . On démontre (théorème de Chebotarev-Frobenius) que la densité de \mathcal{P}_f existe, et est égale à

$$\frac{1}{|G|} \left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right|.$$

Vu le théorème ci-dessus, cette densité est < 1 .

Corollaire. Si $n \geq 2$, il existe une infinité de p tels que f_p n'ait aucune racine dans \mathbf{F}_p .

Pour plus de détails, voir J.-P Serre, *On a theorem of Jordan*, Bull. A.M.S 40 (2003), 429 – 440.

6.2 Groupes de Frobenius : définition

On va désormais s'intéresser aux couples (G, H) tels que

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| = |G| - \left(\frac{|G|}{|H|} - 1 \right).$$

Cela signifie que $(gHg^{-1} - \{1\})$ et $(hHh^{-1} - \{1\})$ sont disjoints si g et h ne sont pas congrus modulo H , ou encore que H et gHg^{-1} sont d'intersection réduite à $\{1\}$ si $g \notin H$. On dit que H « ne rencontre pas ses conjugués ».

On s'intéresse au cas où H est un sous-groupe propre de G . Soit $X = G/H$. Une propriété équivalente est que tout élément de G (distinct de 1) a au plus un point fixe dans X si on fait agir G sur X , ou encore : tout élément de G qui fixe deux points est l'identité.

Exemple. Soit G le groupe des transformations h de la forme $h(x) = ax + b$, où a et b sont dans un corps fini \mathbf{F} , avec $a \neq 0$. Soit H le sous-groupe $\{x \mapsto ax\}$. Si N est le sous-groupe de G des translations, N est normal dans G , et G est le produit semi-direct de H par N . Alors (G, H) est un exemple de la situation précédente.

On va voir si cette propriété peut se généraliser.

Définition 6.1 *Un groupe G est dit de Frobenius s'il possède un sous-groupe H distinct de $\{1\}$ et de G tel que $|\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}| = |G| - (|G|/|H| - 1)$. On parle dans ce cas pour (G, H) de couple de Frobenius.*

Exemples.

(1) Soient N et H deux groupes finis, où H agit sur N : à tout $h \in H$, on associe $\sigma_h : N \rightarrow N$ défini par $\sigma_h(n) = hnh^{-1}$. On a $\sigma_{h_1 h_2} = \sigma_{h_1} \circ \sigma_{h_2}$ pour tous $h_1, h_2 \in H$. Soit G le produit semi-direct correspondant. Cherchons à quelle condition (G, H) est de Frobenius. Il faut et il suffit que $H \cap nHn^{-1} = \{1\}$ pour tout $n \in N - \{1\}$. En effet, soit $h \in H \cap nHn^{-1}$; alors h s'écrit $nh'n^{-1}$ avec $h' \in H$. On quotiente modulo N , ce qui fournit $h = h'$ ($G/N \simeq H$). Donc $h = nhn^{-1}$ soit encore $n = h^{-1}nh = \sigma_{h^{-1}}(n)$. Donc n est fixé par $\sigma_{h^{-1}}$. Si $h \neq 1$, alors nécessairement $n = 1$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (G, H) soit de Frobenius est qu'il n'existe pas de couple (h, n) avec $h \neq 1$ et $n \neq 1$ tel que $\sigma_h(n) = n$, ou encore que H opère librement sur $N - \{1\}$. On a $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = \{1\} \cup (G - N)$ d'où $G - \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = N - \{1\}$ (en effet $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \subset \{1\} \cup (G - N)$ et il suffit de compter les éléments pour conclure).

(2) Soit p un nombre premier et soit \mathbf{F} un corps fini contenant une racine ξ p -ième de l'unité. Soit N l'ensemble des matrices $p \times p$ triangulaires supérieures à éléments diagonaux égaux à 1. C'est un groupe. Soit H le groupe cyclique engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \xi & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \xi^{p-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \xi^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Alors H normalise N . Le groupe $G = N.H$ est le groupe des matrices triangulaires supérieures avec des ξ^k sur la diagonale. On vérifie que l'action de H est sans point fixe.

Ces exemples sont en fait caractéristiques ; on a en effet le

Théorème 6.3 (Frobenius) *Soit (G, H) un couple de Frobenius. Alors l'ensemble N des éléments de G non conjugués à un élément de H (ou égaux à 1) est un sous-groupe normal et on a $G = N.H$.*

Le point clé de la démonstration est que N est effectivement un sous-groupe : il repose sur la théorie des caractères ; nous le démontrerons plus tard (cf. Annexe, th. A.22). Le groupe N est alors normal (car invariant par conjugaison). D'autre part :

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| = |G| - ((G : H) - 1),$$

donc $|N| = (G : H)$. Enfin $N \cap H = \{1\}$, d'où $G = N.H$. \square

On démontre (nous ne le ferons pas) qu'un groupe G ne peut être un groupe de Frobenius que « d'une seule manière » : si (G, H_1) et (G, H_2) sont des couples de Frobenius, alors H_1 est conjugué de H_2 . En particulier le sous-groupe normal N est unique.

On cherche maintenant à classer les groupes de Frobenius en étudiant la structure de N et celle de H .

6.3 Structure de N

On suppose que N et H sont distincts de $\{1\}$ et qu'ils interviennent dans le groupe de Frobenius G . Choisissons $x \in H$ d'ordre premier p . L'élément x définit un automorphisme de N d'ordre p sans point fixe $\neq 1$. D'où : N intervient dans un groupe de Frobenius si et seulement s'il possède un automorphisme σ d'ordre premier et sans point fixe distinct de 1.

Proposition 6.4 *Soit σ un automorphisme d'ordre p (non nécessairement premier) d'un groupe fini N sans point fixe autre que 1. Alors :*

- (1) *L'application $x \mapsto x^{-1}\sigma(x)$ (de N dans N) est bijective.*
- (2) *Pour tout $x \in N$, on a $x\sigma(x)\sigma^2(x) \cdots \sigma^{p-1}(x) = 1$.*
- (3) *Si x et $\sigma(x)$ sont conjugués dans N alors $x = 1$.*

(1) Comme N est fini, il suffit de montrer que l'application est injective. Supposons $x^{-1}\sigma(x) = y^{-1}\sigma(y)$ avec $x, y \in N$. Alors $yx^{-1} = \sigma(yx^{-1})$ donc l'élément yx^{-1} est fixé par σ donc est égal à 1.

(3) Soit $x \in N$ et supposons qu'il existe $a \in N$ tel que $\sigma(x) = axa^{-1}$. D'après (1), il existe $b \in N$ tel que $a^{-1} = b^{-1}\sigma(b)$. Alors $\sigma(x) = \sigma^{-1}(b)bx b^{-1}\sigma(b)$ donc $\sigma(bxb^{-1}) = bxb^{-1}$, ce qui implique $bxb^{-1} = 1$ puis $x = 1$.

(2) Soit $a = x\sigma(x)\sigma^2(x) \cdots \sigma^{p-1}(x)$. On a

$$\sigma(a) = \sigma(x)\sigma^2(x) \cdots \sigma^{p-1}(x)x = x^{-1}ax,$$

donc $a = 1$ d'après (3). \square

Corollaire 6.5 *Si l est un nombre premier, il existe un l -Sylow de N stable par σ .*

Soit S un l -Sylow de N . Le groupe $\sigma(S)$ est aussi un l -Sylow de N , donc il existe $a \in N$ tel que $aSa^{-1} = \sigma(S)$. On écrit $a^{-1} = b^{-1}\sigma(b)$, d'où $\sigma(b^{-1})bSb^{-1}\sigma(b) = \sigma(S)$, soit $bSb^{-1} = \sigma(b)\sigma(S)\sigma(b^{-1}) = \sigma(bSb^{-1})$. Donc bSb^{-1} est un l -Sylow de N stable par σ . \square

Corollaire 6.6 *Si $a \in N$, l'automorphisme $\sigma_a : x \mapsto a\sigma(x)a^{-1}$ est conjugué à σ dans $\text{Aut}(G)$; en particulier, il est d'ordre p et sans point fixe.*

D'après 6.4 (1), il existe $b \in G$ tel que $a = b^{-1}\sigma(b)$; alors $\sigma_a(x) = b^{-1}\sigma(bxb^{-1})b$, donc $b\sigma_a(x)b^{-1} = \sigma(bxb^{-1})$ i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\sigma_a} & N \\ \text{conjugaison par } b^{-1} \downarrow & & \downarrow \text{conjugaison par } b^{-1} \\ N & \xrightarrow{\sigma} & N \end{array}$$

Ceci donne immédiatement le résultat. \square

Exemples.

(1) Si $p = 2$, on a $x\sigma(x) = 1$ pour tout $x \in N$, donc $\sigma(x) = x^{-1}$. Comme σ est un automorphisme, N est abélien.

(2) Pour le cas $p = 3$ (Burnside), posons $\sigma(x) = x'$ et $\sigma^2(x) = x''$. La prop. 6.4 (2) appliquée à σ et σ^2 donne $xx'x'' = 1$ et $xx''x' = 1$, donc x' et x'' commutent; pour les autres c'est évident, donc x , x' et x'' commutent. De même x et $ax'a^{-1}$ commutent pour tout a , ainsi que x et $ax''a^{-1}$. Donc x' et x'' commutent à tout conjugué de x . Or $x = (x'x'')^{-1}$ donc N la propriété suivante : deux éléments conjugués commutent, donc aussi x et (x, y) . Finalement $(x, (x, y)) = 1$ pour tous $x, y \in N$. Le groupe dérivé de N est contenu dans le centre de N ; cela entraîne que N est nilpotent de classe au plus 2.

(3) Le cas $p = 5$ a été traité par Higman : le groupe N est alors nilpotent de classe au plus 6 (c'est la meilleure borne possible).

Thompson a généralisé ces résultats par le

Théorème 6.7 (Thompson) *N est nilpotent.*

Pour une démonstration, cf. [6, Kap. V, Hauptsatz 8.14]. En ce qui concerne la classe de N , Higman a conjecturé que si p est l'ordre de G , la classe de N est $\leq \frac{p^2-1}{4}$.

6.4 Structure de H

Nous dirons que H a la propriété \mathcal{F} s'il existe un groupe G contenant H et distinct de H tel que le couple (G, H) soit un couple de Frobenius. D'après les théorèmes de Frobenius et de Thompson, cela revient à dire qu'il existe un groupe nilpotent $N \neq \{1\}$ sur lequel H opère *sans point fixe* (i.e. librement sur $N - \{1\}$).

Exemple. Soit \mathbf{F} un corps fini de caractéristique l et soit H un sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F})$ d'ordre premier à l . Si l'on prend pour N le \mathbf{F} -espace vectoriel \mathbf{F}^2 , on vérifie facilement que H opère librement sur $N - \{0\}$. Donc H a la propriété \mathcal{F} . (Ceci s'applique notamment au groupe icosaédral binaire d'ordre 120, groupe qui n'est pas résoluble.)

Théorème 6.8 *Soit H un groupe fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) H a la propriété \mathcal{F} (i.e. H intervient dans un couple de Frobenius).
- (2) Il existe un corps K et une représentation linéaire $\rho : H \rightarrow \mathbf{GL}_n(K)$, avec $n \geq 1$, telle que ρ soit « sans point fixe » (i.e. H opère librement sur $K^n - \{0\}$).
- (3) Pour tout corps K dont la caractéristique ne divise pas $|H|$, il existe une représentation linéaire $\rho : H \rightarrow \mathbf{GL}_n(K)$ sans point fixe.
- (4) On peut faire opérer H linéairement et librement sur une sphère \mathbf{S}_{n-1} .

[Noter que (2) et (3) entraînent que ρ est fidèle.]

Avant de donner la démonstration, faisons quelques remarques sur la propriété suivante d'un corps K , notée (2_K) : il existe une représentation $H \rightarrow \mathbf{GL}_n(K)$ sans point fixe (avec $n \geq 1$).

(a) *Cette propriété ne dépend que de la caractéristique p de K .*

En effet, si elle est satisfaite par K et si x est un vecteur non nul de K^n , les transformés par H de x engendrent un espace vectoriel de dimension finie N sur le corps premier K_0 (i.e. \mathbf{F}_p ou \mathbf{Q}), d'où une représentation $H \rightarrow \mathbf{GL}_N(K_0)$ sans point fixe. Par extension des scalaires, on en déduit une pour tout corps contenant K_0 .

(b) *Si (2_K) est vraie, la caractéristique p de K est, soit 0, soit un nombre premier ne divisant pas $|H|$.*

En effet, si H opère librement sur $\mathbf{F}_p^n - \{0\}$, l'ordre de H divise $p^n - 1$ et n'est donc pas divisible par p .

(c) *La propriété (2_K) en caractéristique 0 entraîne la propriété analogue en toute caractéristique p ne divisant pas $|H|$.*

En effet, d'après (a), il existe un \mathbf{Q} -espace vectoriel V de dimension finie ≥ 1 où H opère sans point fixe. Soit $x \in V$ non nul et soit L le \mathbf{Z} -réseau de V engendré par les transformés de x par H . Le groupe H opère sans point fixe sur L . Il opère aussi sur le \mathbf{F}_p -espace vectoriel $V_p = L/pL$. Montrons que cette action est sans point fixe, dès lors que p ne divise pas l'ordre de H . Si $s \in H$ est d'ordre m , l'automorphisme s_V de V défini par s est tel que $s_V^m = 1$, et il n'admet pas 1 pour valeur propre. On a donc

$$1 + s_V + s_V^2 + \cdots + s_V^{m-1} = 0.$$

A fortiori, la même équation vaut dans V_p et elle entraîne (vu que m est premier à p) que $s_V x \neq x$ pour tout $x \in V_p$ non nul. D'où la propriété (2_K) pour \mathbf{F}_p .

(d) *La propriété (2_K) en caractéristique $p \neq 0$ entraîne la propriété analogue en caractéristique 0.*

Soit en effet $\rho_p : H \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ une représentation linéaire de H sans point fixe. D'après (b), p ne divise pas $|H|$. D'après ce qu'on a vu au chapitre 4, on peut relever ρ_p en un homomorphisme $\rho_{p^\infty} : H \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$, où $\mathbf{Z}_p = \varprojlim \mathbf{Z}/p^v\mathbf{Z}$ est l'anneau des entiers p -adiques. Comme $\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$, on obtient ainsi une représentation linéaire $H \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ de caractéristique nulle. Cette représentation est sans point fixe. En effet, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur fixe non nul, on peut supposer (quitte à multiplier x par un scalaire) que les x_i appartiennent à \mathbf{Z}_p et que l'un d'eux n'est pas divisible par p . La réduction modulo p des x_i donne alors un vecteur non nul de \mathbf{F}_p^n fixe par H , contrairement à l'hypothèse.

Ceci fait, la démonstration du théorème est immédiate. En effet, il résulte de (a), (b), (c) et (d) que (2_K) est indépendante de K . D'où l'équivalence $(2) \Leftrightarrow (3)$ du théorème. Prouvons maintenant :

(1) \Rightarrow (2) Si H opère sans point fixe sur le groupe nilpotent $N \neq \{1\}$, le centre C de N n'est pas réduit à $\{1\}$. Si p est un facteur premier de $|C|$, le groupe \mathcal{C}_p des éléments $x \in N$ tels que $x^p = 1$ est un \mathbf{F}_p -espace vectoriel non nul où H opère sans point fixe.

(3) \Rightarrow (1) On choisit pour K un corps fini. On obtient ainsi une action sans point fixe de H sur un groupe abélien élémentaire.

(4) \Rightarrow (2) On prend $K = \mathbf{R}$.

(3) \Rightarrow (4) On prend $K = \mathbf{R}$. On obtient une représentation linéaire $\rho : H \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ sans point fixe. Comme H est fini, il existe sur \mathbf{R}^n une forme quadratique définie positive invariante par H (prendre la somme des transformés par H de la forme quadratique standard $\sum x_i^2$) : quitte à conjuguer ρ , on peut donc supposer que $\rho(H)$ est contenu dans le groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, donc laisse stable la sphère \mathbf{S}_{n-1} d'équation

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarques.

(1) On peut classer les groupes H ayant la propriété \mathcal{F} , cf. [12].

(2) Dans (4), on ne peut pas supprimer la condition que H opère linéairement sur \mathbf{S}_{n-1} . Exemple : $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ pour $p \geq 7$.

Exercice. Soit H un groupe ayant la propriété \mathcal{F} . Montrer que :

(i) Tout sous-groupe abélien de H est cyclique.

(ii) Si p et q sont premiers, tout sous-groupe d'ordre pq de H est cyclique.

Inversement, si H est résoluble et si (i) et (ii) sont vérifiées, alors H a la propriété \mathcal{F} (théorème de Vincent). Par contre, on peut montrer que le groupe $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_{17})$ a les propriétés (i) et (ii), mais pas la propriété \mathcal{F} .

Chapitre 7

Transfert

7.1 Définition

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini. Soit $X = G/H$ l'ensemble des classes à gauche selon H . Pour tout $x \in X$, on choisit un représentant \bar{x} de x dans G . Le groupe G agit sur X . Si $s \in G$ et $x \in X$, l'élément $s\bar{x}$ de G a pour image sx dans X . Si \overline{sx} désigne le représentant de sx , il existe donc $h_{s,x} \in H$ tel que $s\bar{x} = \overline{sx} h_{s,x}$. On pose :

$$\text{Ver}(s) = \prod_{x \in X} h_{s,x} \pmod{(H, H)},$$

où le produit est calculé dans le groupe $H^{ab} = H/(H, H)$.

Théorème 7.1 (Schur) *L'application $\text{Ver} : G \rightarrow H^{ab}$ définie ci-dessus est un homomorphisme et ne dépend pas du choix du système de représentants $\{\bar{x}\}_{x \in X}$.*

On commence par montrer que l'application Ver est bien définie. Soit donc $\{\bar{x}'\}_{x \in X}$ un autre système de représentants; calculons $\text{Ver}'(s)$ le produit relatif aux \bar{x}' . L'élément $\bar{x}' \in X$ a pour image x dans X ; il existe donc $h_x \in H$ tel que $\bar{x}' = \bar{x} h_x$.

On a :

$$\begin{aligned} s\bar{x}' &= s\bar{x} h_x \\ &= \overline{sx} h_{s,x} h_x \\ &= \overline{sx} h_{s,x} h_{s,x}^{-1} h_{s,x} h_x \\ &= (\overline{sx})' h_{s,x}^{-1} h_{s,x} h_x, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Ver}'(s) &= \prod h_{s,x}^{-1} h_{s,x} h_x \pmod{(H, H)} \\ &= \left(\prod h_{s,x}\right)^{-1} \prod h_{s,x} \prod h_x \pmod{(H, H)}, \end{aligned}$$

car H^{ab} est abélien¹. Or $\prod h_{s,x} = \prod h_x$ car sx parcourt X quand x parcourt X , d'où :

$$\text{Ver}'(s) = \prod h_{s,x} = \text{Ver}(s) \pmod{(H, H)},$$

et l'application Ver est bien définie.

Montrons à présent qu'il s'agit d'un homomorphisme. Soient $s, t \in G$, on a :

$$\begin{aligned} st\bar{x} &= \overline{stx} h_{t,x} \\ &= \overline{stx} h_{s,tx} h_{t,x}, \end{aligned}$$

¹Afin d'éviter les lourdeurs d'écriture, il est sous-entendu que les produits sont étendus aux $x \in X$.

d'où :

$$\begin{aligned}\text{Ver}(st) &= \prod h_{s,tx} h_{t,x} \pmod{(H, H)} \\ &= \prod h_{s,tx} \prod h_{t,x} \pmod{(H, H)},\end{aligned}$$

car H^{ab} est abélien. Or $\prod h_{s,tx} = \prod h_{s,x}$ car tx parcourt X quand x parcourt X .

D'où $\text{Ver}(st) = \prod h_{s,x} \prod h_{t,x} = \text{Ver}(s)\text{Ver}(t) \pmod{(H, H)}$. \square

Comme H^{ab} est abélien, l'homomorphisme Ver se factorise en un homomorphisme de G^{ab} dans H^{ab} (que nous noterons encore Ver), appelé *transfert*.

Remarque. Le transfert est *fonctoriel* pour les isomorphismes : si σ est un isomorphisme du couple (G, H) sur le couple (G', H') , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G^{ab} & \xrightarrow{\sigma} & G'^{ab} \\ \text{Ver} \downarrow & & \downarrow \text{Ver} \\ H^{ab} & \xrightarrow{\sigma} & H'^{ab} \end{array}$$

est commutatif (il suffit de constater que si $\{\bar{x}\}$ est un système de représentants de G/H alors $\{\sigma(\bar{x})\}$ en est un pour G'/H').

En particulier, si l'on prend $G = G'$, $H = H'$ et $\sigma(x) = gxg^{-1}$, avec $g \in N_G(H)$, ceci montre que l'image de l'homomorphisme $\text{Ver} : G^{ab} \rightarrow H^{ab}$ est contenue dans l'ensemble des éléments de H^{ab} fixés par $N_G(H)$.

7.2 Calcul du transfert

Soit H un sous-groupe d'indice fini de G et soit $X = G/H$. L'élément $s \in G$ opère sur X ; soit C le sous-groupe cyclique de G engendré par s . Alors C découpe X en orbites O_α . Soient $f_\alpha = |O_\alpha|$ et $x_\alpha \in O_\alpha$. On a $s^{f_\alpha} x_\alpha = x_\alpha$. Si g_α est un représentant de x_α , on a donc :

$$s^{f_\alpha} g_\alpha = g_\alpha h_\alpha, \text{ avec } h_\alpha \in H.$$

Proposition 7.2 *On a $\text{Ver}(s) = \prod_\alpha h_\alpha = \prod_\alpha g_\alpha^{-1} s^{f_\alpha} g_\alpha \pmod{(H, H)}$.*

On prend pour système de représentants de X les éléments $s^i g_\alpha$, avec $0 \leq i < f_\alpha$. Si le représentant de $x \in X$ est de la forme $s^{f_\alpha - 1} g_\alpha$, l'élément $h_{s,x}$ correspondant de H est h_α ; les autres $h_{s,x}$ sont égaux à 1. La proposition en résulte. \square

Corollaire 7.3 *Soit φ un homomorphisme de H^{ab} dans un groupe A . On suppose que $\varphi(h) = \varphi(h')$ lorsque les éléments $h, h' \in H$ sont conjugués dans G . Alors*

$$\varphi(\text{Ver}(h)) = \varphi(h)^n,$$

pour tout $h \in H$, où $n = (G : H)$.

En effet, on a $\varphi(\text{Ver}(h)) = \prod_\alpha \varphi(g_\alpha^{-1} h^{f_\alpha} g_\alpha)$. Or les éléments $g_\alpha^{-1} h^{f_\alpha} g_\alpha$ et h^{f_α} sont conjugués dans G , donc on a :

$$\varphi(\text{Ver}(h)) = \prod_\alpha \varphi(h^{f_\alpha}) = \prod_\alpha \varphi(h)^{f_\alpha}.$$

Le résultat se déduit alors de la relation $\sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha |O_\alpha| = |X| = n$. \square

Comme $H \subset G$, on a un morphisme naturel $H^{ab} \rightarrow G^{ab}$.

Corollaire 7.4 *L'homomorphisme composé $G^{ab} \xrightarrow{\text{Ver}} H^{ab} \longrightarrow G^{ab}$ est $s \mapsto s^n$.*

C'est immédiat par la proposition, car

$$g_\alpha^{-1} s^{f_\alpha} g_\alpha = s^{f_\alpha} \pmod{(G, G)} \quad \text{et} \quad \sum_\alpha f_\alpha = |X| = n. \quad \square$$

Corollaire 7.5 *Si G est abélien, alors $\text{Ver} : G \rightarrow H$ est donné par $s \mapsto s^n$.*

7.3 Exemples d'utilisation du transfert

7.3.1 Premier exemple (Gauss)

On fixe un nombre premier $p \neq 2$.

Soit $G = \mathbf{F}_p^*$ et soit $H = \{\pm 1\}$. Alors l'indice de H dans G est $(p-1)/2$ et le transfert est donné par $\text{Ver}(x) = x^{(p-1)/2}$ pour $x \in \mathbf{F}_p^*$. Or c'est aussi le *symbole de Legendre* $\left(\frac{x}{p}\right)$.

Ceci nous donne alors un moyen de calculer $\left(\frac{x}{p}\right)$.

On choisit le système de représentants de $X = G/H$ donné par $S = \{1, 2, \dots, (p-1)/2\}$.

Soit $x \in G$ et soit $s \in S$. Si $xs \in S$, alors le $h_{s,x}$ correspondant vaut 1 ; sinon c'est -1 .

On pose donc :

$$\varepsilon(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } xs \in S, \\ -1 & \text{si } xs \notin S. \end{cases}$$

On a $\text{Ver}(x) = \prod_{s \in S} \varepsilon(x, s)$ (*lemme de Gauss*).

Calculons par exemple $\left(\frac{2}{p}\right)$ pour $p \neq 2$. On a $p = 1 + 2m$ et :

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{m/2} \quad \text{si } m \text{ est pair,}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(m+1)/2} \quad \text{si } m \text{ est impair.}$$

D'où :

$$p \equiv 1 \pmod{8} \implies \left(\frac{2}{p}\right) = +1,$$

$$p \equiv 3 \pmod{8} \implies \left(\frac{2}{p}\right) = -1,$$

$$p \equiv 5 \pmod{8} \implies \left(\frac{2}{p}\right) = -1,$$

$$p \equiv 7 \pmod{8} \implies \left(\frac{2}{p}\right) = +1,$$

ce qui se résume par : $\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \iff p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

7.3.2 Second exemple

Proposition 7.6 *Si G est un groupe sans torsion contenant un sous-groupe H d'indice fini isomorphe à \mathbf{Z} , alors G lui-même est isomorphe à \mathbf{Z} .*

Quitte à remplacer H par l'intersection de ses conjugués, on peut supposer H normal dans G . Le groupe G agit sur H , d'où un homomorphisme $\varepsilon : G \rightarrow \text{Aut}(H) = \{\pm 1\}$. Soit G' le noyau de ε ; alors $H \subset G'$ car H , étant abélien, agit trivialement sur lui-même par automorphismes intérieurs (H est même contenu dans le centre de G' car celui-ci agit trivialement sur H). Donc le transfert $\text{Ver} : G'^{ab} \rightarrow H^{ab} = \mathbf{Z}$ est égal à $x \mapsto x^n$ où $n = (G' : H)$. Soit Φ le noyau de $\text{Ver} : G' \rightarrow H^{ab}$, alors $\Phi \cap H = \{1\}$ car H est isomorphe à \mathbf{Z} , donc Φ est fini et même $\Phi = \{1\}$ puisque G' est sans torsion. Donc G' est isomorphe à \mathbf{Z} . Si G est isomorphe à G' , on a fini.

Sinon, on a $(G : G') = 2$, $G' \simeq \mathbf{Z}$ et G/G' opère sur G' par $y \mapsto y^{\pm 1}$. Soit donc $x \in G - G'$ tel que, pour un certain $y \in G'$, on ait $xyx^{-1} = y^{-1}$. Alors $x^2 \in G'$ car l'indice de G' dans G est 2. Prenons alors $y = x^2$, il vient $xx^2x^{-1} = x^{-2}$ d'où $x^2 = x^{-2}$ donc $x = 1$ car G est sans torsion. Donc G est isomorphe à \mathbf{Z} . \square

Remarque. On a un résultat analogue (mais bien moins élémentaire) pour les groupes libres non abéliens (Stallings-Swan²).

7.4 Transfert dans un sous-groupe de Sylow

Théorème 7.7 *Soient H un p -Sylow d'un groupe G et $\varphi : H \rightarrow A$ un homomorphisme à valeurs dans un p -groupe abélien A . Alors :*

- (1) *Pour qu'il existe un prolongement de φ en un homomorphisme de G dans A , il faut et il suffit que, pour tous $h, h' \in H$ conjugués dans G , on ait $\varphi(h) = \varphi(h')$.*
- (2) *Si cette condition est vérifiée, alors le prolongement est unique et donné par : $s \mapsto \varphi(\text{Ver}(s))^{1/n}$, où $n = (G : H)$, ce qui a bien un sens car n est premier à p .*

(1) La condition est nécessaire car si $\tilde{\varphi}$ est un prolongement de φ à G , alors pour $h \in H$ et $g \in G$ avec $g^{-1}hg \in H$, on a

$$\varphi(g^{-1}hg) = \tilde{\varphi}(g)^{-1}\varphi(h)\tilde{\varphi}(g) = \varphi(h)$$

car A est abélien.

La condition est suffisante car, n étant premier à p et A étant un p -groupe, $\varphi(\text{Ver}(s))^{1/n}$ a un sens (pour tout $a \in A$, il existe $b \in A$ unique tel que $b^n = a$) et l'application $s \mapsto \varphi(\text{Ver}(s))^{1/n}$ convient d'après le cor. 7.3.

(2) Ce prolongement est unique car φ est nécessairement égal à 1 sur les p' -Sylow de G lorsque $p' \neq p$. \square

Théorème 7.8 *Soient H un p -Sylow abélien de G et N son normalisateur dans G . Alors l'image de l'homomorphisme $\text{Ver} : G^{ab} \rightarrow H^{ab} = H$ est l'ensemble des éléments de H fixés par N (i.e. les éléments de H qui sont dans le centre de N).*

²Références : J.R. Stallings, *On torsion-free groups with infinitely many ends*, Ann. Math. 88 (1968), 312 – 334. R. Swan, *Groups of cohomological dimension one*, J. Algebra 12 (1969), 585 – 610.

Par la remarque faite à la fin du § 7.1, on a déjà l'inclusion de l'image de Ver dans $H^N = \{h \in H \mid xhx^{-1} = h, \forall x \in N\}$.

Montrons l'égalité. On a $N \supset H$ et $(N : H)$ est premier à p car H est un p -Sylow. On définit l'homomorphisme $\varphi : H \rightarrow H^N$ par $\varphi(h) = (\prod_{x \in N/H} xhx^{-1})^{1/(N:H)}$.

On a bien $\prod_{x \in N/H} xhx^{-1} \in H^N$ car si $x' \in N$, on a :

$$x'(\prod_{x \in N/H} xhx^{-1})x'^{-1} = \prod_{x \in N/H} x'xhx^{-1}x'^{-1} = \prod_{x \in N/H} xhx^{-1}.$$

De plus, comme H est abélien, si $h, h' \in H$ sont conjugués dans G , ils le sont dans N (cf. § 2.4) et on a alors $\varphi(h) = \varphi(h')$. D'après le cor. 7.3, on a

$$\varphi(\text{Ver}(h)) = \varphi(h)^n,$$

pour $h \in H$, où n est l'indice de H dans G . Or, pour $h \in H^N$, on a $\varphi(h) = h$ et comme $\text{Ver}(h) \in H^N$, on a, pour $h \in H^N$:

$$\text{Ver}(h) = \varphi(\text{Ver}(h)) = \varphi(h)^n,$$

i.e. $\text{Ver}(h) = h^n$ si $h \in H^N$.

Comme H^N est un p -groupe et que n est premier à p , on obtient tous les éléments de H^N par les puissances n -ièmes d'éléments de H^N . Donc $\text{Im}(\text{Ver}) = H^N$. \square

Théorème 7.9 *Soit H un p -Sylow de G . Supposons que H soit abélien différent de $\{1\}$ et que G n'ait pas de quotient cyclique d'ordre p . Soit N le normalisateur de H dans G . Alors :*

- (1) *L'ensemble H^N des éléments de H fixés par N est réduit à $\{1\}$.*
- (2) *Si r est le rang de H (nombre minimum de générateurs), il existe un nombre premier l , distinct de p , qui divise à la fois $(N : H)$ et $\prod_{i=1}^r (p^i - 1)$.*

(1) Si $H^N \neq \{1\}$, on a alors un homomorphisme non trivial $\text{Ver} : G \rightarrow H^N$, où H^N est un p -groupe, d'où l'on tire un quotient cyclique d'ordre p de G .

Pour (2), soit H_p le sous-groupe de H formé des éléments x tels que $x^p = 1$; c'est un \mathbf{F}_p -espace vectoriel de dimension r (puisque $H = \prod_{i=1}^r (\mathbf{Z}/p^{n_i}\mathbf{Z})$). L'action de N sur H_p est non triviale par (1); elle définit un sous-groupe Φ de $\text{Aut}(H_p) \simeq \mathbf{GL}_r(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. Si l est un facteur premier de l'ordre de Φ alors l divise l'ordre de N/H car Φ est un quotient de N/H (en effet, Φ est défini par l'action de N sur H , qui est en fait une action de N/H car H étant abélien, il agit trivialement sur lui-même). On a $l \neq p$, car p ne divise pas l'ordre de N/H ; comme Φ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_r(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, l divise l'ordre de $\mathbf{GL}_r(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, qui est $p^{r(r-1)/2} \prod_{i=1}^r (p^i - 1)$. D'où (2). \square

Corollaire 7.10 *Si $p = 2$, le sous-groupe H n'est pas cyclique.*

En effet, on a alors $r \geq 2$ par le th. 7.9, mais on peut en donner une démonstration directe : si H est un 2-Sylow cyclique, soit h un générateur de H . Le groupe agit sur lui-même par translations. L'élément h découpe alors G en $|G/H|$ orbites. On envoie G dans $\{\pm 1\}$ en associant à $x \in G$ la signature de la permutation que x effectue sur G par l'action de translations. Or h est formé d'un nombre impair (i.e. précisément $|G/H|$) de cycles de la forme $(x, hx, \dots, h^{2^n-1}x)$, où $|H| = 2^n$. Chacun de ces cycles est de signature (-1) , donc la signature de h est (-1) . On vient d'exhiber un homomorphisme non trivial de G dans $\{\pm 1\}$, d'où contradiction. \square

Remarque. Le th. 7.9 montre que $N_G(H) \neq H$ quand celui-ci est un p -Sylow abélien d'un groupe sans quotient cyclique d'ordre p (sinon $H^N = H \neq \{1\}$).

7.5 Application : groupes simples d'ordre impair inférieur à 2000

En fait, on va montrer qu'il n'existe pas de groupe G d'ordre impair, avec $1 < |G| < 2000$, tel que $G = (G, G)$.

D'après le théorème de Burnside (cf. Annexe, th. A.21), il y a au moins trois facteurs premiers dans $|G|$; si p^α est le plus petit de ces facteurs, on a $p^{3\alpha} < 2000$, ce qui donne 5 cas possibles : $p^\alpha = 3, 5, 7, 9$ ou 11 .

Cas $p^\alpha = 3$: le groupe G a un 3-Sylow d'ordre 3, donc cyclique, donc abélien. Soit N son normalisateur. D'après le th. 7.9, il existe l premier distinct de 3 qui divise à la fois $|N|$ et $(p-1) = 2$. Or $|N|$ est impair, c'est impossible.

Cas $p^\alpha = 5$: il s'exclut par un raisonnement analogue.

Cas $p^\alpha = 9$: on remarque de même que le 3-Sylow est d'ordre 3^2 , donc abélien. Et le même raisonnement (dans les deux cas possibles : $r = 1$ ou $r = 2$) exclut ce cas.

Cas $p^\alpha = 7$: par le même théorème, on doit avoir l premier divisant $|N|$ (impair) et $p-1 = 6$. Donc 3 divise $|G|$. Comme les cas précédents excluent $p^\alpha = 3$ ou 9 , on a : 3^3 divise $|G|$. Par le théorème de Burnside, on a q premier, distinct de 3 et de 7, divisant l'ordre de G . Donc $|G| \geq 3^3 \cdot 7 \cdot q^\beta$ et $q^\beta \geq 11$ (car si $q = 5$, un cas déjà vu montre que $\beta \geq 2$). Or c'est impossible, car $3^3 \cdot 7 \cdot 11 > 2000$.

Cas $p^\alpha = 11$: le th. 7.9, appliqué au 11-Sylow, montre qu'il existe l divisant $|N|$ et $p-1 = 10$. D'après un cas précédent, on a alors $|G| \geq 11 \cdot 5^2 \cdot q^\beta$ et $q^\beta \geq 13$, ce qui est impossible. \square

7.6 Application : groupes simples non abéliens d'ordre inférieur à 200

Dans ce §, on suppose $|G| \leq 200$.

Proposition 7.11

- (1) On suppose $G = (G, G)$ et $G \neq \{1\}$. Alors l'ordre de G est 60, 120, 168 ou 180.
- (2) Si G est simple non abélien, alors l'ordre de G est 60 ou 168 et G est isomorphe à \mathcal{A}_5 ou $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.

(1) D'après le § précédent, l'ordre de G est pair et il est même divisible par 4 d'après le cor. 7.10 qui affirme la non-existence de 2-Sylow cycliques.

Cas où le 2-Sylow H est d'ordre 4. C'est alors $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Soit $N = N_G(H)$; N agit non trivialement sur H (puisque $H^N = \{1\}$, cf. th. 7.9), d'où un homomorphisme non trivial $N \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (qui est d'ordre 6). Si N s'envoie sur un sous-groupe d'ordre 2 de $\text{Aut}H$, alors $H^N \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (il suffit pour le voir d'examiner les automorphismes de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$). Donc 3 divise l'ordre de N , donc aussi l'ordre de G . D'où cinq possibilités :

- $|G| = 4 \cdot 3 \cdot 13$: soit H un 13-Sylow et soit N son normalisateur. Alors $(G : N)$ est le nombre des 13-Sylow de G donc $(G : N) \equiv 1 \pmod{13}$; comme $(G : N)$ divise 4.3 cela implique $(G : N) = 1$ et donc H est normal : c'est impossible.
- $|G| = 4 \cdot 3 \cdot 11$: soit N le normalisateur d'un 11-Sylow H ; alors $(G : N)$ divise 4.3 et $(G : N) \equiv 1 \pmod{11}$, donc ou $(G : N) = 1$ et c'est impossible, ou $(G : N) = 12$ et alors $N = H$ puis $H^N = H$ (puisque H est abélien) et c'est impossible (cf. § 7.4).

- $|G| = 4.3.7$: soit N le normalisateur d'un 7-Sylow H . Alors $(G : N)$ divise 12 et $(G : N) \equiv 1 \pmod{7}$; donc $(G : N) = 1$: c'est impossible.
- Restent les cas $|G| = 4.3.5 = 60$ ou $|G| = 4.3^2.5 = 180$ (les autres cas sont éliminés car sinon $|G| > 200$).

Cas où le 2-Sylow H est d'ordre 8. On a deux cas possibles : $|G| = 8.3.5$ ou $|G| = 8.3.7$, les autres cas donnent un ordre de G trop grand. De même, le cas $|H| > 8$ est éliminé pour des raisons d'ordre. Ceci donne l'assertion (1).

(2) Etudions les cas $|G| = 4.3^2.5$ et $|G| = 8.3.5$: soit H un 5-Sylow et soit N son normalisateur ; alors $(G : N) \equiv 1 \pmod{5}$ et $(G : N)$ divise 4.3^2 dans un cas, 8.3 dans l'autre. Dans les deux cas, la seule possibilité est $(G : N) = 6$. Soit X l'ensemble des 5-Sylow de G . Le groupe G s'envoie dans le groupe des permutations de X , c'est-à-dire \mathcal{S}_6 . Comme G est simple, il s'envoie dans \mathcal{A}_6 . Or \mathcal{A}_6 est d'ordre 360 et G d'ordre 180 ou 120. Le groupe \mathcal{A}_6 ne peut avoir de sous-groupe d'indice m avec $1 < m < 6$ (ici ce serait 3 ou 2) sinon \mathcal{A}_6 se plongerait dans \mathcal{S}_m , ce qui est impossible puisque $|\mathcal{A}_6| > |\mathcal{S}_m|$. Les seuls ordres possibles de groupes simples non abéliens inférieurs à 200 sont donc $4.3.5 = 60$ et $8.3.7 = 168$.

Structure des groupes simples d'ordre 60 et 168.

Ordre 60 : soit H un 2-Sylow de G ; alors H ne peut pas être cyclique (cor. 7.10) et donc (th. 7.9) 3 divise $|N|$ (N normalisateur de H). Donc 12 divise $|N|$ et $N \neq G$ donc $|N| = 12$. Ainsi G/N est d'ordre 5 et on a un homomorphisme non trivial de G dans \mathcal{S}_5 . Comme G est simple, cela donne un plongement de G dans \mathcal{A}_5 et pour des raisons d'ordre, on a $G = \mathcal{A}_5$.

Ordre 168 : soit H un 7-Sylow de G et soit N son normalisateur. Alors $(G : N)$ divise 8.3 et $(G : N) \equiv 1 \pmod{7}$. Comme $N \neq G$, on a $(G : N) = 8$. Donc $|N| = 21$. Considérons la suite exacte $\{1\} \rightarrow H \rightarrow N \rightarrow N/H \rightarrow \{1\}$. Comme l'ordre de H est premier à celui de N/H , le groupe N est produit semi-direct de N/H et de H (cf. th. 4.10). Le groupe N a donc deux générateurs : α (générateur de H) avec $\alpha^7 = 1$ et β (générateur de N/H) avec $\beta^3 = 1$. L'automorphisme $x \mapsto \beta x \beta^{-1}$ de H est d'ordre 3 ; c'est donc, soit $x \mapsto x^2$, soit $x \mapsto x^{-2}$. Quitte à remplacer β par β^{-1} , on peut supposer que c'est $x \mapsto x^2$. On a alors $\beta \alpha \beta^{-1} = \alpha^2$.

Soit X l'ensemble des 7-Sylow de G . Alors H opère sur X et fixe lui-même comme élément de X ; appelons cet élément ∞ . On a $X = \{\infty\} \cup X_0$ avec $|X_0| = 7$. Le groupe H opère librement sur X_0 (car H est cyclique d'ordre 7). L'élément β opère sur X et fixe ∞ car $\beta \in N$. Comme $\beta^3 = 1$, il existe $x_0 \in X_0$ tel que $\beta x_0 = x_0$. Alors

$$X = \{x_0, \alpha x_0, \dots, \alpha^6 x_0, \infty\}.$$

On identifie X à $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_7)$ en indexant $\alpha^i x_0$ par i .

L'élément α opère sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_7)$ par : $\alpha(i) = i + 1$ si $i < 6$, $\alpha(6) = 0$ et $\alpha(\infty) = \infty$. L'élément β opère par : $\beta(\infty) = \infty$, $\beta(0) = 0$; de plus $\beta \alpha = \alpha^2 \beta$ d'où $\beta(i+1) = \beta(i) + 2$ et $\beta(i) = 2i$ pour tout i . Ainsi α agit sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_7)$ comme une translation et β comme une homothétie. Soit C le sous-groupe cyclique de N engendré par β et soit M son normalisateur dans G . Comme C est un 3-Sylow cyclique de G , 2 divise $|M|$ (cf. th. 7.9). Le groupe M agit de façon non triviale sur C (cf. § 7.4) et donc il existe γ tel que $\gamma C \gamma^{-1} = C$ et $\gamma \beta \gamma^{-1} = \beta^{-1}$. Comme $\gamma \notin C$ et $\gamma \neq \alpha^n$ (car $\alpha \notin M$), γ peut être choisi d'ordre 2^n .

L'élément γ transforme une orbite de C en une orbite de C donc $\gamma(\{0, \infty\}) = \{0, \infty\}$. Or γ opère sans point fixe sur X , car sinon il serait conjugué à un élément de N , ce qui est impossible puisque $|N|$ est impair. Donc $\gamma(0) = \infty$ et $\gamma(\infty) = 0$. Comme γ^2 fixe ∞ , on a $\gamma^2 \in N$. Comme γ est d'ordre pair, on a $\gamma^2 = 1$. Donc γ permute les deux orbites $\{1, 2, 4\}$ et $\{3, 6, 5\}$. Posons $\gamma(1) = \lambda$. Alors λ est égal à 3, 6 ou 5. Comme $\gamma\beta = \beta^{-1}\gamma$, on a $\gamma(2i) \equiv \gamma(i)/2 \pmod{7}$. D'où $\gamma(i) = \lambda/i$ et γ est une homographie. D'où $\gamma \in \mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_7)$. Comme $-\lambda$ est un carré, on a

$$\gamma(i) = \frac{-\mu}{\mu^{-1}i}$$

avec $\mu^2 = -\lambda$. Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

étant égal à 1, on a $\gamma \in \mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.

Or α, β et γ engendrent G . En effet, soit G' le sous-groupe de G engendré par ces éléments. Alors G' contient N et γ (d'ordre pair). Si $G' \neq G$, alors G' est d'indice 2 ou 4 et G s'envoie dans \mathcal{A}_4 ou \mathcal{A}_2 , ce qui est impossible. Donc $G = G'$. On a un homomorphisme injectif $G \rightarrow \mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$. Comme ces deux groupes ont le même ordre, c'est un isomorphisme. \square

Annexe A

Théorie des caractères

A.1 Représentations et caractères

Soient G un groupe, K un corps et V un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps K . A partir du th. A.2, on suppose que $K = \mathbf{C}$ et que G est fini.

Définition A.1 On appelle représentation linéaire de G dans V la donnée d'un homomorphisme ρ de G dans $\mathbf{GL}(V)$. La dimension de V est appelée le degré de la représentation.

Remarques.

- (1) On définit ainsi une opération de G sur V par $s.x = \rho(s)(x)$ pour $x \in V$ et $s \in G$.
- (2) Si ρ est donné, V est appelé *espace de représentation* de G ou simplement *représentation* de G ; on écrit souvent ρ_V au lieu de ρ .

Si V_1 et V_2 sont des représentations de G associées aux homomorphismes ρ_1 et ρ_2 , on peut définir :

- La somme directe $V_1 \oplus V_2$ de V_1 et V_2 : c'est la représentation $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_1 \oplus V_2)$ telle que $\rho(s) = \rho_1(s) \oplus \rho_2(s)$. Si on choisit une base de $V = V_1 \oplus V_2$ associée à la décomposition en somme directe, la matrice associée dans cette base à $\rho(s)$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} A_1(s) & 0 \\ 0 & A_2(s) \end{pmatrix}$$

où $A_i(s)$ est la matrice associée à $\rho_i(s)$ dans la base de V_i correspondante.

- Le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$: $\rho(s)(x \otimes y) = \rho_1(s)(x) \otimes \rho_2(s)(y)$ pour tout $x \in V_1$ et tout $y \in V_2$.
 - Le dual V_1^* de V_1 : $\rho(s).l(x) = l(\rho_1(s^{-1}).x)$ pour tout $l \in V_1^*$ et tout $x \in V_1$.
 - $\text{Hom}(V_1, V_2)$ que l'on peut identifier à $V_1^* \otimes V_2$: $\rho(s).h(x) = \rho_2(s)h(\rho_1(s)^{-1}.x)$ pour tout $x \in V_1$.
- etc...

Caractère d'une représentation

Soit V un espace vectoriel muni d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et ρ une application linéaire de V dans lui-même de matrice $a = (a_{ij})$. On note $\text{Tr}(\rho) = \sum_i a_{ii}$ la trace de la matrice a

(elle est indépendante de la base choisie).

Si, maintenant V est une représentation d'un groupe fini G , on définit une fonction χ_V sur G à valeurs dans K par

$$\chi_V(s) = \text{Tr}(\rho_V(s))$$

où ρ_V est l'homomorphisme associé à la représentation V . La fonction χ_V est appelée le *caractère* de la représentation V .

Remarque. On a $\chi_V(1) = \dim V$.

Propriétés A.1

- χ_V est une fonction centrale (i.e. $\chi_V(sts^{-1}) = \chi_V(t)$ si $s, t \in G$),
- $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$,
- $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \chi_{V_2}$,
- $\chi_{V^*}(s) = \chi_V(s^{-1})$ pour tout $s \in G$,
- $\chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)}(s) = \chi_{V_1}(s^{-1}) \chi_{V_2}(s)$ pour tout $s \in G$.

On suppose désormais que $K = \mathbf{C}$ et que le groupe G est fini. Soit V une représentation de G . On pose :

$$V^G = \{x \in V \mid s.x = x, \forall s \in G\}$$

$$\text{et } \pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} s.x \text{ pour } x \in V.$$

On a $\pi(x) \in V^G$ et $\pi(x) = x$ si $x \in V^G$. Cela montre que π est un projecteur de V sur V^G . L'application π commute aux éléments de G : $\pi(s.x) = s.\pi(x)$ pour tout $s \in G$; on a donc

$$V = V^G \oplus \ker \pi.$$

Dans une base associée à cette décomposition, la matrice de π s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\text{Théorème A.2 } \dim V^G = \text{Tr}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_V(s).$$

Corollaire A.3 Soit $0 \rightarrow V' \rightarrow V \xrightarrow{f} V'' \rightarrow 0$ une suite exacte de représentations de G . Alors tout élément de V''^G est image d'un élément de V^G .

Soit $x'' \in V''^G$. La suite étant exacte, f est surjective et il existe $x \in V$ tel que $f(x) = x''$. Alors $\pi(x) \in V^G$ et $f(\pi(x)) = \pi(f(x)) = f(x) = x''$. \square

Corollaire A.4 Si V' est un sous-espace vectoriel de V , stable sous l'action de G , il existe un supplémentaire de V' dans V stable aussi sous l'action de G .

Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(V'', V') \longrightarrow \text{Hom}(V'', V) \longrightarrow \text{Hom}(V'', V'') \longrightarrow 0$$

où $V'' = V/V'$. Soit $x = \text{Id}_{V''} \in \text{Hom}(V'', V'')$; x est invariant sous l'action de G donc, d'après le cor. A.3, il existe $\varphi : V'' \rightarrow V$ invariant sous l'action de G et s'envoyant sur x . Donc φ commute avec G :

$$(s^{-1}.\varphi)(v) = \varphi(v) = s^{-1}.\varphi(sv)$$

si $v \in V''$ et $s \in G$. Donc $s.\varphi(v) = \varphi(s.v)$.

L'homomorphisme φ est une section (car $p \circ \varphi = x$ où $x = \text{Id}_{V''}$ et $p : V \rightarrow V''$ projection) donc $V = V' \oplus \text{Im } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ est stable sous l'action de G . \square

Définition A.2 Soit $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ une représentation linéaire de G . On dit qu'elle est irréductible si $V \neq 0$ et si aucun sous-espace vectoriel de V n'est stable par G , à part 0 et V .

On a alors le

Théorème A.5 Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

On raisonne par récurrence sur la dimension de la représentation V .

C'est évident si $\dim V \leq 1$. Sinon, ou bien V est irréductible, ou bien il existe un sous-espace vectoriel propre $\neq 0$ de V stable sous l'action de G donc, d'après le cor. A.4, il existe une décomposition en somme directe $V = V' \oplus V''$ avec $\dim V' < \dim V$ et $\dim V'' < \dim V$ et où V et V' sont stables par G . On applique l'hypothèse de récurrence à V' et V'' : ils sont sommes directes de représentations irréductibles donc aussi V . \square

Remarque. Il n'y a pas unicité de la décomposition : si par exemple G opère trivialement sur V , décomposer V en somme directe de représentations irréductibles revient simplement à écrire V comme somme directe de droites, ce qui peut se faire de bien des façons (si $\dim V \geq 2$).

A.2 Relations d'orthogonalité

Théorème A.6 (lemme de Schur) Soient $\rho_1 : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G et soit f un homomorphisme de V_1 dans V_2 tel que $\rho_2(s) \circ f = f \circ \rho_1(s)$ pour tout $s \in G$. Alors :

- (1) Si V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes, on a $f = 0$.
- (2) Si $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$, alors f est une homothétie.

(1) Si $x \in \ker f$, on a $f(\rho_1(s).x) = (\rho_2(s) \circ f).x = 0$ pour tout $s \in G$. Donc $\ker f$ est stable par G . Comme V_1 est irréductible, $\ker f = 0$ ou $\ker f = V_1$. Dans le premier cas f est injective, dans le second elle est nulle. De même $\text{Im } f$ est stable sous G , donc $\text{Im } f = 0$ ou V_2 . Donc si $f \neq 0$, on a $\ker f = 0$ et $\text{Im } f = V_2$: f est un isomorphisme de V_1 sur V_2 , d'où (1).

(2) Soient maintenant $V_1 = V_2$ et $\rho = \rho_1 = \rho_2$. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de f . Posons $f' = f - \lambda$; f' n'est pas injective. D'autre part $\rho(s) \circ f' = \rho(s) \circ (f - \lambda) = f' \circ \rho(s)$. Donc, d'après la première partie de la démonstration, $f' = 0$: f est une homothétie. \square

Orthogonalité des caractères

Soient f et g des fonctions sur G . On pose :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s)g(s^{-1}).$$

C'est un produit scalaire.

Remarque. Si g est un caractère, on a $g(s^{-1}) = \overline{g(s)}$, de sorte que $\langle f, g \rangle$ se réécrit comme un produit hermitien :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s)\overline{g(s)}.$$

Théorème A.7 (orthogonalité des caractères) Soient V et V' deux représentations irréductibles de caractères χ et χ' . Alors :

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } V = V' \text{ et } \chi = \chi', \\ 0 & \text{si } V \text{ et } V' \text{ ne sont pas isomorphes.} \end{cases}$$

• Considérons $W = \text{Hom}(V, V)$; c'est une représentation de G . Soit $\varphi \in W$; alors φ est fixé par G si et seulement si $\varphi \circ s = s \circ \varphi$ pour tout $s \in G$. Soit W^G l'ensemble des G -endomorphismes de V (endomorphismes fixés par G). D'après le lemme de Schur, on a $\dim W^G = 1$, donc

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_W(s),$$

d'après le th. A.2. Or $\chi_W(s) = \chi(s)\chi(s^{-1})$ donc $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

• Si V et V' ne sont pas isomorphes et si l'on pose $W = \text{Hom}(V, V')$ et W^G l'ensemble des G -homomorphismes de V dans V' , le lemme de Schur implique que $\dim W^G = 0$, d'où $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$. \square

Corollaire A.8 Les caractères des différentes représentations irréductibles de G sont \mathbb{C} -linéairement indépendants (on les appelle les caractères irréductibles de G).

Ceci va nous permettre de montrer que les caractères « caractérisent » les représentations de G .

Théorème A.9 Soit V une représentation de G , de caractère χ_V , et soit $V = \bigoplus_{i=1}^p V_i$ une décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles V_i (de caractères associés χ_{V_i}). Alors si W est irréductible de caractère χ_W , le nombre des V_i isomorphes à W est égal à $\langle \chi_V, \chi_W \rangle$.

On a :

$$\begin{aligned} \chi_V &= \sum_{i=1}^p \chi_{V_i}, \\ \langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \sum_{i=1}^p \langle \chi_{V_i}, \chi_W \rangle. \end{aligned}$$

Or d'après le théorème précédent, $\langle \chi_{V_i}, \chi_W \rangle$ vaut 1 ou 0 selon que V_i est ou n'est pas isomorphe à W . D'où le théorème. \square

Corollaire A.10

- Le nombre des V_i isomorphes à W ne dépend pas de la décomposition choisie (en ce sens, il y a unicité de la décomposition).
- Deux représentations de même caractère sont isomorphes.
- Si $(W_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les représentations irréductibles de G , toute représentation V de G est isomorphe à une somme $\bigoplus n_i W_i$ (avec la convention : $n_i W_i = W_i \oplus \dots \oplus W_i$, n_i fois) où $n_i = \langle \chi_V, \chi_{W_i} \rangle$.

A.3 Caractères et fonctions centrales

On va maintenant chercher le nombre h de représentations irréductibles (à isomorphismes près), c'est-à-dire le nombre des caractères irréductibles.

Soit \mathcal{C} le \mathbf{C} -espace vectoriel des fonctions centrales sur G (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions constantes sur chaque classe de conjugaison de G). La dimension de \mathcal{C} est égale au nombre de classes de conjugaison de G .

Théorème A.11 *Les caractères irréductibles (χ_1, \dots, χ_h) de G forment une base de \mathcal{C} (en particulier, h est le nombre de classes de conjugaison de G).*

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser le :

Lemme A.12 *Soit V une représentation irréductible de caractère χ et soit n la dimension de V (i.e. $n = \chi(1)$). Soit $f \in \mathcal{C}$ et soit π_f l'endomorphisme de V défini par :*

$$\pi_f = \sum_{s \in G} f(s^{-1}) \rho_V(s).$$

Alors π_f est une homothétie de rapport $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s^{-1}) \chi(s) = \frac{|G|}{n} \langle f, \chi \rangle$.

Si $t \in G$, on a $\pi_f.t = \sum_{s \in G} f(s^{-1}) \rho_V(st) = \sum_{s \in G} f(u^{-1}) \rho_V(tu)$ (avec $u = t^{-1}st$), puisque f est centrale. Donc $\pi_f.t = t.\pi_f$. D'après le th. A.6, π_f est une homothétie et

$$\text{Tr}(\pi_f) = n\lambda = \sum_{s \in G} f(s^{-1}) \chi(s),$$

d'où $\lambda = \frac{|G|}{n} \langle f, \chi \rangle$. □

On en déduit la démonstration du th. A.11 : si les (χ_i) ne forment pas une base de \mathcal{C} , il existe $f \in \mathcal{C}$ non nulle et orthogonale aux χ_i . Donc par le lemme ci-dessus π_f est nulle pour toute représentation irréductible, donc (par décomposition en somme directe) pour toute représentation. On va calculer π_f pour une représentation particulière : soit V un espace de dimension $|G|$, muni d'une base $(e_s)_{s \in G}$. Soit ρ l'opération de G sur V définie par :

$$\rho(s).e_t = e_{st}.$$

La représentation ainsi définie est dite *représentation régulière* de G (son caractère se note r_G et on a $r_G(s) = 0$ si $s \neq 1$ et $r_G(1) = |G|$). Calculons π_f pour cette représentation. On a $\pi_f = \sum_{s \in G} f(s^{-1}) \rho(s)$ donc $\pi_f(e_1) = \sum_{s \in G} f(s^{-1}) e_s$ (car $e_{1.s} = e_s$). Si π_f est

nulle, alors $f(s^{-1}) = 0$ pour tout $s \in G$ donc f est nulle (les $(e_s)_{s \in G}$ forment une base) ce qui contredit l'hypothèse. \square

Remarque. Chaque représentation irréductible W est contenue n fois dans la représentation régulière (avec $n = \dim W$). En effet, si χ est le caractère de W , on a :

$$\langle r_G, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s^{-1})\chi(s) = \chi(1) = \dim W.$$

Donc $r_G = \sum_{i=1}^h \chi_i(1)\chi_i$ avec χ_i irréductible. En particulier,

$$r_G(1) = |G| = \sum_{i=1}^h \chi_i(1)\chi_i(1)$$

d'où

$$|G| = \sum_{i=1}^h n_i^2$$

avec $n_i = \chi_i(1)$.

A.4 Exemples de caractères

On va déterminer les caractères irréductibles des groupes \mathcal{A}_n ou \mathcal{S}_n pour $n \leq 4$.

(1) Dans le cas trivial $\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{1\}$, il y a un seul caractère irréductible : $\chi = 1$.

(2) Dans le cas où le groupe est $\mathcal{S}_2 = \{1, s\}$ (avec $s^2 = 1$), tout caractère irréductible est de degré 1 (par exemple car $|\mathcal{S}_2| = 2 = \sum n_i^2$ où n_i est le degré de χ_i irréductible). On a deux caractères irréductibles :

	1	s
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

(3) Le groupe $\mathcal{A}_3 = \{1, t, t^2 \mid t^3 = 1\}$ est cyclique d'ordre 3. On a $|\mathcal{A}_3| = 3 = \sum n_i^2$ d'où trois représentations irréductibles de degré 1. Elles sont données par leurs caractères :

	1	t	t ²
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ρ	ρ^2
χ_3	1	ρ^2	ρ

où ρ est une racine cubique de l'unité $\neq 1$.

(4) Le groupe symétrique \mathcal{S}_3 est le groupe diédral \mathcal{D}_3 . On a trois classes de conjugaison $1, s, t$ avec $s^2 = 1, t^3 = 1$ et $sts^{-1} = t^{-1}$. Deux caractères irréductibles de degré 1 sont donnés par 1 et la signature. D'autre part $\chi_1 + \chi_2 + n_3\chi_3 = r_{\mathcal{S}_3}$ et $\sum n_i^2 = |\mathcal{S}_3| = 6 = 2 + n_3^2$ donc $n_3 = 2$ et χ_3 est de degré 2.

Ensuite,

$$(\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3)(s) = r_{\mathcal{S}_3}(s) = 0,$$

donc $\chi_3(s) = 0$, et de même

$$(\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3)(t) = r_{\mathcal{S}_3}(t) = 0,$$

donc $\chi_3(t) = -1$. On a donc :

	1	s	t
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

On peut trouver χ_3 directement en réalisant \mathcal{S}_3 comme groupe de symétries d'un triangle équilatéral. Alors s s'interprète comme symétrie par rapport à une droite, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc de trace nulle, et t comme rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dont la trace est $2\cos(\frac{2\pi}{3}) = -1$.

(5) Le groupe \mathcal{A}_4 est d'ordre 12. On a quatre classes de conjugaison de représentants $1, s, t, t'$ où s est d'ordre 2 ($s = (a, b)(c, d)$), t d'ordre 3 ($t = (a, b, c)$) et $t' = t^2$. On a déjà les trois représentations du quotient d'ordre 3 de \mathcal{A}_4 . Puis $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + n_4\chi_4 = r_{\mathcal{A}_4}$ et $\sum n_i^2 = |\mathcal{A}_4| = 12$. D'où la table de caractères :

	1	s	t	t'
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ρ	ρ^2
χ_3	1	1	ρ^2	ρ
χ_4	3	-1	0	0

On peut trouver χ_4 directement en regardant \mathcal{A}_4 comme un groupe de symétries d'un tétraèdre régulier. Alors s s'interprète comme la symétrie par rapport à une droite joignant les milieux de deux côtés opposés : sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans une base convenable, donc sa trace est -1 . D'autre part, t s'interprète comme permutation circulaire donc sa trace est nulle.

Un autre argument permet de retrouver ce résultat : si W est une représentation irréductible de dimension 1 et si V est irréductible, alors $V \otimes W$ est irréductible. En particulier, $\chi_4\chi_2$ est irréductible et donc égal à χ_4 (pour des raisons de degré). D'où $\chi_4(t) = \chi_4(t') = 0$.

Exercice. On peut donner de même la table des caractères du groupe \mathcal{S}_4 . Il y a cinq classes de conjugaison $1, \sigma, s, t, \tau$ avec $\sigma = (a, b)$, $s = (a, b)(c, d)$, $t = (a, b, c)$ et $\tau = (a, b, c, d)$. On trouve :

	1	σ	s	t	τ
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

A.5 Propriétés d'intégralité

Soit G un groupe fini, soit ρ une représentation de G et soit χ son caractère.

Proposition A.13 *Les valeurs de χ sont des entiers algébriques.*

[On rappelle qu'un nombre complexe x est un *entier algébrique* s'il existe un entier $n > 0$ et des éléments $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{Z}$ tels que :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

L'ensemble des entiers algébriques forme un sous-anneau de \mathbf{C} .]

Démonstration. Le groupe G étant fini, il existe un entier $p > 0$ tel que $s^p = 1$ pour tout $s \in G$. Donc $\rho(s^p) = \rho(s)^p = 1$ pour tout s . Si λ est une valeur propre de $\rho(s)$, alors λ^p est une valeur propre de $\rho(s)^p$, donc $\lambda^p = 1$. Toute valeur propre de $\rho(s)$ est un entier algébrique, or $\chi(s)$ est la trace de $\rho(s)$ donc la somme des valeurs propres de $\rho(s)$: c'est aussi un entier algébrique. \square

Remarque. Pour tout $s \in G$, $\rho(s)$ est diagonalisable. En effet, ρ est une application de G dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ et la matrice de $\rho(s)$, pour tout $s \in G$, est semblable à une matrice de Jordan J_s , décomposable en blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & \times \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alors $\rho(s)^p$ est semblable à une matrice décomposable en blocs

$$\begin{pmatrix} \lambda^p & p & \cdots & \times \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & p \\ & & & \lambda^p \end{pmatrix}.$$

Or $\rho(s)^p = 1$, ceci n'est possible que si J_s est en fait diagonale, d'où le résultat.

[Variante : appliquer le th. A.5 au groupe cyclique engendré par s .]

On va montrer comment la connaissance des caractères d'un groupe donne des renseignements sur ce groupe. Tout d'abord :

Proposition A.14 *Soit G un groupe distinct de $\{1\}$. Alors G est simple si et seulement si, pour tout $s \in G - \{1\}$ et tout caractère χ irréductible et distinct de 1, on a :*

$$\chi(s) \neq \chi(1).$$

Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs propres de $\rho(s)$. On sait que les λ_i sont des racines de l'unité, donc que $|\lambda_i| = 1$. Comme $\chi(s) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et $\chi(1) = n$, on a $\chi(s) = \chi(1) = n$ si et

seulement si $\lambda_i = 1$ pour tout i^1 . Donc $\chi(s) = n$ si et seulement si $s \in \ker \rho$.

Supposons maintenant que G soit simple. Alors $\ker \rho$ est un sous-groupe normal de G , c'est donc $\{1\}$ ou G . Donc si $\chi(s) = \chi(1)$ pour un $s \in G - \{1\}$ alors $\rho = \text{Id}$ et donc $\chi = 1$. Réciproquement, si G n'est pas simple, soit N un sous-groupe normal non trivial de G . Soit χ' un caractère non trivial de G/N associé à la représentation ρ' . Alors

$$G \longrightarrow G/N \xrightarrow{\rho'} \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$$

définit une représentation ρ de G de caractère $\chi \neq 1$ et telle qu'il existe $s \in G - \{1\}$ avec $\chi(s) = \chi(1)$. \square

On va maintenant généraliser la prop. A.13 :

Théorème A.15 *Soit ρ une représentation irréductible d'un groupe G , de caractère associé χ . Soit f une fonction centrale sur G , dont les valeurs sont des entiers algébriques. Posons $n = \chi(1)$. Alors $n^{-1} \sum_{s \in G} f(s)\chi(s)$ est un entier algébrique.*

Il suffit de démontrer le théorème pour les fonctions valant 1 sur une classe de conjugaison et 0 ailleurs. Soit $s \in G$; notons $Cl(s)$ la classe de conjugaison de s et $c(s)$ le cardinal de $Cl(s)$. Soit f_s la fonction définie sur G , valant 1 sur $Cl(s)$ et 0 ailleurs. On a :

$$\frac{1}{n} \sum_{t \in G} f_s(t)\chi(t) = \frac{1}{n} \sum_{t \in Cl(s)} \chi(t) = \frac{c(s)\chi(s)}{n}$$

car χ est centrale. Il suffit donc de démontrer le :

Théorème A.16 *Avec les hypothèses du th. A.15 et les notations ci-dessus, $\frac{c(s)\chi(s)}{n}$ est un entier algébrique pour tout $s \in G$.*

Soit X l'ensemble des fonctions centrales sur G à valeurs dans \mathbf{Z} . C'est un \mathbf{Z} -module libre, engendré par les f_s . Il y a sur X une structure d'anneau naturelle, la *convolution*, définie par $f, g \mapsto f * g$ avec

$$f * g(s) = \sum_{uv=s} f(u)g(v).$$

On vérifie que l'anneau X est associatif et commutatif, et a pour élément unité la « fonction de Dirac » f_1 .

Si $f \in X$, on lui associe l'endomorphisme $\rho(f) = \sum f(s)\rho(s)$. D'après le lemme A.12, $\rho(f)$ est une homothétie, i.e. appartient à \mathbf{C} . On obtient ainsi une application $\tilde{\rho} : X \rightarrow \mathbf{C}$, qui est un homomorphisme d'anneaux (en vertu de la formule $\rho(f * f') = \rho(f) \cdot \rho(f')$). L'image $\tilde{\rho}(X)$ de X est donc un sous-anneau de \mathbf{C} qui est un \mathbf{Z} -module de type fini. On déduit de là, par un argument standard, que les éléments de cet anneau sont des entiers algébriques. Comme $\frac{c(s)\chi(s)}{n}$ est égal à $\tilde{\rho}(f_s)$, le théorème en résulte. \square

Corollaire A.17 *Le degré de la représentation ρ divise l'ordre du groupe.*

En effet, soit $n = \chi(1)$ et soit f définie sur G par $f(s) = \chi(s^{-1})$. Alors f vérifie les hypothèses du th. A.15, donc $n^{-1} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1})\chi(s)$ est un entier algébrique. Or $n^{-1} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1})\chi(s) = |G|/n$ donc est dans \mathbf{Q} . Les seuls éléments de \mathbf{Q} qui soient entiers sur \mathbf{Z} sont les éléments de \mathbf{Z} , donc n divise $|G|$. \square

¹ On utilise le résultat élémentaire suivant : si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ sont de module 1, et si $|\alpha_1 + \dots + \alpha_n| = n$, alors $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$.

Corollaire A.18 *Soit χ un caractère irréductible de degré n d'un groupe G et soit $s \in G$. Si $c(s)$ et n sont premiers entre eux, alors $\frac{\chi(s)}{n}$ est un entier algébrique. De plus, si $\chi(s) \neq 0$, alors $\rho(s)$ (associé à $\chi(s)$) est une homothétie.*

Si $c(s)$ et n sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux éléments $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $ac(s) + bn = 1$. Donc :

$$\frac{\chi(s)}{n} = \frac{ac(s)\chi(s)}{n} + b\chi(s).$$

Or $\chi(s)$ est un entier algébrique par la prop. A.13 et $\frac{c(s)\chi(s)}{n}$ aussi par le th. A.16. Cela démontre la première assertion du corollaire. Pour la seconde, nous utiliserons le :

Lemme A.19 *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des racines de l'unité. Si $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/n$ est un entier algébrique, alors, soit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, soit tous les λ_i sont égaux.*

Démonstration du lemme. Si λ est une racine de l'unité, son équation intégrale minimale est de la forme $x^p - 1 = 0$, donc tout conjugué de λ est aussi racine de l'unité [rappel : si $z \in \mathbf{C}$ est un nombre algébrique, on appelle conjugué de z toute racine de l'équation minimale de z]. Soit $z = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/n$; alors z est un entier algébrique par hypothèse et tout conjugué z' de z s'écrit $(\lambda'_1 + \dots + \lambda'_n)/n$ où les λ'_i sont des racines de l'unité. Donc $|z'| \leq 1$. Notons Z le produit de tous les conjugués de z . Alors $|Z| \leq 1$. D'autre part Z est rationnel (c'est le terme constant, au signe près, du polynôme minimal de z). Enfin Z est entier algébrique (comme produit d'entiers algébriques) donc $Z \in \mathbf{Z}$. Si $Z = 0$, l'un des conjugués de z est nul donc $z = 0$; si $|Z| = 1$, tous les conjugués de z ont 1 comme module, donc $|z| = 1$ et tous les λ_i sont égaux, puisque leur somme est de module n (cf. note 1 à la prop. A.14). \square

Revenons à la seconde assertion du corollaire. Soient (λ_i) les valeurs propres de $\rho(s)$; ce sont des racines de l'unité et $\chi(s) = \text{Tr}(\rho(s)) = \sum \lambda_i$. On conclut avec le lemme. \square

A.6 Application : théorème de Burnside

On reprend les notations du § précédent.

Théorème A.20 *Soient s un élément de $G - \{1\}$ et p un nombre premier. Supposons que $c(s)$ (= nombre d'éléments de G conjugués à s) soit une puissance de p . Alors il existe un sous-groupe normal N de G , distinct de G , tel que l'image de s dans G/N appartienne au centre de G/N .*

Soit r_G le caractère de la représentation régulière (cf. § A.3). On a $r_G(s) = 0$ car $s \neq 1$. D'autre part, $r_G = \sum n_\chi \chi$ (où l'on somme sur l'ensemble des caractères irréductibles) avec $n_\chi = \chi(1)$. Donc $\sum \chi(1)\chi(s) = 0$ ou encore $1 + \sum_{\chi \neq 1} \chi(1)\chi(s) = 0$ et donc $\sum_{\chi \neq 1} \frac{\chi(1)\chi(s)}{p} = -\frac{1}{p}$; or $-\frac{1}{p}$ n'est pas un entier algébrique. Donc il existe un caractère χ irréductible et distinct de 1 tel que $\frac{\chi(1)\chi(s)}{p}$ ne soit pas un entier algébrique. En particulier, $\chi(s) \neq 0$ et p ne divise pas $\chi(1)$, donc $c(s)$ et $\chi(1)$ sont premiers entre eux. D'après le cor. A.18, si ρ est la représentation de G attachée à χ , $\rho(s)$ est une homothétie. Soit alors $N = \ker \rho$; le groupe N est un sous-groupe de G , normal et distinct de G . D'autre part,

G/N s'identifie à l'image de ρ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$, or s s'envoie par ρ sur une homothétie, donc dans le centre de G/N . \square

On va en déduire le :

Théorème A.21 (Burnside) *Tout groupe G d'ordre $p^\alpha q^\beta$ (où p et q sont des nombres premiers) est résoluble.*

On suppose α et β non nuls (sinon G est nilpotent). On va démontrer le théorème par récurrence sur $|G|$.

Il existe $s \in G - \{1\}$ tel que q ne divise pas $c(s)$. En effet, $G = \{1\} \cup \{Cl(s)\}$ où les $Cl(s)$ sont les classes de conjugaison autres que 1. Donc $|G| = 1 + \sum |Cl(s)| = 1 + \sum c(s)$. Comme q divise $|G|$, il existe s tel que q ne divise pas $c(s)$. Or $c(s)$ divise $|G|$, donc $c(s)$ est une puissance de p . D'après ce qui précède, il existe un sous-groupe normal N de G , distinct de G , tel que l'image de s dans G/N soit dans le centre de G/N . Si $N \neq \{1\}$, l'hypothèse de récurrence appliquée à N et à G/N montre qu'ils sont résolubles ; donc G est résoluble. Si $N = \{1\}$, le centre C de G est non trivial puisqu'il contient s ; on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à C et à G/C : G est résoluble. \square

A.7 Démonstration du théorème de Frobenius

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G « ne rencontrant pas ses conjugués », c'est-à-dire tel que :

$$H \cap gHg^{-1} = \{1\}$$

pour tout $g \in G - H$, cf. § 6.2.

Théorème A.22 (Frobenius) *Soit $N = \{1\} \cup \{G - \bigcup_{g \in H} gHg^{-1}\}$. Alors N est un sous-groupe normal de G ; de plus G est produit semi-direct de H par N .*

La démonstration consiste à montrer que les représentations linéaires de H se prolongent à G tout entier. Tout d'abord :

Lemme A.23 *Soit f une fonction centrale sur H . Il existe une fonction centrale \tilde{f} sur G , et une seule, qui satisfait aux deux propriétés suivantes :*

- (1) \tilde{f} prolonge f (i.e. $\tilde{f}(h) = f(h)$ si $h \in H$),
- (2) $\tilde{f}(x) = f(1)$ si $x \in N$ (i.e. \tilde{f} est constante sur N).

C'est immédiat : si $x \notin N$, on écrit x sous la forme ghg^{-1} , avec $g \in G$, $h \in H$, et l'on pose $\tilde{f}(x) = f(h)$; cela ne dépend pas du choix de g, h car si $g'h'g'^{-1} = ghg^{-1}$, on a $g'^{-1}ghg^{-1}g' = h'$, donc $h = h' = 1$ ou bien $g'^{-1}g \in H$; donc h et h' sont conjugués dans H , et, comme f est centrale, on a $f(h) = f(h')$. \square

Dans l'énoncé suivant, on utilise la notation $\langle \alpha, \beta \rangle_G$ pour désigner le produit scalaire $\frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \alpha(s^{-1})\beta(s)$ relatif au groupe G . De même $\langle \alpha, \beta \rangle_H$ désigne le produit scalaire relatif à H . Si F est une fonction sur G , on note F_H sa restriction à H .

Lemme A.24 *Soient f et \tilde{f} comme dans le lemme précédent, et soit θ une fonction centrale sur G . On a*

$$\langle \tilde{f}, \theta \rangle_G = \langle f, \theta_H \rangle_H + f(1)\langle 1, \theta \rangle_G - f(1)\langle 1, \theta_H \rangle_H. \tag{A.1}$$

Démontrons cette égalité. Elle est vraie pour $f = 1$ car alors $\tilde{f} = 1$. Par linéarité, il suffit donc de vérifier (A.1) pour les fonctions f telles que $f(1) = 0$. Soit alors \mathcal{R} un système de représentants des classes à gauche modulo H : les différents conjugués de H sont les rHr^{-1} pour r décrivant \mathcal{R} et tout conjugué d'un élément de H (distinct de 1) s'écrit de façon unique rhr^{-1} avec $r \in \mathcal{R}$ et $h \in H$. Cela dit,

$$\langle \tilde{f}, \theta \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \tilde{f}(s^{-1})\theta(s)$$

et \tilde{f} est nulle en dehors des conjugués d'éléments de H ; donc

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \theta \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{(r,h) \in \mathcal{R} \times H} \tilde{f}(h^{-1})\theta(h) \\ &= \langle f, \theta_H \rangle_H \end{aligned}$$

puisque $|G| = |H| \cdot |\mathcal{R}|$. □

Cas particulier : si $\theta = 1$, on a $\langle \tilde{f}, 1 \rangle_G = \langle f, 1 \rangle_G$. L'application $f \mapsto \tilde{f}$ est donc une isométrie, autrement dit : $\langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle_G = \langle f_1, f_2 \rangle_H$. En effet,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \tilde{f}_1(s^{-1})f_2(s) = \langle f_1^* \tilde{f}_2, 1 \rangle_G$$

où l'on a posé $f_1^*(s) = f_1(s^{-1})$, et

$$\langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle_G = \langle \tilde{f}_1^* \tilde{f}_2, 1 \rangle_G = \langle f_1^* f_2, 1 \rangle_H = \langle f_1, f_2 \rangle_H$$

car $\widetilde{f_1 f_2} = \tilde{f}_1 \tilde{f}_2$. On en déduit :

Proposition A.25 *Si χ est un caractère de H et θ un caractère de G , alors $\langle \tilde{\chi}, \theta \rangle_G$ est un entier.*

Il suffit de montrer que dans (A.1) tous les termes du membre de droite sont dans \mathbf{Z} , ce qui est clair. □

Soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ les différents caractères irréductibles de G ; on a $\tilde{\chi} = \sum c_i \theta_i$ avec $c_i \in \mathbf{Z}$ pour tout i d'après ce qui précède.

Proposition A.26 *Supposons χ irréductible. Alors tous les c_i sont nuls, sauf l'un d'eux qui est égal à 1.*

(Autrement dit $\tilde{\chi}$ est un caractère irréductible de G .)

En effet, $\langle \tilde{\chi}, \tilde{\chi} \rangle_G = \langle \chi, \chi \rangle_H = 1 = \sum c_i^2$ donc tous les c_i sont nuls sauf un, soit c_{i_0} , dont le carré est 1. Si c_{i_0} était égal à -1 , on aurait $\tilde{\chi} = -\theta_{i_0}$. Or $\tilde{\chi}(1) = \chi(1) > 0$ et $\theta_{i_0}(1) > 0$, donc c'est impossible. Donc $c_{i_0} = 1$, i.e. $\tilde{\chi} = \theta_{i_0}$. □

Corollaire A.27 *Si χ est un caractère de H , alors $\tilde{\chi}$ est un caractère de G .*

Cela résulte de la proposition, en décomposant χ comme somme de caractères irréductibles. \square

Démontrons maintenant le th. A.22. Choisissons une représentation ρ de H de noyau trivial, par exemple la représentation régulière. Soit χ le caractère de ρ et soit $\tilde{\rho}$ une représentation de G de caractère $\tilde{\chi}$, cf. cor. A.27. Si s est conjugué à un élément de $H - \{1\}$, on a $\tilde{\rho}(s) \neq 1$. D'autre part, si $s \in N$, on a $\tilde{\chi}(s) = \chi(1) = \tilde{\chi}(1)$, d'où $\tilde{\rho}(s) = 1$, cf. démonstration de la prop. A.14. On a donc $N = \ker \tilde{\rho}$, ce qui montre que N est un sous-groupe normal de G . \square

Bibliographie

- [1] N. Bourbaki, *Algèbre. Chapitre I. Structures algébriques*, Nouvelle édition, Hermann, 1970.
- [2] N. Bourbaki, *Algèbre. Chapitre VIII. Modules et anneaux semi-simples*, Hermann, 1958.
- [3] J. Cassels et A. Fröhlich (édit.), *Algebraic Number Theory*, Acad. Press, 1967.
- [4] W. Feit, *Characters of Finite Groups*, Benjamin, 1967.
- [5] M. Hall, *The Theory of Groups*, Macmillan, 1959.
- [6] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, 1967.
- [7] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W.H. Freeman and Co, 1974.
- [8] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965 ; Troisième édition, 1993.
- [9] S. Lang, *Rapport sur la cohomologie des groupes*, Benjamin, 1966 ; trad. anglaise : LN 1625.
- [10] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, 1968.
- [11] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Cinquième édition, Hermann, 1998.
- [12] J. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, McGraw-Hill, 1967.
- [13] H. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, Deuxième édition, Vandenhoeck and Ruprecht, 1956.

Mode d'emploi

- Groupes résolubles et nilpotents, p -groupes et théorèmes de Sylow : [1], [5], [6], [7], [8], [13].
- Applications à la théorie de Galois : [7].
- Extensions, systèmes de facteurs et cohomologie : [3], [6], [9], [10], [13].
- Théorèmes de Hall : [5], [6].
- Groupes de Frobenius : [4], [6] (pour la structure des groupes de type \mathcal{F} , voir [12]).
- Transfert : [6], [9], [10], [13] (voir aussi I. Schur, *Gesam. Abh.*, vol. 1, p.79).
- Représentations et caractères : [2], [4], [6], [8], [11] (voir aussi F.G. Frobenius, *Gesam. Abh.*, vol.3, et I. Schur, *Gesam. Abh.*, vol.1).

Index

action (de groupe $-$) : 1.1
Alperin (théorème d' $-$) : 2.14
Burnside (théorèmes de $-$) : 2.4, 5.1, A.6
caractère (d'une représentation) : A.1
caractéristique (sous-groupe $-$) : 1.2
Cauchy (théorème de $-$) : 2.2
centrale (fonction $-$) : A.3
centralisateur (d'un élément) : 1.1
centre (d'un groupe) : 1.2
Chebotarev-Frobenius (théorème de $-$) : 6.1
classe (de conjugaison) : 1.1
classe (de nilpotence d'un groupe) : 3.3
— (de résolubilité d'un groupe) : 3.1
cobord : 4.1
cochaîne : 4.1
cocycle : 4.1
cohomologie : 4.1
commutateur : 3.1
commutateurs (groupe des $-$) : 3.1
couple de Frobenius : 6.2
degré (d'une représentation linéaire) : A.1
dérivé (groupe $-$) : 3.1
descendante (suite centrale $-$) : 3.2
drapeau complet : 3.1
élémentaire (p -groupe abélien $-$) : 3.6
entier algébrique : A.5
extension : 4.2
Feit-Thompson (théorème de $-$) : 3.1
filtration : 1.3
fixateur : 1.1
Frattni (sous-groupe de $-$) : 3.6
— (théorème de $-$) : 2.3
Frobenius (théorème de $-$) : 6.2, A.7
fusion : 2.4
Gauss (lemme de $-$) : 7.3.1
gradué : 1.3
Hall (sous-groupe de $-$) : 5.1
— (théorème de $-$) : 5.1

homomorphisme croisé : 4.1
image réciproque (d'une extension) : 4.5
invariant (sous-groupe $-$) : 1.2
Jordan (théorème de $-$) : 6.1
Jordan-Hölder (suite de $-$, théorème de $-$) : 1.3
Kolchin (théorème de $-$) : 3.3
localement conjugués (éléments $-$) : 2.4
maximal (sous-groupe $-$) : 3.6
Miller-Wielandt (démonstration de $-$) : 2.2.2
minimal (groupe simple $-$) : 3.6
nilpotent (groupe $-$) : 3.3
normal (sous-groupe $-$) : 1.2
normalisateur (d'un sous-groupe) : 1.2
orbite : 1.1
orthogonalité (de caractères) : A.2
 p -complément : 5.6
 p -groupe : 2.1
 p -Sylow : 2.1
permutable (système $-$ de sous-groupes de Sylow) : 5.3
permutables (sous-groupes $-$) : 5.2
 Π -sous-groupe : 5.1
 Π -Sylow : 5.1
primitive (action $-$) : 3.6
propriété \mathcal{F} : 6.4
régulière (représentation $-$) : A.3
relèvement (d'un homomorphisme) : 4.5
représentation (linéaire) : A.1
résoluble (groupe $-$) : 3.1
sans point fixe (action $-$) : 6.4
Schur (lemme de $-$) : A.2
 $-$ (théorème de $-$) : 7.1
section : 4.2
semi-direct (produit $-$) : 4.2, 4.4
simple (groupe $-$) : 1.2
stabilisateur : 1.1
Stallings-Swan (théorèmes de $-$) : 7.3.2
suite centrale descendante : 3.2
Sylow (théorèmes de $-$) : 2.2, 2.3
Thompson (théorèmes de $-$) : 3.6, 6.3
transfert : 7.1
transitive (action $-$) : 1.1
triviale (extension $-$) : 4.2
Wedderburn (théorème de $-$) : 6.1
Wielandt (théorème de $-$) : 5.5
Zassenhaus (théorème de $-$) : 4.4