Introduction aux formes modulaires

Nicolas Billerey

Laboratoire de mathématiques Blaise Pascal
Université Clermont Auvergne

Mardi 27 mars 2018

Un petit calcul. . .

On calcule les produits

$$(1 - x)(1 - x^2) = 1 - x - x^2 + x^3$$

Un petit calcul...

On calcule les produits

$$(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3$$
$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$$

Un petit calcul...

On calcule les produits

$$\begin{aligned}
(1-x)(1-x^2) &= 1-x-x^2+x^3\\
(1-x)(1-x^2)(1-x^3) &= 1-x-x^2+x^4+x^5-x^6\\
(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) &= 1-x-x^2+x^4+2x^5-x^8-x^9+x^{10}
\end{aligned}$$

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$
\begin{array}{lllllllll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 & & & & & & & \\
(n=3) & 1-x-x^2 & +x^4 & +x^5 & -x^6 & & & & \\
(n=4) & 1-x-x^2 & & +2x^5 & & & -x^8 & -x^9 & +x^{10}
\end{array}
$$

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2 \qquad\quad +x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2 \qquad\qquad\qquad +2x^5 \qquad\qquad\quad -x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2 \qquad\qquad\qquad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\dots
\end{array}$$

. . .de plus en plus loin. . .

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$
\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2+x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2+x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\ldots \\
(n=6) & 1-x-x^2+x^5+2x^7-x^9-x^{10}\ldots
\end{array}
$$

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2 \quad +x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2 \quad +2x^5 \quad -x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2 \quad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\dots \\
(n=6) & 1-x-x^2 \quad +x^5 \quad +2x^7 \quad -x^9-x^{10}\dots \\
(n=7) & 1-x-x^2 \quad +x^5 \quad +x^7+x^8 \quad -x^{10}\dots
\end{array}$$

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$
\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2 \qquad +x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +2x^5 \qquad\qquad -x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\dots \\
(n=6) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +2x^7 \qquad -x^9-x^{10}\dots \\
(n=7) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7+x^8 \qquad -x^{10}\dots \\
(n=8) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad +x^9 \qquad \dots
\end{array}
$$

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$
\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2 \qquad +x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +2x^5 \qquad\qquad -x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\dots \\
(n=6) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +2x^7 \qquad -x^9-x^{10}\dots \\
(n=7) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7+x^8 \qquad -x^{10}\dots \\
(n=8) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad +x^9 \qquad \dots \\
(n=9) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad\qquad +x^{10}\dots
\end{array}
$$

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2+x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2+x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\ldots \\
(n=6) & 1-x-x^2+x^5+2x^7-x^9-x^{10}\ldots \\
(n=7) & 1-x-x^2+x^5+x^7+x^8-x^{10}\ldots \\
(n=8) & 1-x-x^2+x^5+x^7+x^9\ldots \\
(n=9) & 1-x-x^2+x^5+x^7+x^{10}\ldots \\
(n=10) & 1-x-x^2+x^5+x^7\ldots
\end{array}$$

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2 \qquad +x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +2x^5 \qquad\qquad -x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\dots \\
(n=6) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +2x^7 \qquad -x^9-x^{10}\dots \\
(n=7) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7+x^8 \qquad -x^{10}\dots \\
(n=8) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad +x^9 \qquad \dots \\
(n=9) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad\qquad +x^{10}\dots \\
(n=10) & 1-x-x^2 \qquad\qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad\qquad\qquad \dots
\end{array}$$

- Les termes se stabilisent : le produit infini a donc un sens.

...de plus en plus loin...

Que vaut $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$?

$$
\begin{array}{ll}
(n=2) & 1-x-x^2+x^3 \\
(n=3) & 1-x-x^2 \qquad +x^4+x^5-x^6 \\
(n=4) & 1-x-x^2 \qquad +2x^5 \qquad -x^8-x^9+x^{10} \\
(n=5) & 1-x-x^2 \qquad +x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}\cdots \\
(n=6) & 1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +2x^7 \qquad -x^9-x^{10}\cdots \\
(n=7) & 1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +x^7+x^8 \qquad -x^{10}\cdots \\
(n=8) & 1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad +x^9 \qquad \cdots \\
(n=9) & 1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad +x^{10}\cdots \\
(n=10) & 1-x-x^2 \qquad +x^5 \qquad +x^7 \qquad \cdots
\end{array}
$$

- Les termes se stabilisent : le produit infini a donc un sens.
- Il y a beaucoup d'annulations : tous les coefficients valent -1, 0 ou 1.

. . .jusqu'à l'infini !

On obtient, formellement,

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \dots$$

. . .jusqu'à l'infini !

On obtient, formellement,

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22}$$
$$+ x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros (et quelques signes $-$ et $+$).

...jusqu'à l'infini !

On obtient, formellement,

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22}$$
$$+ x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \dots$$

- Il y a beaucoup de zéros (et quelques signes $-$ et $+$).
- On a toujours deux signes $-$ suivis de deux signes $+$.

...jusqu'à l'infini !

On obtient, formellement,

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22}$$
$$+ x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \dots$$

- Il y a beaucoup de zéros (et quelques signes $-$ et $+$).
- On a toujours deux signes $-$ suivis de deux signes $+$.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ 70,\ 77, \dots$$

...jusqu'à l'infini !

On obtient, formellement,

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \dots$$

- Il y a beaucoup de zéros (et quelques signes $-$ et $+$).
- On a toujours deux signes $-$ suivis de deux signes $+$.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ 70,\ 77, \dots$$

...jusqu'à l'infini !

On obtient, formellement,

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22}$$
$$+ x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \dots$$

- Il y a beaucoup de zéros (et quelques signes $-$ et $+$).
- On a toujours deux signes $-$ suivis de deux signes $+$.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ 70,\ 77, \dots$$

Ça vous dit quelque chose ?

...jusqu'à l'infini !

On obtient, formellement,

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22}$$
$$+ x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \ldots$$

- Il y a beaucoup de zéros (et quelques signes $-$ et $+$).
- On a toujours deux signes $-$ suivis de deux signes $+$.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ 70,\ 77, \ldots$$

Ça vous dit quelque chose ? Pas évident...

Nombres pentagonaux

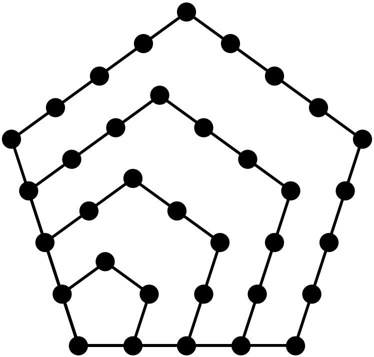
$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ 70,\ 77, \ldots$ est la suite A001318 de l'On-line Encyclopedia of Integer Sequences, celle des *nombres pentagonaux généralisés* :

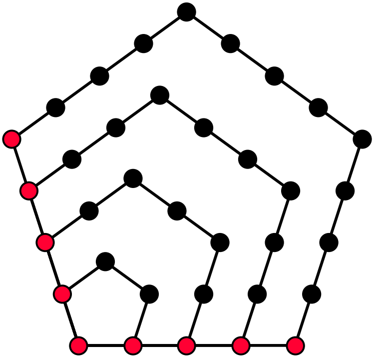
$$\frac{3n^2 - n}{2}, \quad n = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots$$

Nombres pentagonaux

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, ... est la suite A001318 de l'On-line Encyclopedia of Integer Sequences, celle des *nombres pentagonaux généralisés* :

$$\frac{3n^2 - n}{2}, \quad n = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots$$





$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}.$$

Théorème des nombres pentagonaux (Euler, 1707-1783) :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}.$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$5 = 5$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \end{aligned}$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4 + 1 \\
&= 3 + 2
\end{aligned}
$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4 + 1 \\
&= 3 + 2 \\
&= 3 + 1 + 1 \\
&= 2 + 2 + 1
\end{aligned}
$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1
\end{aligned}$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

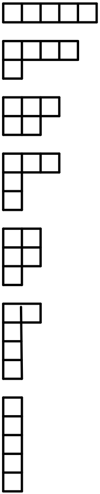
$$p(5) = 7$$

Fonction de partition

On note $p(n)$ le nombre de façons (à l'ordre près) d'écrire un entier $n \geq 1$ comme somme d'entiers naturels non nuls.

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

$$p(5) = 7$$



De la fonction de partition à la fonction Φ d'Euler

On pose

$$P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 \cdots$$

De la fonction de partition à la fonction Φ d'Euler

On pose

$$P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 \cdots$$

On vérifie que l'on a

$$\Phi(x)P(x) = 1.$$

De la fonction de partition à la fonction Φ d'Euler

On pose

$$P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 \cdots$$

On vérifie que l'on a

$$\Phi(x)P(x) = 1.$$

Le théorème des nombres pentagonaux fournit alors la formule de récurrence (où $p(k) = 0$ si $k < 0$ et $p(0) = 1$) :

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \\ + p(n-12) + p(n-15) \cdots$$

De la fonction de partition à la fonction Φ d'Euler

On pose

$$P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 \cdots$$

On vérifie que l'on a

$$\Phi(x)P(x) = 1.$$

Le théorème des nombres pentagonaux fournit alors la formule de récurrence (où $p(k) = 0$ si $k < 0$ et $p(0) = 1$) :

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \\ + p(n-12) + p(n-15) \cdots$$

Ainsi, on a par exemple

$$\begin{aligned} p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) \\ &= 3p(5) + 2p(4) - p(3) - p(2) - 3p(1) - p(0) \\ &= 3 \times 7 + 2 \times 5 - 3 - 2 - 3 \times 1 - 1 = 22 \end{aligned}$$

Φ au cube

Question préliminaire : que vaut la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$?

Φ au cube

Question préliminaire : que vaut la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$?

Gauss (1777–1855)

Φ au cube

Question préliminaire : que vaut la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$?

Gauss (1777–1855)

$$1 \quad + \quad 2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad 99 \quad + \quad 100$$

Φ au cube

Question préliminaire : que vaut la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$?

Gauss (1777–1855)

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Φ au cube

Question préliminaire : que vaut la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$?

Gauss (1777–1855)

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Réponse : $S = (100 \times 101)/2 = 5050$.

Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21}\cdots$$

Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21} \cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros.

Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21} \cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros.
- Les coefficients sont des nombres impairs avec des signes qui alternent.

Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21} \cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros.
- Les coefficients sont des nombres impairs avec des signes qui alternent.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots$$

Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21} \cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros.
- Les coefficients sont des nombres impairs avec des signes qui alternent.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots$$

Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21}\cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros.
- Les coefficients sont des nombres impairs avec des signes qui alternent.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ldots$$

Ce sont les nombres de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$!

Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21} \cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros.
- Les coefficients sont des nombres impairs avec des signes qui alternent.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots$$

Ce sont les nombres de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$! On les appelle *nombres triangulaires*.

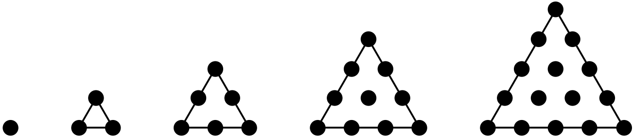
Φ au cube, joue-la comme Gauss

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + 13x^{21} \cdots$$

- Il y a beaucoup de zéros.
- Les coefficients sont des nombres impairs avec des signes qui alternent.
- Les degrés des termes non nuls sont

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots$$

Ce sont les nombres de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$! On les appelle *nombres triangulaires*.



Φ au cube, et après ?

Théorème (Gauss, 1777–1855) :

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Φ au cube, et après ?

Théorème (Gauss, 1777–1855) :

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- Pour certaines valeurs de d, MacDonald a donné (1972) des formules pour Φ^d.

Φ au cube, et après ?

Théorème (Gauss, 1777–1855) :

$$\Phi(x)^3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- Pour certaines valeurs de d, MacDonald a donné (1972) des formules pour Φ^d.
- Ses résultats sont reliés à la théorie des algèbres de Lie.

Pour $d = 24$

Ramanujan (1887–1920) a étudié en détail la fonction $\Phi(x)^{24}$.

Pour $d = 24$

Ramanujan (1887–1920) a étudié en détail la fonction $\Phi(x)^{24}$.

$$\begin{aligned}\Phi(x)^{24} &= 1 - 24x + 252x^2 - 1472x^3 + 4830x^4 - 6048x^5 \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^{n-1}.\end{aligned}$$

La fonction τ : Dark Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

La fonction τ : Dark Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

Les propriétés des nombres $\tau(n)$ aussi riches que mystérieuses :

- Lehmer a conjecturé en 1947 que $\tau(n)$ n'est jamais nul ;

La fonction τ : Dark Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

Les propriétés des nombres $\tau(n)$ aussi riches que mystérieuses :

- Lehmer a conjecturé en 1947 que $\tau(n)$ n'est jamais nul ;

La fonction τ : Dark Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

Les propriétés des nombres $\tau(n)$ aussi riches que mystérieuses :

- Lehmer a conjecturé en 1947 que $\tau(n)$ n'est jamais nul ; cela a été vérifié pour tout $n \leq 22798241520242687999 \simeq 2,3 \cdot 10^{19}$ (Bosman, 2007), mais on n'a pas de preuve !

La fonction τ : Dark Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

Les propriétés des nombres $\tau(n)$ aussi riches que mystérieuses :

- Lehmer a conjecturé en 1947 que $\tau(n)$ n'est jamais nul ; cela a été vérifié pour tout $n \leq 22798241520242687999 \simeq 2,3 \cdot 10^{19}$ (Bosman, 2007), mais on n'a pas de preuve !
- On conjecture qu'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels p divise $\tau(p)$

La fonction τ : Dark Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

Les propriétés des nombres $\tau(n)$ aussi riches que mystérieuses :

- Lehmer a conjecturé en 1947 que $\tau(n)$ n'est jamais nul ; cela a été vérifié pour tout $n \leq 22798241520242687999 \simeq 2,3 \cdot 10^{19}$ (Bosman, 2007), mais on n'a pas de preuve !
- On conjecture qu'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels p divise $\tau(p)$

La fonction τ : Dark Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

Les propriétés des nombres $\tau(n)$ aussi riches que mystérieuses :

- Lehmer a conjecturé en 1947 que $\tau(n)$ n'est jamais nul ; cela a été vérifié pour tout $n \leq 22798241520242687999 \simeq 2,3 \cdot 10^{19}$ (Bosman, 2007), mais on n'a pas de preuve !
- On conjecture qu'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels p divise $\tau(p)$ mais on n'en connaît que six :

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 2411,\ 7758337633$$

  et il n'y en a pas d'autre avant 10^{10} (Lygeros et Rozier, 2010) !

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$\tau(6) = -6048$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048 \\ &= -24 \times 252\end{aligned}$$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048\\ &= -24 \times 252\\ &= \tau(2) \times \tau(3)\end{aligned}$$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048 \\ &= -24 \times 252 \\ &= \tau(2) \times \tau(3)\end{aligned} \qquad \tau(4) = -1472$$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048 \\ &= -24 \times 252 \\ &= \tau(2) \times \tau(3)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\tau(4) &= -1472 \\ &= 576 - 2048\end{aligned}$$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048 \\ &= -24 \times 252 \\ &= \tau(2) \times \tau(3)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\tau(4) &= -1472 \\ &= 576 - 2048 \\ &= \tau(2)^2 - 2^{11}\tau(1)\end{aligned}$$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048\\ &= -24 \times 252\\ &= \tau(2)\times\tau(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(4) &= -1472\\ &= 576 - 2048\\ &= \tau(2)^2 - 2^{11}\tau(1)\end{aligned}$$

$$\tau(8) = 84480$$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048\\ &= -24 \times 252\\ &= \tau(2) \times \tau(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(4) &= -1472\\ &= 576 - 2048\\ &= \tau(2)^2 - 2^{11}\tau(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(8) &= 84480\\ &= 35328 + 49152\end{aligned}$$

La fonction τ : Light Side

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480

$$\begin{aligned}\tau(6) &= -6048\\ &= -24 \times 252\\ &= \tau(2) \times \tau(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(4) &= -1472\\ &= 576 - 2048\\ &= \tau(2)^2 - 2^{11}\tau(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(8) &= 84480\\ &= 35328 + 49152\\ &= \tau(4)\tau(2) - 2^{11}\tau(2)\end{aligned}$$

La fonction τ : Light Side

En 1916, Ramanujan a conjecturé les relations suivantes :

1. si n et m sont premiers entre eux, alors $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$;

La fonction τ : Light Side

En 1916, Ramanujan a conjecturé les relations suivantes :

1. si n et m sont premiers entre eux, alors $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$;
2. si p est un nombre premier et n un entier ≥ 2, alors

$$\tau(p^n) = \tau(p)\tau(p^{n-1}) - p^{11}\tau(p^{n-2}) \ ;$$

La fonction τ : Light Side

En 1916, Ramanujan a conjecturé les relations suivantes :

1. si n et m sont premiers entre eux, alors $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$;
2. si p est un nombre premier et n un entier ≥ 2, alors
$$\tau(p^n) = \tau(p)\tau(p^{n-1}) - p^{11}\tau(p^{n-2}) \ ;$$
3. si p est un nombre premier, alors $|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}$.

La fonction τ : Light Side

- Les deux premières relations ont été démontrées par Mordell en 1917, puis par Hecke en 1930 ;

La fonction τ : Light Side

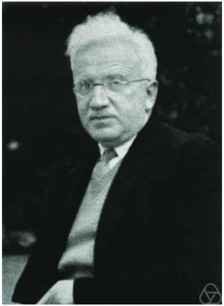
- Les deux premières relations ont été démontrées par Mordell en 1917, puis par Hecke en 1930 ;
- La dernière est une conséquence de résultats *très* généraux de Deligne pour lesquels il a reçu la médaille Fields en 1978.

La fonction τ : Light Side

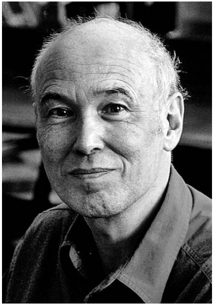
- Les deux premières relations ont été démontrées par Mordell en 1917, puis par Hecke en 1930 ;
- La dernière est une conséquence de résultats *très* généraux de Deligne pour lesquels il a reçu la médaille Fields en 1978.

La fonction τ : Light Side

- Les deux premières relations ont été démontrées par Mordell en 1917, puis par Hecke en 1930 ;
- La dernière est une conséquence de résultats *très* généraux de Deligne pour lesquels il a reçu la médaille Fields en 1978.



Hecke (1887–1947)



Deligne (1944–)

La fonction τ et la forme modulaire Δ

Toutes ces relations sont liées au fait que la fonction

$$\begin{aligned}\Delta(z) = q\Phi(q)^{24} &= q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \\ &= q + \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n, \quad \text{où } z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ et } q = e^{2i\pi z}\end{aligned}$$

est une *forme modulaire*. En particulier, on a

$$\Delta\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{12}\Delta(z) \quad \text{et} \quad \Delta(z+1) = \Delta(z).$$

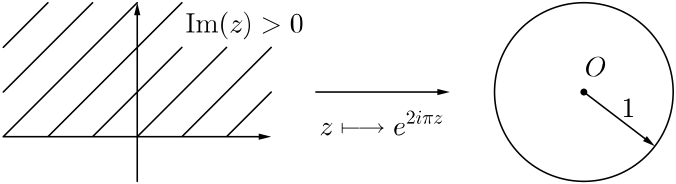
La fonction τ et la forme modulaire Δ

Toutes ces relations sont liées au fait que la fonction

$$\Delta(z) = q\Phi(q)^{24} = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$
$$= q + \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n, \quad \text{où } z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ et } q = e^{2i\pi z}$$

est une *forme modulaire*. En particulier, on a

$$\Delta\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{12}\Delta(z) \quad \text{et} \quad \Delta(z+1) = \Delta(z).$$



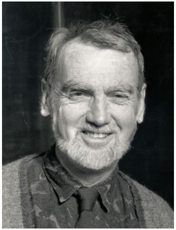
Les formes modulaires sont partout !

> *Il y a cinq opérations fondamentales en mathématiques : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et les formes modulaires.*
>
> — *(attribué à) Martin Eichler (1912–1992)*

Les formes modulaires sont partout !

> *Il y a cinq opérations fondamentales en mathématiques : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et les formes modulaires.*
>
> — *(attribué à) Martin Eichler (1912–1992)*

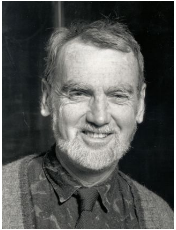
Dans le programme de Langlands (1936–), prix Abel 2018 ;



Les formes modulaires sont partout !

> *Il y a cinq opérations fondamentales en mathématiques : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et les formes modulaires.*
>
> — *(attribué à) Martin Eichler (1912–1992)*

Dans le programme de Langlands (1936–), prix Abel 2018 ;



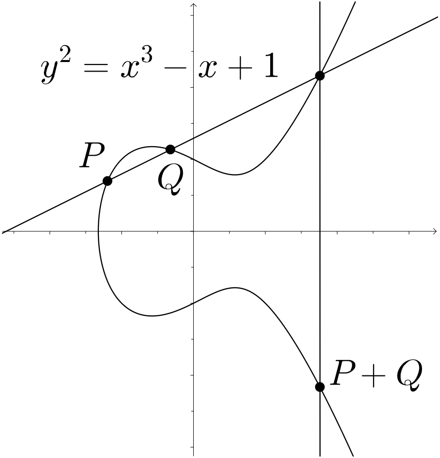
Dans la démonstration du « dernier théorème de Fermat ».

Des formes modulaires aux courbes elliptiques et à la cryptographie

Théorème (Wiles, 1995) : toute courbe elliptique rationnelle est modulaire.

Des formes modulaires aux courbes elliptiques et à la cryptographie

Théorème (Wiles, 1995) : toute courbe elliptique rationnelle est modulaire.



Merci pour votre attention !