Tronc Commun Mathématiques

Licence 1

2013–2014

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

UFR Sciences et Technologies

Département de Mathématiques

Ce document constitue le polycopié de l'enseignement de tronc commun mathématiques, qui est suivi par tous les étudiants inscrits en 1ère année de licence à l'UFR Sciences et Technologies de l'Université Blaise Pascal. Il contient l'ensemble des notions mathématiques abordées dans ce cours, et forme une base de connaissances en mathématiques jugées nécessaires pour pouvoir prétendre à la poursuite d'études solides en sciences.

Ce polycopié a été écrit par 5 enseignants de mathématiques (Nicolas Billerey, Kamal Boussaf, Laurent Chupin, François Martin et Claude Tricot), en étroite collaboration avec des enseignants de toutes les disciplines scientifiques de l'UFR (biologie, chimie, informatique, physique et sciences de la terre). Il a été rédigé de façon à rendre les notions mathématiques présentées les plus conformes possibles à leur utilisation dans les différents domaines scientifiques.

Ce polycopié contient essentiellement des définitions, des explications et des résultats. Il n'y a quasiment aucune démonstration mathématique. Il se veut résolument pratique et a vocation à être utilisé comme un outil de référence tout au long du cursus d'un étudiant à l'UFR Sciences et Technologies.

Il comporte 4 parties principales (voir table des matières ci-après). Une partie des notions abordées a déjà été vue en Terminale S (avec les programmes de terminale mis en place à la rentrée 2012), mais il y a plusieurs notions nouvelles et certains outils mathématiques sont réintroduits, complétés et étendus par rapport à la terminale. A la fin ont été ajoutées 3 annexes recensant quelques formules utiles.

Bonne lecture !

Table des matières

Chapitre I

Fonctions d'une variable

Le principal objet d'étude du cours de Tronc Commun de Mathématiques est la notion de fonction. Cette notion est évidemment centrale en Mathématiques, mais on la retrouve dans toutes les disciplines scientifiques et même dans la vie de tous les jours : les fonctions sont partout ! Parmi elles, les plus simples (même si leur théorie est très riche) sont celles d'une variable réelle à valeurs réelles. C'est donc par elles que nous allons débuter notre étude.

I.1 Rappels sur les nombres réels

Dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on trouve en particulier
- le sous-ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, formé à partir de 0 et 1 et de l'addition ;
- le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, contenant les nombres entiers naturels et leurs opposés : $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres qu'on obtient à partir de $0, 1$ et des deux opérations addition et soustraction ;
- le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, contenant les nombres réels pouvant s'écrire sous la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{Z}$ où q est non nul : $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qu'on obtient à partir de $0, 1$ et des quatre opérations addition, soustraction, multiplication et division.

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ (donc aussi $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$), mais attention ! $\mathbb{R}$ ne se réduit pas à $\mathbb{Q}$: il y a beaucoup (vraiment beaucoup) de nombres réels qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}$ par exemple) ; on les appelle les nombres irrationnels.

I.1.1 Représentation graphique

On représente graphiquement $\mathbb{R}$ à l'aide d'une droite horizontale sur laquelle on dessine une flèche pointant vers la droite, dont l'origine est notée 0 et l'extrémité 1. La longueur de cette flèche est l'échelle de la représentation. Un réel x peut alors être représenté de deux façons[1] :

1. sous la forme d'un point de la droite : x est le point situé à une longueur $|x|$ (pour l'échelle fixée) du point 0, à droite si $x > 0$, et à gauche si $x < 0$;
2. sous la forme d'une flèche horizontale (appelée aussi un vecteur) de longueur $|x|$ (pour l'échelle fixée), pointant vers la droite si $x > 0$, et vers la gauche si $x < 0$.

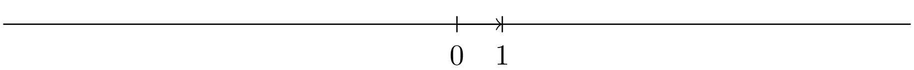


Figure I.1 – La droite réelle : représentation graphique de $\mathbb{R}$

1. On rappelle que pour un réel x donné, $|x|$ vaut x si $x \geq 0$ et $-x$ sinon ; voir le §I.3.1 pour plus de précisions.

Les deux représentations sont bien sûr liées : le ≪ point ≫ x (1ère représentation) est l'extrémité de la ≪ flèche ≫ x (2ème représentation) dont l'origine est positionnée en 0. Inversement, la ≪ flèche ≫ x est celle allant du point 0 vers le ≪ point ≫ x.
La deuxième représentation, moins standard, est fort utile, car la flèche représentant un réel x peut glisser le long de la droite réelle : le réel 1 est tout aussi bien représenté par la flèche d'origine le point 0 et d'extrémité le point 1 que par la flèche d'origine le point 7 et d'extrémité le point 8.
Pour représenter l'addition ou la soustraction dans $\mathbb{R}$, la représentation par les flèches est la plus adaptée : le réel $x + y$ est donné comme la composée de la flèche x et de la flèche y, c'est-à-dire la flèche obtenue en plaçant l'origine de la flèche y sur l'extrémité de la flèche x. Ceci est illustré sur la figure I.2.

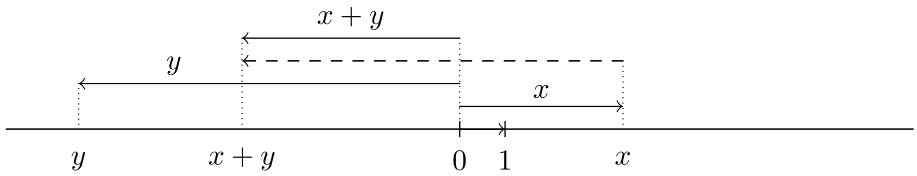


Figure I.2 – Représentation graphique de l'addition dans $\mathbb{R}$

Pour représenter graphiquement la multiplication par un réel λ, c'est plus simple : par rapport à la flèche représentant x, celle représentant λx a même direction si $\lambda > 0$, direction opposée sinon, et sa longueur est multipliée par $|\lambda|$.

I.1.2 Propriétés locales

Le vocabulaire suivant sera très utile dans la suite (notamment lorsqu'on étudiera les extrema d'une fonction ou ses limites, voir §§ I.2.2 et I.6.1).

Définition I.1. *Soit $\mathcal{P}$ une propriété concernant les nombres réels et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que $\mathcal{P}$ est vraie* **localement en** x_0*, ou encore* **au voisinage de** x_0*, si elle est vérifiée par tous les réels suffisamment proches de x_0.*

Autrement dit, s'il est possible de trouver un réel $r > 0$ telle que $\mathcal{P}$ soit vérifiée pour tous les éléments de l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Exemple I.2. Soit $\mathcal{P}(x)$ la propriété portant sur le nombre réel x suivante :

$$\mathcal{P}(x) : \ll\ x^2 - 100\, x^4 \text{ est positif} \gg.$$

Le calcul montre que si l'on a $-0,1 < x < 0,1$, alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Si on s'intéresse juste au fait que $\mathcal{P}$ est vraie pour 0 et pour les valeurs de x suffisamment proches de 0, on peut dire : $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de 0.

De la même manière on introduit une expression pour parler des propriétés vraies pour les réels ≪ près de l'infini ≫. Voici par exemple le cas de $+\infty$: on ne s'intéresse alors qu'aux réels suffisamment grands (le cas de $-\infty$ est similaire).

Définition I.3. *Soit $\mathcal{P}$ une propriété concernant les réels. On dira d'une propriété $\mathcal{P}$ qu'elle est vraie* **au voisinage de** $+\infty$*, si elle est vérifiée par tous les réels suffisamment grands.*

Autrement dit s'il est possible de trouver $M > 0$ tel que $\mathcal{P}$ soit vérifiée pour tous les éléments de l'intervalle $]M, +\infty[$.

I.2 Rappels sur les fonctions

Désormais, dans tout ce chapitre, le terme de ≪ fonction ≫ désignera une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

I.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition I.4. *Soit f une fonction.*

1. *L'ensemble $\mathcal{D}_f$ des éléments $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire possédant une image par f, est appelé l'***ensemble de définition** *de f.*
2. *Le* **graphe** *de f est l'ensemble des points de coordonnées[2] $(x, f(x))$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ (x sur l'axe des abscisses, $f(x)$ sur l'axe des ordonnées).*

Remarques I.5.

1. Il y a plusieurs façons de désigner une fonction. On dira par exemple ≪ la fonction f définie par (la formule) $f(x) = \dots$ ≫ ou encore ≪ la fonction $f : x \mapsto \dots$ ≫.
2. Qu'est-ce qui empêche une fonction d'être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Bien souvent cette obstruction est liée à la présence (voir la section I.3 pour les définitions)
   – d'une racine carrée (symbole $\sqrt{\ }$) : ce qu'il y a sous la racine doit être positif ou nul ;
   – d'un dénominateur : il doit être différent de zéro (on n'a pas le droit de diviser par 0 !) ;
   – d'un logarithme : il ne peut s'évaluer que sur les quantités strictement positives.
3. Par convention, lorsque par la suite on écrira $f : I \to \mathbb{R}$, on supposera implicitement que I est inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Exemples I.6.

1. Dans une entreprise, le montant minimum du salaire brut annuel d'un salarié est de 18000 € et le montant de son salaire net équivaut à 75% de celui de son salaire brut. On définit ainsi une fonction SalaireNet qui à un salaire annuel brut d'un salarié d'un montant de x euros associe le montant en euros, SalaireNet(x), du salaire net correspondant par la formule $\text{SalaireNet}(x) = 0,75 \times x$. Noter que la fonction SalaireNet n'est pas définie pour $x < 18000$.
2. Durant une semaine en janvier, on a relevé chaque jour à la même heure la température sur le campus des Cézeaux. Les données sont reportées dans le tableau ci-dessous où les jours de la semaine sont numérotés de 1 à 7 et la température exprimée en degré Celsius :

jour	1	2	3	4	5	6	7
température	1	6	9	10	-2	-3	-2

   Cela permet de définir une fonction Temp ayant l'ensemble $\mathcal{D}_{\text{Temp}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ pour ensemble de définition et où pour tout $J \in \mathcal{D}_{\text{Temp}}$, Temp($J$) est la température (en degré Celsius) relevée le jour J. Voici, représenté sur la figure I.3, le graphe de la fonction Temp.

I.2.2 Parité, périodicité, extrema

Définition I.7. *Soit f une fonction.*

2. Sauf mention explicite du contraire, tous les graphes de fonctions tracés dans ce polycopié le seront dans le plan muni d'un repère orthogonal direct, c'est-à-dire d'un repère où les axes des abscisses et des ordonnées sont perpendiculaires et orientés respectivement de la gauche vers la droite et du bas vers le haut.

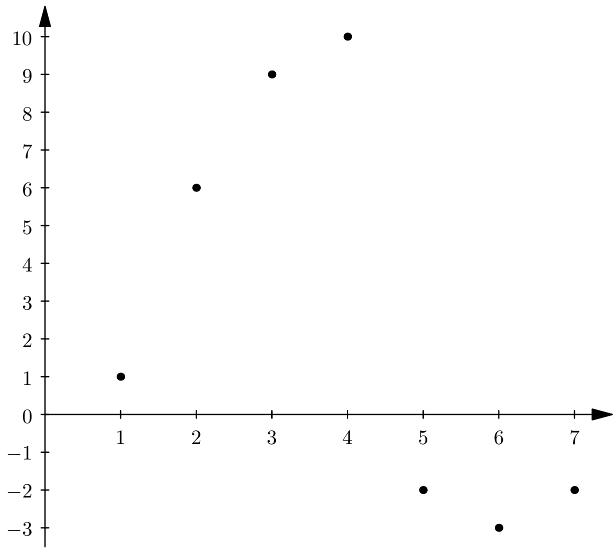


FIGURE I.3 – Graphe de la fonction Temp

1. *On dit que f est* **paire** *si pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_f$, $-x$ appartient aussi à $\mathcal{D}_f$ et si de plus on a l'égalité $f(-x) = f(x)$.*
   Traduction sur le graphe : une fonction f est paire *si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
2. *On dit que f est* **impaire** *si pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_f$, $-x$ appartient aussi à $\mathcal{D}_f$ et si de plus on a l'égalité $f(-x) = -f(x)$.*
   Traduction sur le graphe : une fonction f est impaire *si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.*
3. *Une fonction f est* **périodique de période** *T si d'une part, dire que $x \in \mathcal{D}_f$ équivaut à dire que $x + T \in \mathcal{D}_f$ et si d'autre part, on a l'égalité $f(x + T) = f(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}_f$.*
   Traduction sur le graphe : une fonction f est périodique de période *T si et seulement si le graphe restreint à deux bandes verticales de largeur T consécutives sont identiques.*

Remarque I.8. Ces notions sont utiles dans la pratique : elles permettent de limiter l'étude de certaines fonctions à des intervalles particuliers. Ainsi pour déterminer les propriétés d'une fonction périodique de période T, on pourra se restreindre à son étude sur un intervalle (quelconque) de longueur T.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *La fonction $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. (On pourra se reporter au §I.3.6 pour des rappels sur la fonction cosinus.)*

RÉPONSE En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\omega(t + T) + \varphi) = \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi).$$

Remarque I.9. Une fonction n'est pas forcément paire ou impaire (penser par exemple à la fonction $x \mapsto x^2 + x$ qui n'est ni paire, ni impaire). Cependant toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Cela résulte de l'égalité suivante, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{\text{impaire}}.$$

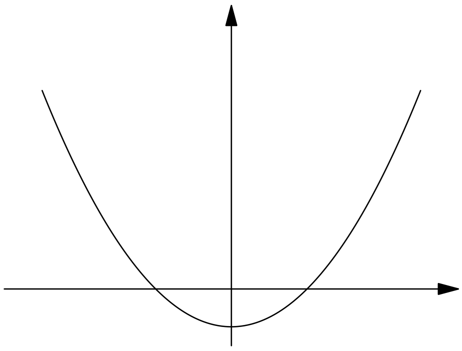


FIGURE I.4 – Graphe d'une fonction paire

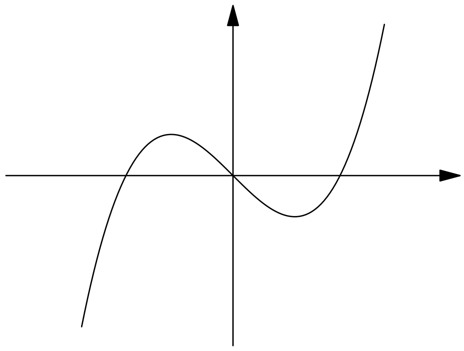


FIGURE I.5 – Graphe d'une fonction impaire

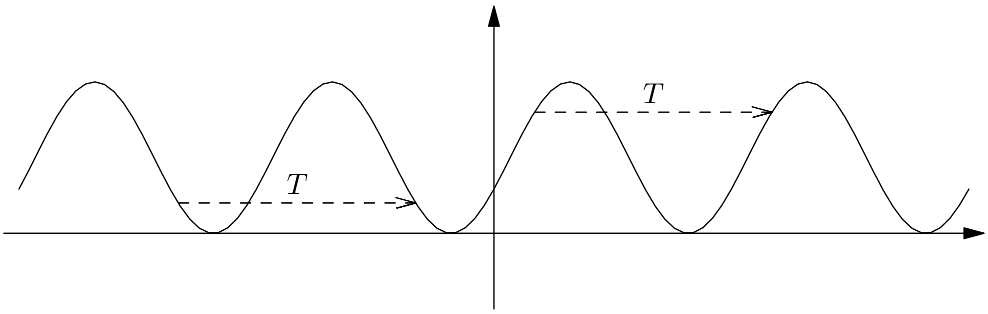


FIGURE I.6 – Graphe d'une fonction périodique de période T

Définition I.10. *Soient f une fonction et I un sous-ensemble non vide inclus dans $\mathcal{D}_f$ (en général, I sera un intervalle).*

1. *On dit que f est* **croissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \geq f(y)$.*
2. *On dit que f est* **décroissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \leq f(y)$.*
3. *On dit que f est* **strictement croissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x > y$ on a $f(x) > f(y)$.*
4. *On dit que f est* **strictement décroissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x > y$ on a $f(x) < f(y)$.*

Ces propriétés se lisent facilement sur le graphe de f (voir figures I.7 et I.8).

Définition I.11. *Soient f une fonction et I un sous-ensemble non vide inclus dans $\mathcal{D}_f$ (en général, I sera un intervalle).*

1. *On dit que f est* **majorée** *sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout x appartenant à I, on a $f(x) \leq M$. Dans ce cas, on dit que f est majorée par M sur I.*

   Traduction sur le graphe : f est majorée *par M sur I si le graphe de f sur I se situe en dessous de la droite horizontale d'équation $y = M$.*
2. *On dit que f est* **minorée** *sur I s'il existe un réel m tel que pour tout x appartenant à I on a $f(x) \geq m$. Dans ce cas, on dit que f est minorée par m sur I.*

   Traduction sur le graphe : f est minorée *par m sur I si le graphe de f sur I se situe au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = m$.*

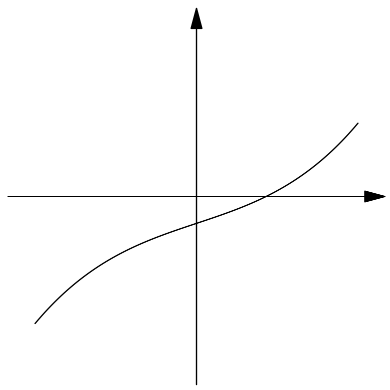


FIGURE I.7 – Graphe d'une fonction croissante

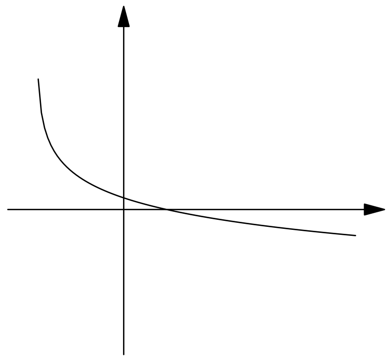


FIGURE I.8 – Graphe d'une fonction décroissante

3. *On dit que f est* **bornée** *sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I.*
   Traduction sur le graphe : f est bornée *sur I si le graphe de f sur I se situe entre deux droites horizontales.*

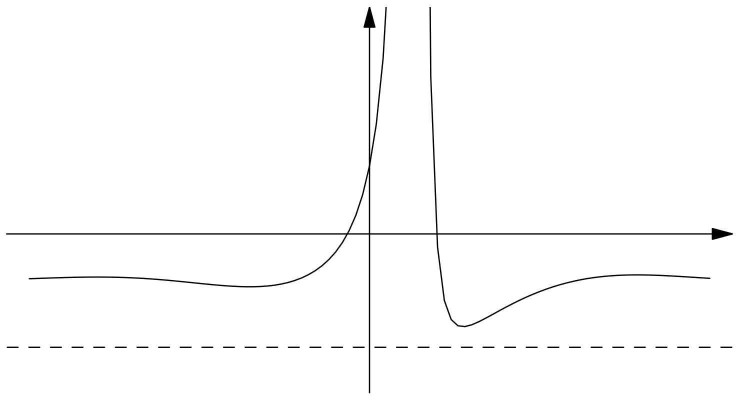


FIGURE I.9 – Graphe d'une fonction minorée mais non majorée

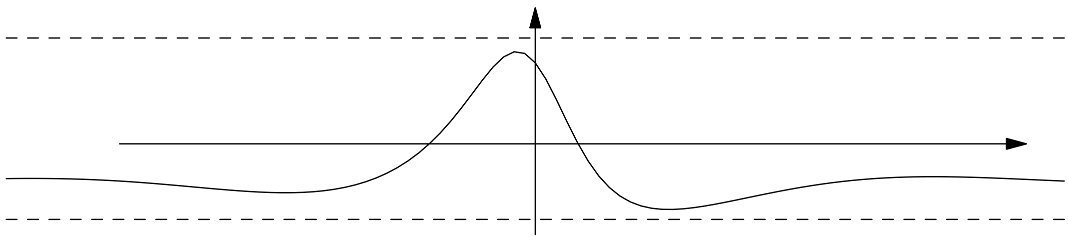


FIGURE I.10 – Graphe d'une fonction bornée

Il arrive parfois qu'une valeur prise par une fonction corresponde à un majorant ou à un minorant. On parle alors d'extremum. Les définitions suivantes précisent le vocabulaire.

Définition I.12. *Soit f une fonction.*

1. *On dit que f présente un* **maximum global** *en x_0 si f est majorée (sur $\mathcal{D}_f$) par $f(x_0)$.*

Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un maximum global *en x_0 si la fonction f prend des valeurs inférieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie que le graphe de f se situe en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

2. *On dit que f présente un* **minimum global** *en x_0 si f est minorée par $f(x_0)$.*

   Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un minimum global *en x_0 si la fonction f prend des valeurs supérieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie que le graphe de f se situe au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

3. *On dit que f présente un* **extremum global** *en x_0 si elle présente soit un maximum global, soit un minimum global en ce point.*

   Traduction sur le graphe : La fonction f présente un extremum global *en x_0 si la droite d'équation $y = f(x_0)$ est soit au-dessus, soit en dessous du graphe de f.*

Définition I.13. *Soit f une fonction.*

1. *On dit que f présente un* **maximum local** *en x_0 si f est majorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0 (voir la définition I.1).*

   Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un maximum local *en x_0 si au voisinage de x_0 la fonction f prend des valeurs inférieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie qu'en se restreignant à une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$ le graphe de f se situe en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

2. *On dit que f présente un* **minimum local** *en x_0 si f est minorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0.*

   Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un minimum local *en x_0 si au voisinage de x_0 la fonction f prend des valeurs supérieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie qu'en se restreignant à une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$ le graphe de f se situe au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

3. *On dit que f présente un* **extremum local** *en x_0 si elle présente soit un maximum local, soit un minimum local en ce point.*

   Traduction sur le graphe : La fonction f présente un extremum local *en x_0 si en se restreignant à une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$, la droite d'équation $y = f(x_0)$ est soit au-dessus, soit en dessous du graphe de f.*

Remarques I.14.

1. La recherche des extrema fait partie intégrante de l'étude d'une fonction. On y reviendra au § I.6.1. Les extrema (locaux et globaux) renseignent sur les valeurs maximales et minimales prises par une quantité observée : température, acidité, vitesse, etc.

2. La fonction f présente un maximum (respectivement un minimum) local en un réel x_0 si au voisinage de x_0 la valeur atteinte par f est la plus grande (respectivement la plus petite) prise par f. Mais ce n'est pas forcément la plus grande valeur prise par f sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction représentée sur la figure I.11 admet trois maxima locaux en x_B, x_D et x_F et trois minima locaux en x_A, x_C et x_E. Aucun des extrema locaux en x_B, x_C, x_D et x_E n'est un extremum global.

I.2.3 Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions.

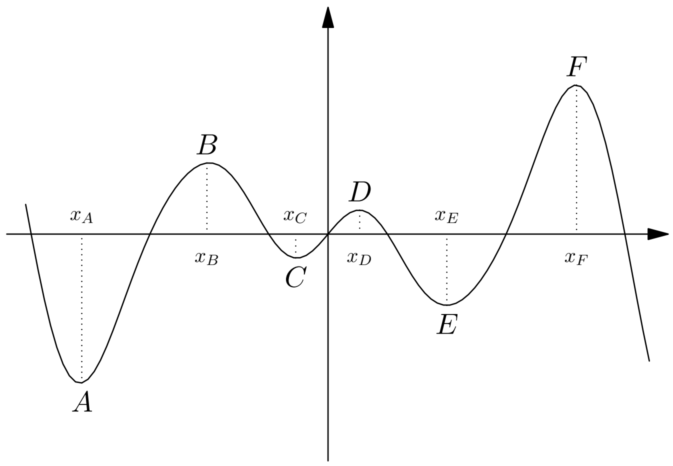


FIGURE I.11 – Minima et maxima locaux d'une fonction

Définition I.15. *On définit la* **somme** $f+g$ *et le* **produit** fg *des fonctions* f *et* g *par les formules naturelles suivantes* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *et* $(fg)(x) = f(x)g(x)$*. Leur ensemble de définition est*

$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{fg} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \in \mathcal{D}_g\} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

On donne désormais la définition et quelques propriétés de l'importante notion de composition de fonctions.

Définition I.16. *Soit* I *un sous-ensemble de* $\mathcal{D}_f$*. On suppose que pour tout élément* x *de* I*,* $f(x)$ *appartient à* $\mathcal{D}_g$*. On appelle* **composée** *des fonctions* f *et* g*, et on note* $g \circ f$*, la fonction définie sur* I *par la formule* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$*.*

Si x est dans I, alors par hypothèses, d'une part $x \in \mathcal{D}_f$ et donc $f(x)$ a bien un sens et, d'autre part, $f(x)$ est dans $\mathcal{D}_g$ et $g(f(x))$ a donc bien un sens également. Ainsi, tous les éléments de I sont dans l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.

Attention ! L'ordre de composition a de l'importance.

Lorsqu'on calcule $(g \circ f)(x)$, on commence par appliquer f à x, puis on applique g à $f(x)$. Le procédé est illustré dans le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \end{tikzcd}$$

On n'a donc pas (pour deux fonctions f et g quelconques) $g \circ f = f \circ g$. D'ailleurs, si l'une de ces deux fonctions est bien définie, l'autre ne l'est pas forcément...

Attention ! Ne pas confondre « produit » et « composée », c'est-à-dire ne pas confondre les deux fonctions fg $(= f \times g)$ et $f \circ g$.

Exemples I.17.

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par la formule $h(x) = \sqrt{x-1}$. Alors on a $h = g \circ f$ où f et g sont les fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\ ; \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[. \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

2. Étant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction $\frac{1}{f}$ par la formule
$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$
C'est donc la composée de f avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Son ensemble de définition est
$$\mathcal{D}_{1/f} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) \neq 0\}.$$

3. Il y a toujours plusieurs façons d'écrire une fonction donnée comme composée d'autres fonctions. Par exemple, la fonction h définie par la formule $h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$ peut se décomposer des deux façons suivantes :
$$x \xmapsto{f_1} 1 + x^2 \xmapsto{g_1} h(x)\ ; \qquad x \xmapsto{f_2} (1+x^2)^3 \xmapsto{g_2} h(x)$$
où $g_1(x) = \frac{1}{x^3}$ et $g_2(x) = \frac{1}{x}$.

I.2.4 Fonctions réciproques

Soient I et J deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ (en général ce seront des intervalles) et $f : I \longrightarrow J$ une fonction. On a la définition suivante :

Définition I.18. *On dit que $f : I \longrightarrow J$ est* **bijective** *de I dans J si pour tout élément $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.*

Remarque I.19. Noter qu'il y a deux affirmations dans cette définition : d'une part, *l'existence* d'un élément $x \in I$ tel que $f(x) = y$ (on dit que x est un antécédent de y) et d'autre part *l'unicité* d'un tel élément.

Supposons $f : I \longrightarrow J$ bijective de I dans J. Dans ce cas, on peut définir une fonction, appelée fonction réciproque de f et notée f^{-1} de la façon suivante :
$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : J & \longrightarrow & I \\ y & \mapsto & x \text{ où } x \text{ est l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

On notera que la fonction f^{-1} est elle-même bijective et sa fonction réciproque est la fonction f dont on est parti : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Attention ! Ne pas confondre f^{-1} (la fonction réciproque de f) et $\frac{1}{f}$ (l'inverse de f).

Supposons que I soit un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction strictement monotone définie sur I (c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante). Alors, f réalise une bijection de I dans son image, notée J :
$$J = f(I) = \{f(x)\ ;\ x \in I\} = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } x \in I \text{ vérifiant } f(x) = y\}.$$

On suppose $f : I \longrightarrow J$ bijective. On a alors $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in I$ et $(f \circ f^{-1})(y) = y$ pour tout $y \in J$. Le graphe de la fonction f^{-1} se déduit ainsi facilement de celui de f (et réciproquement) : c'est son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, comme illustré sur la figure I.12. On vérifie également que la réciproque d'une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) est encore strictement croissante (resp. strictement décroissante).

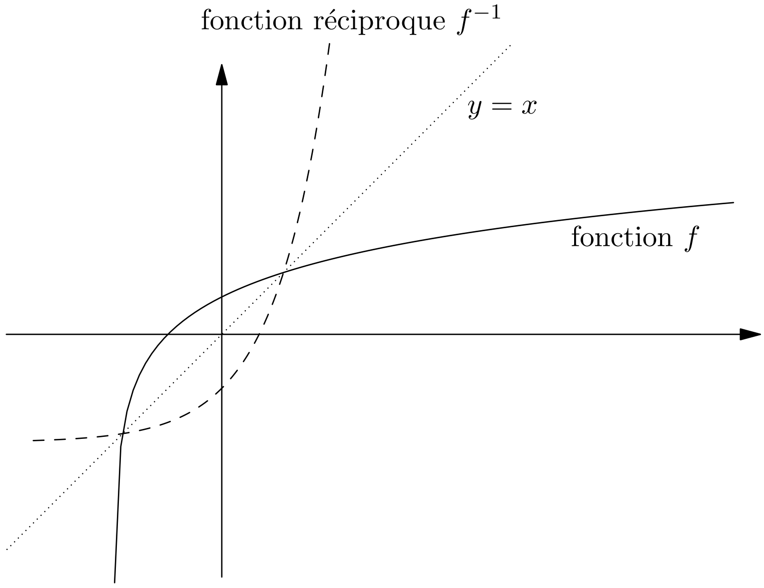


FIGURE I.12 – Graphes d'une fonction bijective et de sa fonction réciproque

I.3 Fonctions usuelles

Dans cette section, on donne la définition et les propriétés importantes de certaines fonctions dites usuelles. La plupart des fonctions que l'on considère dans ce polycopié ou dans les exercices sont obtenues à partir des opérations sur les fonctions rappelées aux paragraphes I.2.3 et I.2.4 appliquées aux fonctions usuelles. Il est donc important de bien les connaître car ce sont les « briques » de base des fonctions étudiées en Tronc Commun de Mathématiques.

I.3.1 La fonction valeur absolue

Définition I.20. *La fonction* **valeur absolue**, *notée* $|\ |$, *est la fonction définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par la formule*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}.$$

Le graphe de la fonction valeur absolue est illustré sur la figure I.13. Ses propriétés essentielles sont

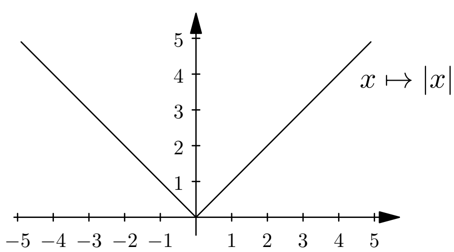


FIGURE I.13 – Graphe de la fonction valeur absolue

données dans la proposition suivante.

Proposition I.21. *Soient* x *et* y *deux nombres réels.*

1. $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *;*

2. *$|-x| = |x|$;*
3. *$|xy| = |x| \cdot |y|$;*
4. *$|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) ;*
5. *$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.*

Remarque I.22. Noter que la fonction valeur absolue ne prend que des valeurs positives ou nulles. Intuitivement, elle mesure une longueur ou une distance : voir la représentation graphique de $\mathbb{R}$ proposée au §I.1.1.

I.3.2 Les fonctions puissances, premier épisode

Si n est un entier strictement positif, la fonction $x \longmapsto x^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Définition I.23.

1. *Si n est un entier strictement positif, on définit $x \longmapsto x^{-n}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. C'est une fonction strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*
2. *Si $n = 0$, par définition, la fonction $x \longmapsto x^0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est constante égale à 1.*
3. *Si n est un entier strictement positif, on définit $x \longmapsto x^{1/n}$ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ comme la fonction réciproque (voir §I.2.4) de la fonction $x \longmapsto x^n$ (qui est strictement croissante sur $[0, +\infty[$). C'est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, pour $n = 2$ et $x \in [0, +\infty[$ on a $\sqrt{x} = x^{1/2}$ (pour $n \geq 3$, on écrit aussi $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$).*
4. *Tout nombre rationnel α non nul s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha = \frac{p}{q}$ avec q entier strictement positif et p un entier tel que p et q n'ont pas de diviseur commun. On définit la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ par $x^\alpha = \left(x^{1/q}\right)^p = (x^p)^{1/q}$, c'est-à-dire soit la composée des fonctions $x \longmapsto x^{1/q}$ et $x \longmapsto x^p$, soit la composée des fonctions $x \longmapsto x^p$ et $x \longmapsto x^{1/q}$.*

Attention ! Ne pas confondre les fonctions $x \longmapsto x^{-n}$ et $x \longmapsto x^{1/n}$.

Par exemple, on a $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $x^{1/2} = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. On verra au §I.3.5 qu'il y a une définition naturelle, à l'aide de la fonction exponentielle, des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ pour α réel non nécessairement rationnel.

Le graphe de certaines fonctions puissances est illustré à la figure I.14.

I.3.3 Les fonctions logarithmes

On donne ici un simple aperçu de la fonction ln et de ses premières propriétés.

Rappel :
La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante sur cet intervalle, prend la valeur 1 en le réel $e \approx 2,71828$, et vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in]0, +\infty[, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y). \tag{1}$$

La fonction ln (comme les « autres » fonctions logarithmes que l'on introduira après) s'annule en 1. Elle vérifie l'égalité fondamentale $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et $\ln(1) = 0$ (c'est même la seule fonction vérifiant ces deux propriétés). Son graphe a l'allure donnée par la figure I.15.

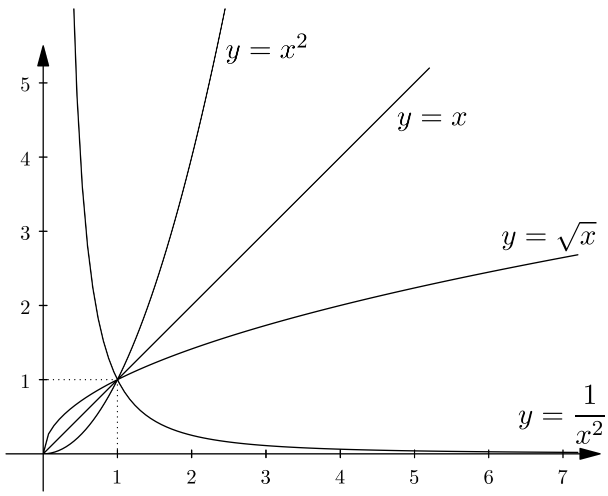


FIGURE I.14 – Graphes de quelques fonctions puissances

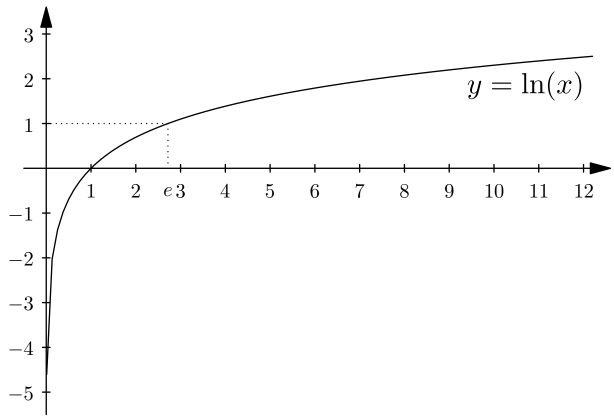


FIGURE I.15 – Graphe de la fonction logarithme népérien

Remarque I.24. La formule fondamentale (1) ci-dessus se généralise à un produit de $n \geq 1$ nombres réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs :

$$\ln(x_1 \cdots x_n) = \ln(x_1) + \ldots + \ln(x_n).$$

Cependant, on préfère souvent écrire cette formule à l'aide des symboles $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit) définis pour une fonction f quelconque de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \ldots + f(x_n) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) \cdots f(x_n).$$

La formule précédente s'écrit alors

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

Proposition I.25. *On a les égalités suivantes :*

1. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ *pour tout* $x > 0$.

2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$*, pour tous* x, y *strictement positifs.*

3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ *pour* $x > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}$*.*

Remarque I.26. Ces formules se déduisent de la formule fondamentale (1). Lorsqu'au §I.3.5 page 20 on aura étendu la définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ aux exposants α réels, on verra que la formule (3) de la proposition ci-dessus s'étend également à cette situation plus générale.

Dans beaucoup d'applications (en chimie notamment pour les calculs de pH), on préfère utiliser la fonction **logarithme décimal**, notée log. Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$\log(x) = \frac{1}{\ln(10)} \ln(x).$$

En d'autres termes, c'est simplement la fonction ln multipliée par la constante $\frac{1}{\ln(10)}$ (qui vaut environ $0,434$). Elle vérifie donc la même propriété fondamentale que ln :

$$\text{Pour tous } x, y \in]0, +\infty[, \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y),$$

et de plus par définition on a $\log(10) = 1$, donc $\log(10^n) = n$ pour tout entier n et donc $\log(10^n x) = n + \log(x)$ pour tout $x > 0$ et tout entier n, ce qui rend cette fonction très utile dans beaucoup de domaines. Mais la dérivée de la fonction log est moins naturelle (on a $\log'(x) = \frac{1}{x(\ln 10)}$), c'est pourquoi en mathématiques on privilégie la fonction ln.

Plus généralement, pour tout nombre réel $a > 0$, $a \neq 1$, on peut définir une fonction logarithme en base a : il s'agit simplement de la fonction définie par la formule $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. On a en particulier, $\log_e = \ln$ et $\log_{10} = \log$. La fonction $\log_2$ est particulièrement utilisée en informatique. Les fonctions logarithmes ont de multiples intérêts pratiques, dans des domaines très divers. On en donne quelques-uns dans les exemples ci-dessous.

Exemples I.27.

1. L'échelle de Richter sert à quantifier la puissance d'un tremblement de terre : pour évaluer sa force, on cherche à mesurer le rapport $\frac{A}{A_0}$, où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence. L'échelle de Richter est une échelle logarithmique : la magnitude dite de Richter utilise le logarithme décimal et est définie par la formule : $M_L = \log A - \log A_0 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ (pour être précis, on prend pour A l'amplitude maximale des ondes sismiques à 100 kilomètres de la zone la plus violemment atteinte par le tremblement de terre, appelée l'épicentre).
   Ainsi, par exemple, cela signifie que les ondes sismiques d'un séisme de magnitude 6 ont une amplitude dix fois plus grande que celles d'un séisme de magnitude 5.
   L'intérêt d'utiliser une échelle logarithmique est clair : il permet de quantifier avec des "petits chiffres" l'écart d'amplitude des tremblements de terre : en pratique, l'échelle n'est que de 1 à 9 même si elle est théoriquement illimitée. Le plus fort séisme mesuré a eu lieu au Chili, en 1960, d'une magnitude de $9,5$ sur l'échelle de Richter. A titre de comparaison, la chute d'une brique d'une hauteur de 1 mètre provoque un tremblement de terre d'une magnitude de -2 sur l'échelle de Richter. Faites le calcul : cela signifie que les ondes provoquées par le séisme au Chili ont eu une amplitude 316 milliards de fois plus importante que celle provoquées par la brique... Il est donc bien plus commode d'employer une échelle logarithmique.
2. De même, on utilise une échelle logarithmique pour mesurer le degré d'acidité ou de basicité d'une solution : on définit le pH d'une solution par $pH = -\log([H^+])$, où $[H^+]$ indique la concentration d'ions H_3O^+ en moles par litre de la solution...

Entraînez-vous ! *En acoustique on mesure en décibels (*dB*), par la formule* $10\log\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)$*, un son émis d'une puissance* P_1 *relativement à une puissance de référence* P_0*. Si une trompette émet un son de* 60dB*, combien de décibels émettent deux trompettes ?*

Réponse Si le son émis par une trompette est de $10\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 60\text{dB}$, le son émis par deux trompettes sera de

$$10\log\left(\frac{2P_1}{P_0}\right) = 60 + 10\log(2) \approx 63\text{dB}$$

et non pas de 120dB !

I.3.4 La fonction exponentielle

Comme pour le logarithme, on présente la définition et les premières propriétés de la fonction exp.

Définition I.28. *La fonction* **exponentielle***, notée* exp*, est la fonction réciproque (voir §I.2.4) de la fonction* ln *(qui, rappelons-le, est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$*). Elle est définie sur* $\mathbb{R}$*.*
Notation : On note souvent, et on utilisera cette notation dans la suite, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$*.*

Remarque I.29. En Terminale on a défini la fonction exp comme l'unique fonction vérifiant $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$. Les deux définitions sont bien entendu équivalentes.

Elle vérifie les propriétés suivantes :

Proposition I.30.

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\mathrm{e}^x > 0$*.*
2. *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\ln(\mathrm{e}^x) = x$*.*
3. *Pour* $x > 0$*, on a* $\mathrm{e}^{\ln x} = x$*.*
4. $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Par définition, le graphe de exp s'obtient à partir du graphe de ln en en faisant la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir §I.2.4). Il est représenté sur la figure I.16.

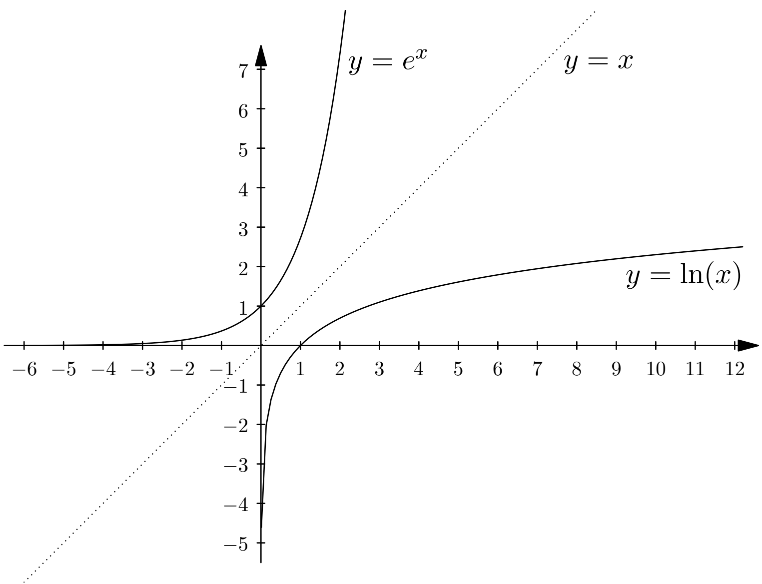


Figure I.16 – Graphes des fonctions exp et ln

La fonction exponentielle vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y. \tag{2}$$

Remarque I.31. Avec les notations $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit) introduites à la remarque I.24, on a pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$:

$$\exp(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{x_i}.$$

Proposition I.32. *On a les formules suivantes :*

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ *;*
2. *Pour* x, y *appartenant à* $\mathbb{R}$, *on a* $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ *;*
3. *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* α *rationnel, on a* $\mathrm{e}^{\alpha x} = (\mathrm{e}^x)^\alpha$.

Remarque I.33. Ces formules se déduisent de la formule fondamentale (2). Comme précédemment, lorsqu'au §I.3.5 page 20 on aura étendu la définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ aux exposants α réels, on verra que la formule (3) de la proposition ci-dessus s'étend également à cette situation plus générale.

Tout comme les fonctions logarithmes, la fonction exponentielle est très utile dans des domaines variés. Ses propriétés différentielles (elle est égale à sa propre dérivée) expliquent que les lois vérifiées par certaines grandeurs qui croissent ou décroissent à une vitesse proportionnelle à leur « taille » s'expriment comme des multiples de fonctions exponentielles : c'est entre autres le cas de la croissance d'une population, des intérêts composés continus en économie, ou encore de la décroissance radioactive d'un matériau.

Exemples I.34.

1. Le phénomène de désintégration radioactive est aléatoire : si on considère un noyau donné, il est impossible de prédire à quel instant la désintégration va se produire. Le nombre de désintégrations qui se produisent à un instant donné est proportionnel au nombre d'atomes $N(t)$ encore radioactifs à cet instant. Ce nombre décroît au cours du temps et l'équation vérifiée par $N(t)$ est
$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-(\ln 2)t/T},$$
où T est le temps au bout duquel la moitié des éléments radioactifs se sont désintégrés. Selon les noyaux radioactifs concernés, cette période est très variable : quelques secondes, quelques heures, plusieurs jours, voire des centaines d'années et même des milliards d'années.
Ainsi, au bout de deux périodes, il reste un quart des noyaux radioactifs d'un radioélément. Au bout de trois périodes, il reste un huitième des noyaux radioactifs d'un radioélément. Au bout de dix périodes, il reste environ un millième des noyaux radioactifs d'un radioélément.
2. La valeur d'un placement en banque à intérêts continus augmente à chaque instant de façon proportionnelle à la somme présente : si par exemple une somme augmente de 3% par an, alors la valeur à chaque instant de la somme placée est donnée par la formule
$$S(t) = S_0 \mathrm{e}^{t \ln(1{,}03)}$$
où S_0 est la somme initiale, et t le temps compté en années. Prenons un exemple : si $S(0) = 1000$€, on aura $S(1) = 1030$€ au bout d'un an, puis $S(2) = 1060{,}9$€ au bout de deux ans... et $S(10) = 1343{,}91$€ au bout de 10 ans, $S(100) = 19218{,}63$€ si on laisse la somme 100 ans, et au bout de 1000 ans elle sera égale à environ 6874 milliards d'euros !!!
Constatez bien que ce n'est pas linéaire ! Les intérêts sont moins grands si on place deux fois une somme S_0 pendant 6 mois que si on place cette somme S_0 pendant un an !

Remarque I.35. Si une banque propose un emprunt mensualisé à 6% par an, elle devrait faire rembourser une somme égale à $S_1(t) = S_0 \mathrm{e}^{(\ln 1{,}06)t}$, où t est le temps compté en années et où S_0 est la somme initialement prêtée. En fait il arrive qu'elle raisonne de façon linéaire, avec la formule $S_2(m) = S_0 \mathrm{e}^{(\ln 1{,}005)m}$ où m est le temps compté en mois (en considérant que 6% par an correspond à $0,5\%$ par mois). Faites le calcul : avec la première formule, vous devez rembourser au bout d'un an la somme $S_1(1) = 1,06 S_0$, alors qu'avec la deuxième vous aurez à rembourser $S_2(12) = S_0 \mathrm{e}^{12 \ln(1{,}005)}$ environ égal à $1,062 S_0$. Certes la différence est faible, mais sur un emprunt de 20 ans, la somme à rembourser est dans un cas environ égal à $3,21 S_0$, alors que dans l'autre elle est de $6,02 S_0$! ! !

I.3.5 Les fonctions puissances, second épisode

On a défini au §I.3.2 les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, pour α rationnel. En fait, on a une définition générale à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme népérien :

Définition I.36. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ par la formule*

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Remarques I.37.

1. Grâce aux propriétés vérifiées par le logarithme et l'exponentielle, si α est rationnel cette définition coïncide avec celle déjà donnée au §I.3.2.
2. Cela explique la notation, introduite après la définition I.28, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, puisque $\mathrm{e}^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$.
3. La fonction réciproque de l'application log est définie sur $\mathbb{R}$ et est donnée par $x \longmapsto 10^x = \mathrm{e}^{x \ln(10)}$.
4. Avec cette définition, on peut vérifier que les formules (3) des propositions I.25 et I.32 s'étendent au cas où α est réel (et non plus seulement rationnel).

Les fonctions exp et ln étant strictement croissantes, on en déduit les sens de variations suivants.

Proposition I.38.

1. *Si $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.*
2. *Si $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*
3. *Si $\alpha = 0$, la fonction $x \longmapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.*

L'allure des graphes des fonctions puissances sont représentés sur la figure I.17 selon la valeur de α. Les fonctions puissances vérifient de plus les relations suivantes :

Proposition I.39. *Soient $x > 0$, et α, β deux nombres réels.*

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;
4. $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = \left(x^\beta\right)^\alpha$.

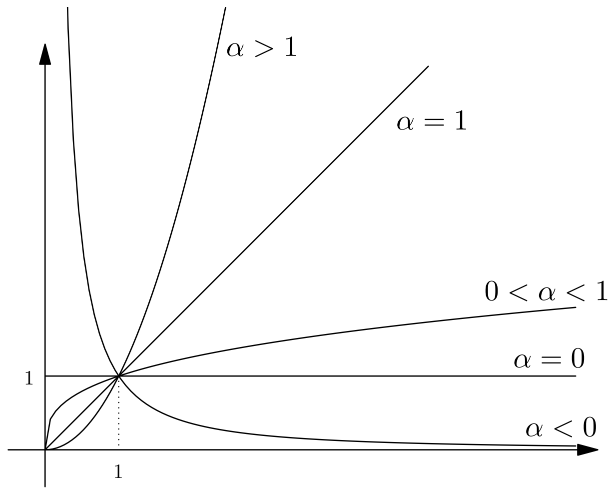


FIGURE I.17 – Graphes des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ selon les valeurs de α

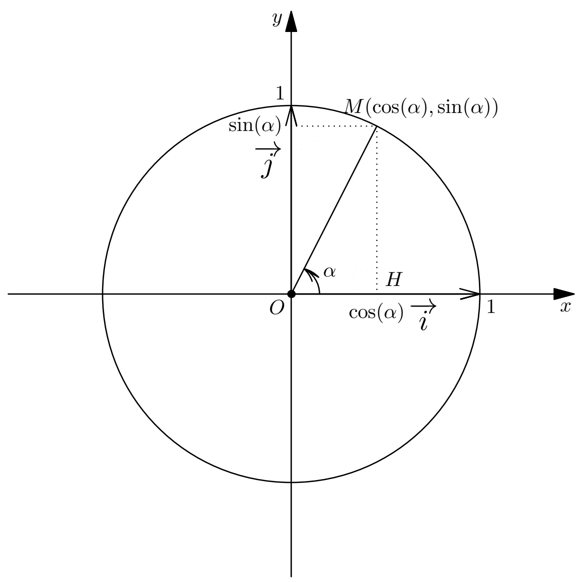


FIGURE I.18 – Le cercle trigonométrique et les fonctions sinus et cosinus

I.3.6 Les fonctions trigonométriques et hyperboliques

Munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ comme représenté sur la figure I.18. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. On place un point M sur ce cercle. La demi-droite Ox et la demi-droite passant par O et par M déterminent un angle orienté de mesure [3] α. On note $\cos(\alpha)$ l'abscisse de M et $\sin(\alpha)$ son ordonnée. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OHM fournit alors la relation fondamentale suivante : $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$. Pour alléger les notations, on note souvent (conformément à une habitude aussi ancienne que répandue) $\cos^2(\alpha)$ au lieu de $(\cos(\alpha))^2$ et de même $\sin^2(\alpha)$ au lieu de $(\sin(\alpha))^2$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit aussi $\cos\alpha$ au lieu de $\cos(\alpha)$ ou encore $\cos^2\alpha$ au lieu de $\cos^2(\alpha)$ (et de même avec sin). La relation précédente s'écrit alors :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{3}$$

3. On exprimera souvent les mesures des angles en radian ; on rappelle que $180° = \pi$ rad.

Comme α et $\alpha + 2k\pi$ sont deux mesures du même angle pour tout k dans $\mathbb{Z}$, on a

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha).$$

Autrement dit, les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π au sens de la définition I.7. À partir de la relation fondamentale (3) et du cercle trigonométrique représenté sur la figure I.18, on déduit certaines valeurs des fonctions sinus et cosinus en des angles de référence (du premier quadrant, c'est-à-dire du quart de cercle en haut à droite). Ces valeurs numériques à connaître sont données dans le tableau A.1 de l'annexe, page 83.
De même, on relie la valeur des fonctions sinus et cosinus en différents angles. Ces relations sont reportées dans le tableau A.2 de l'annexe.
Ainsi, on constate que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *À l'aide des tableaux A.1 et A.2, calculer les valeurs des fonctions sinus et cosinus aux angles de référence*

$$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}.$$

En tout point où la fonction cosinus ne s'annule pas, c'est-à-dire en tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on définit la *tangente de* x par la formule $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ainsi, la fonction tan a pour ensemble de définition $\mathcal{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}$. Compte-tenu des propriétés de parité et de périodicité des fonctions sinus et cosinus données ci-dessus, la fonction tangente est impaire et périodique de période π.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Sur le cercle trigonométrique de la figure I.18, où se lit* $\tan \alpha$ *? Lorsqu'elle y est définie, calculer la valeur de la fonction* tan *en chacun des angles de référence ci-dessus.*

Les graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente sont représentés sur les figures I.19, I.20 et I.21.

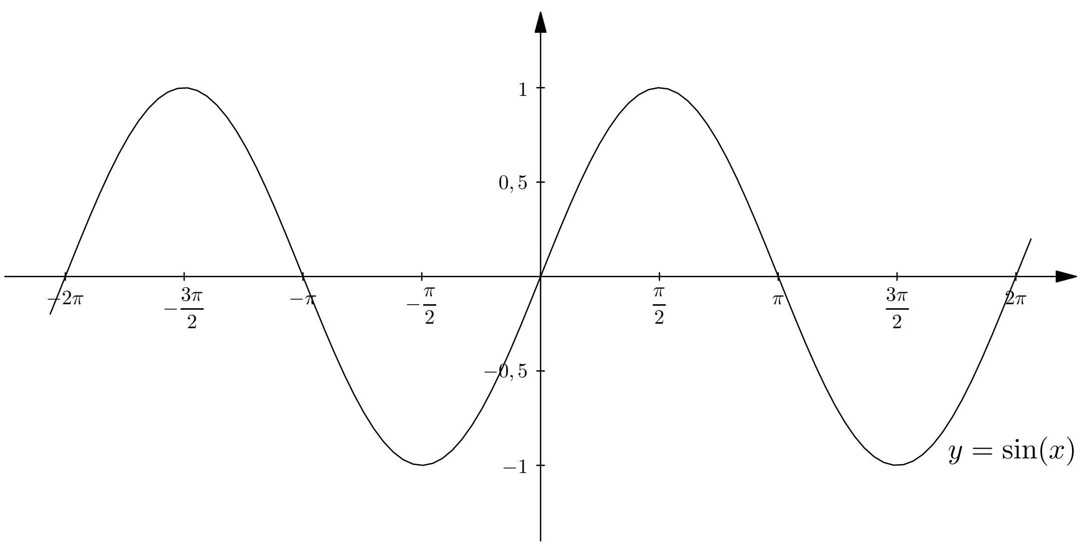


FIGURE I.19 – Graphe de la fonction sinus

Les fonctions trigonométriques sont très utilisées dans tous les domaines scientifiques. Les calculs avec ces fonctions sont « facilités » par le fait qu'elles possèdent de nombreuses propriétés (généralement

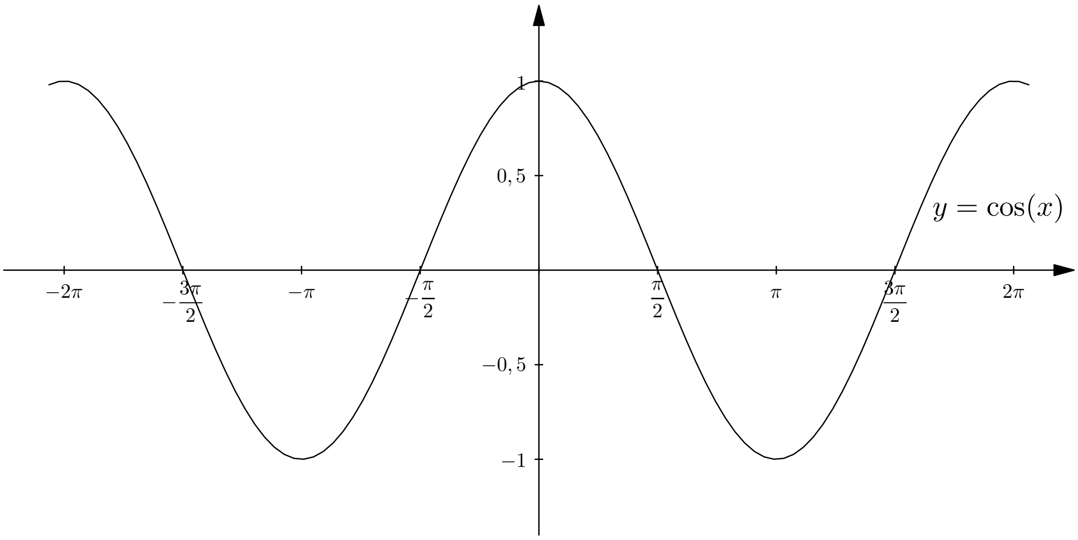


FIGURE I.20 – Graphe de la fonction cosinus

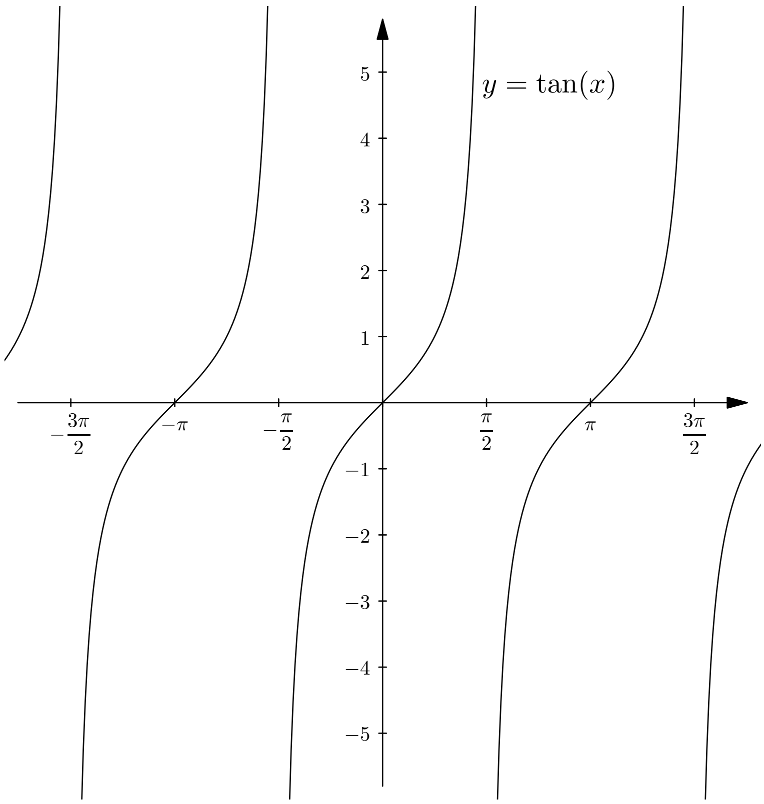


FIGURE I.21 – Graphe de la fonction tangente

issues directement de leur définition géométrique). L'annexe de ce document contient une liste des principales « formules trigonométriques » qu'il est bon de connaître... ou de savoir retrouver ! (voir page 83)

Exemple I.40 (Formules d'addition)**.** Si a et b sont des nombres réels, alors

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Entraînez-vous ! *Soient a et b deux nombres réels. Déduire de l'exemple I.40 ci-dessus des formules pour* $\cos(a-b)$.

Réponse En notant $c=-b$, on a $\cos(a-b)=\cos(a+c)$. On peut alors utiliser la relation $\cos(a+c)=\cos(a)\cos(c)-\sin(a)\sin(c)$ donnée par la proposition précédente. On sait par ailleurs que $\cos(c)=\cos(-b)=\cos(b)$ et $\sin(c)=\sin(-b)=-\sin(b)$. On en déduit

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).$$

Définition I.41. *Soit $x\in\mathbb{R}$. On définit la fonction* **cosinus hyperbolique***, notée* ch *(ou parfois* cosh*) par la formule :*

$$\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Remarque I.42. La fonction ch, définie sur $\mathbb{R}$, est paire. C'est même « la partie paire » de la fonction exponentielle (voir la remarque I.9). La fonction ch intervient en physique. C'est en effet elle qui donne l'équation de la courbe que fait une chaînette tenue par ses deux extrémités : $y(x)=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ où a est une constante dépendant des paramètres physiques de la chaînette.

De la même façon, on définit la fonction sinus hyperbolique comme « la partie impaire » de la fonction exponentielle.

Définition I.43. *Soit $x\in\mathbb{R}$. On définit la fonction* **sinus hyperbolique***, notée* sh *(ou parfois* sinh*) par la formule :*

$$\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Les fonctions hyperboliques ont certaines propriétés relativement similaires aux fonctions trigonométriques (ceci est dû au fait qu'on peut aussi définir les fonctions trigonométriques en utilisant les exponentielles, mais avec des variables complexes). Une liste des propriétés usuelles des fonctions hyperboliques est donnée dans l'annexe B page 85. A titre d'exemple, voici comment on démontre la propriété suivante :

Entraînez-vous ! *Montrer que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, on a*

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$$

Réponse En effet, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(y)\operatorname{ch}(x)&=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y})\\&=\frac{1}{4}(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y})+\frac{1}{4}(e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y})\\&=\frac{1}{2}(e^{x+y}-e^{-x-y})=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

I.4 Limites et continuité

I.4.1 Introduction

Considérons la fonction $f:x\mapsto\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. On a $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Que se passe-t-il lorsque l'on s'approche de 0 ?

Dans le tableau ci-dessous sont données quelques valeurs approchées de $f(x)$ pour x proche de 0.

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$0,01$	$0,1$	1
$f(x)$	$0,459698$	$0,499583$	$0,499996$	$0,499996$	$0,499583$	$0,459698$

Plus x s'approche de 0 plus $f(x)$ semble s'approcher de $0,5$. Ceci peut aussi se voir sur le graphe de f (voir figure I.22).

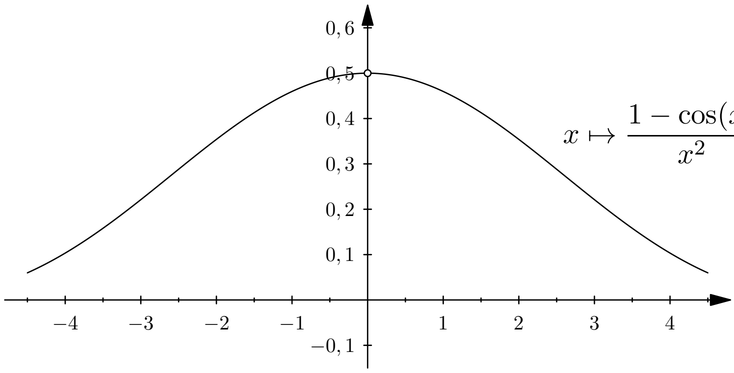


FIGURE I.22 – La fonction n'est pas définie en 0 mais y possède une limite

C'est ce phénomène que l'on souhaite étudier lorsque l'on parle de *limite*. Comment formaliser cette idée que $f(x)$ « s'approche de $0,5$ lorsque x s'approche de 0 » ?

Remarque I.44. Pour simplifier la discussion on rappelle la notion suivante (voir la définition I.1) : on dit qu'une fonction est définie *au voisinage d'un point* x_0 si elle est définie sur un intervalle $]a, b[$ contenant x_0. Dans la suite, on parlera souvent de « fonction définie au voisinage de x_0, *sauf peut-être* en x_0 ». Cela désignera donc une fonction f définie sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$, mais qui peut ne pas être définie au point x_0.
Cette notion simplifiera les énoncés. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est définie au voisinage de 0 sauf en 0.

I.4.2 Limite finie

Définition I.45. *Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel a, sauf peut-être en a et soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que f* **admet** *L* **comme limite en** *a, s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment proche de a.*

Autrement dit, si aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver $r > 0$, tel que pour tout $x \in]a-r, a+r[$ différent de a, on ait $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Remarques I.46.

1. Dans cette définition seules les valeurs très petites de ε ont un intérêt.
2. On définit de manière similaire la notion de *limite à gauche* et de *limite à droite* d'une fonction f en a : par exemple, f admet L comme *limite à gauche* en a s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment proche de *a tout en étant inférieur à a*. Autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]a-r, a[$ on ait $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. On écrit alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = L$. Si f admet L

comme limite en a, alors f admet L comme limite à gauche en a et comme limite à droite en a. Mais attention une fonction peut admettre une limite à gauche L_g en a et une limite à droite L_d en a *sans admettre de limite en* a si $L_g \neq L_d$: par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ admet -1 comme limite à gauche en 0, admet 1 comme limite à droite en 0 mais n'a pas de limite en 0.

I.4.3 Limite infinie

On peut aussi considérer des fonctions telles que $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et s'interroger sur leur comportement au voisinage de 0. À l'aide d'une calculatrice on constate que cette fonction prend des valeurs de plus en plus grandes à mesure que x s'approche de 0. Cet exemple rentre dans le cadre donné dans la définition suivante.

Définition I.47. *Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel a, sauf peut-être en a. On dit que f* **admet $+\infty$ comme limite en** *a, s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut pour tout choix de x suffisamment proche de a.*

Autrement dit, si pour tout $M > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]a - r, a + r[$, $x \neq a$, on ait $f(x) \in]M, +\infty[$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Entraînez-vous ! *Écrire la définition similaire pour évoquer le fait que la limite en a est $-\infty$.*

I.4.4 Limite à l'infini

Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x-1}$. Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et on peut s'interroger sur son comportement lorsque x devient de plus en plus grand, lorsqu'il « s'approche de l'infini ». Voici quelques valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs croissantes de la variable x :

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	4	0,684	0,5176	0,50175	0,50175	0,5000175	0,50000175

Les valeurs prises par la fonction s'approchent de $\frac{1}{2}$, ce que l'on peut aussi voir sur le graphe de la fonction. C'est ce phénomène que nous souhaitons formaliser.
Rappelons (voir définition I.3) qu'une fonction est définie *au voisinage de* $+\infty$ si elle est définie sur un intervalle $]a, +\infty[$.

Définition I.48. *Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f* **admet $L \in \mathbb{R}$ comme limite en $+\infty$**, *s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de L en imposant simplement à x d'être suffisamment grand.*

Autrement dit, si aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver $M > 0$, tel que pour tout réel x tel que $x > M$ on ait $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.
Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Cette situation est illustrée sur la figure I.24. Il y a une définition analogue pour une limite infinie en $+\infty$:

Définition I.49. *Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f* **admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$**, *s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment grand.*

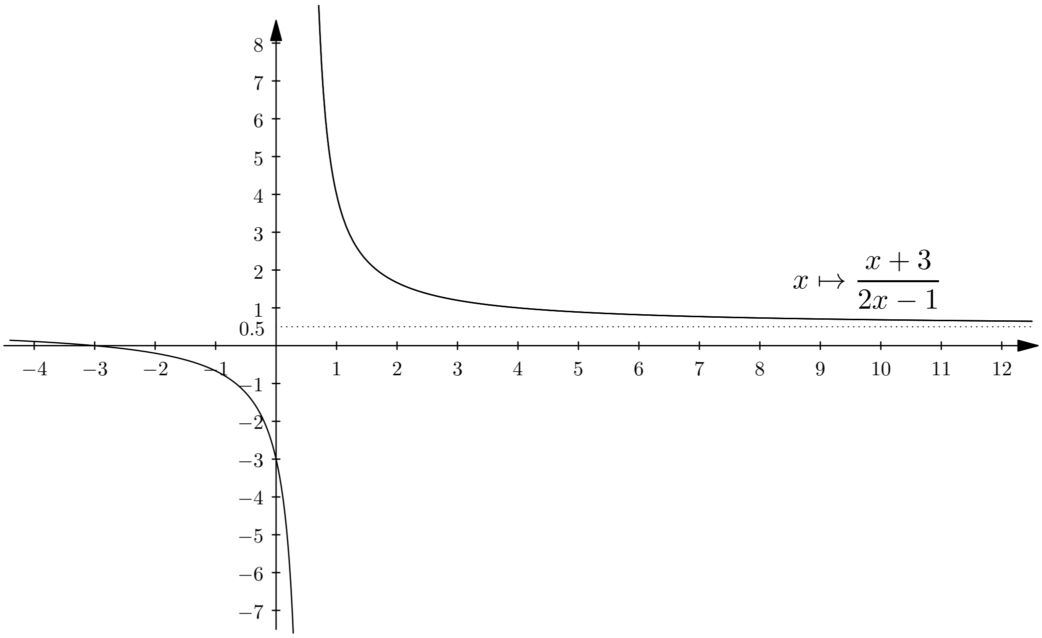


FIGURE I.23 – Les valeurs prises par la fonction $x \mapsto \dfrac{x+3}{2x-1}$ tendent vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$

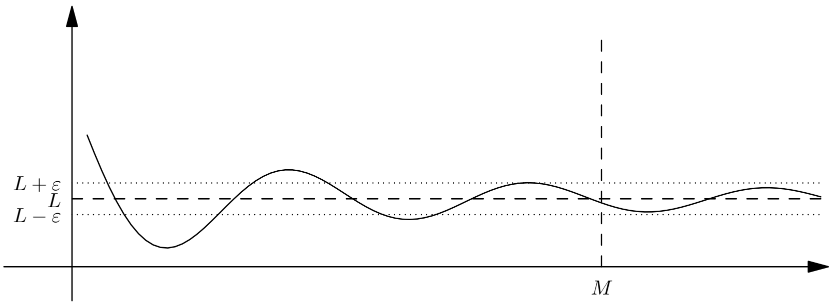


FIGURE I.24 – Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$

Autrement dit, si aussi grand que soit $N > 0$, il est possible de trouver $M > 0$, tel que pour tout réel x tel que $x > M$ on ait $f(x) > N$.

Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $N > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]N, +\infty[$.

On écrit alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Écrire les définitions et illustrer sur des figures les situations suivantes :*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

I.4.5 Propriétés et règles de calcul

Une première propriété, qui peut sembler évidente, mais qui est très importante est la suivante :

Proposition I.50. *Si elle existe, la limite d'une fonction en un point est unique.*

La proposition suivante précise le comportement de la limite par rapport à la composition des fonctions.

Proposition I.51. *Soient f une fonction définie au voisinage d'un réel a sauf peut-être en a, et g une fonction définie au voisinage d'un réel b sauf peut-être en b. On suppose que $f(x)$ est différent de b au voisinage de a, sauf peut-être en a. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$ alors la fonction $g \circ f$ admet une limite en a, et $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.*

Calculer une limite à l'aide de la définition peut s'avérer fastidieux. Dans la majorité des cas on s'en tirera heureusement à l'aide de limites de références (données au §I.4.6) et de « règles de calcul ». Ces dernières sont résumées dans le tableau I.1 où a désigne un nombre réel ou $\pm\infty$ et où f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a sauf peut-être en a.

	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = L' \in \mathbb{R}$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L+L' \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot L' \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{L}{L'} & \text{si } L' \neq 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases} \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } L' > 0 \\ -\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L' > 0 \\ -\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases} \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } L' > 0 \\ +\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } L' > 0 \\ +\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases} \end{array}}$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0 \\ -\infty & \text{si } L < 0 \\ ????? & \text{si } L = 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = ????? \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = ????? \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = ????? \end{array}}$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } L > 0 \\ +\infty & \text{si } L < 0 \\ ????? & \text{si } L = 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = ????? \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = ????? \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = ????? \end{array}}$

Table I.1 – Règles de calcul des limites

Dans le tableau I.1, on a utilisé le symbole ????? pour désigner une « forme indéterminée », c'est-à-dire une situation où ni l'existence de la limite, ni son calcul ne résultent de résultats généraux. Les redondances du tableau peuvent laisser penser qu'il existe de nombreuses formes indéterminées. En fait si on suppose[4] que g garde un signe constant au voisinage de a (lorsque $\lim_{x\to a} g(x) = 0$), il y en a seulement de quatre types différents que par abus de notation, on écrit :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad +\infty - \infty.$$

Remarque I.52. Nous insistons sur le fait que ces formes sont indéterminées dans la mesure où **tous les cas de figure sont possibles** : il peut ne pas y avoir de limite, il se peut aussi qu'elle existe et soit finie, ou encore infinie. Montrons par exemple que chaque situation est possible dans le cas d'une somme de deux fonctions f et g telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$:

1. Si $f(x) = x+1$ et $g(x) = -x$, alors $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = 1$;
2. Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$, alors $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = +\infty$;
3. Si $f(x) = x+\cos(x)$ et $g(x) = -x$, alors $f+g$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Entraînez-vous ! *Trouver, pour chacun des trois autres types de formes indéterminées, des exemples pour lesquels il n'y a pas de limite et des exemples pour lesquels la limite existe mais est finie ou infinie.*

I.4.6 Limites des fonctions usuelles

Dans ce paragraphe, on passe en revue les limites des fonctions usuelles de la section I.3. Toutes les limites ci-dessous sont à connaître, car ce sont à partir d'elles et des règles de calculs (rappelées au paragraphe précédent) que l'on calcule la plupart des limites de fonctions que l'on rencontre. Ce sont elles aussi qui servent souvent à « lever l'indétermination » dans le cas d'une forme indéterminée.

Les fonctions puissances

On a donc les propriétés suivantes :

Proposition I.53. *Les fonctions puissances ont les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha<0 \\ 1 & \text{si } \alpha=0 \\ +\infty & \text{si } \alpha>0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha<0 \\ 1 & \text{si } \alpha=0 \\ 0 & \text{si } \alpha>0 \end{cases}.$$

En particulier, en utilisant les règles de calculs du §I.4.5 et la proposition ci-dessus, on vérifie que pour toute fonction polynomiale $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ et pour tout $a\in\mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$.

Les fractions rationnelles

Soient $P : x \mapsto a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$ et $Q : x\mapsto b_0+b_1x+\cdots b_px^p$ deux fonctions polynomiales, où $a_n\neq0$ et $b_p\neq 0$. On vérifie comme ci-dessus que si $a\in\mathbb{R}$ est tel que $Q(a)\neq0$ alors $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.
On termine ce paragraphe en donnant la liste des limites possibles à l'infini de la fraction rationnelle P/Q (voir le tableau I.2). En fait ces limites à l'infini s'obtiennent en ne considérant dans P

4. Sans cette hypothèse, il convient de rajouter à la liste les formes indéterminées $\frac{\infty}{0}$ et $\frac{L}{0}$ avec $L\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

	Hypothèses sur P et Q
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$	si $n < p$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_p}$	si $n = p$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$	si $n > p$, le signe dépendant de celui de $\dfrac{a_n}{b_p}$ et de la parité de $(n-p)$.

Table I.2 – Limites en $\pm\infty$ des fractions rationnelles

et Q que les termes de plus haut degré. En effet, en factorisant haut et bas respectivement par $a_n x^n$ et $b_p x^p$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_p} x^{n-p} \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)},$$

où $\widetilde{P}(x) = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n x^n} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$ et $\widetilde{Q}(x) = 1 + \dfrac{b_{p-1}}{b_p x} + \cdots + \dfrac{b_0}{b_p x^p} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$ en vertu de la proposition I.53 ci-dessus et des règles de calculs du §I.4.5. Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n}{b_p} x^{n-p}$, justifiant ainsi les résultats du tableau I.2.

Entraînez-vous ! *Écrire la règle précise pour* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *dans le cas* $n > p$*.*

Les fonctions logarithme et exponentielle

Proposition I.54. *La fonction* ln *vérifie les propriétés suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0.$$

Remarque I.55. Un moyen utile pour calculer certaines limites au voisinage de 0 et de $+\infty$ est de se souvenir que « *les puissances l'emportent sur les logarithmes en 0 et en* $+\infty$ ». Cela signifie que lorsqu'on cherche la limite d'une expression contenant des polynômes et des logarithmes, et qu'on est a priori en présence d'une forme indéterminée alors la limite sera donnée par la limite trouvée quand on remplace les logarithmes par la constante 1. Remarquez que c'est le cas des deux dernières limites données.

Proposition I.56. *La fonction* exp *vérifie les propriétés suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

Remarque I.57. Un moyen utile pour calculer certaines limites au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ est de se souvenir que « *les exponentielles l'emportent sur les puissances en* $-\infty$ *et en* $+\infty$ ». Cela signifie que lorsqu'on cherche la limite d'une expression contenant des polynômes et des exponentielles, et qu'on est a priori en présence d'une forme indéterminée alors la limite sera donnée par la limite trouvée quand on remplace les polynômes par la constante 1. Remarquez que c'est le cas des deux dernières limites données.

On a également les deux limites utiles suivantes.

Proposition I.58. *On a*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad et \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$$

I.4.7 Continuité

La notion de continuité peut s'introduire de façon imagée en disant qu'une fonction f est continue sur l'intervalle I si son graphe sur cet intervalle peut se dessiner sans lever le crayon.

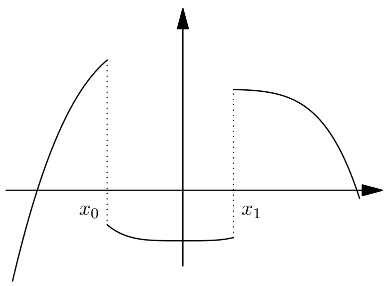


FIGURE I.25 – Graphe d'une fonction qui n'est continue ni en x_0, ni en x_1

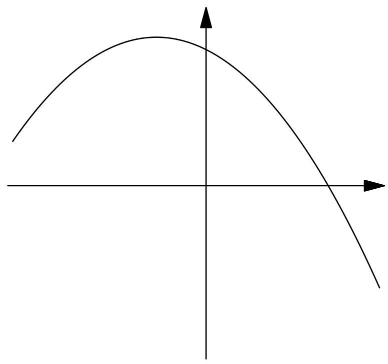


FIGURE I.26 – Graphe d'une fonction continue

La formulation précise de cette idée naïve est la suivante.

Définition I.59. *Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f* **est continue en** *a si elle admet une limite en ce point égale à $f(a)$.*

Définition I.60. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f* **est continue sur** *I si elle est continue en chaque point de I.*

La notion de continuité s'appuyant sur celle de limite, elle en hérite des propriétés. Ainsi

Proposition I.61. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Alors*

1. *La fonction $f+g$ est continue sur I ;*
2. *la fonction fg est continue sur I ;*
3. *si $f(a)\neq 0$ pour tout point a de I, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.*

Enfin la composée de deux fonctions continues est continue, c'est-à-dire que l'on a :

Proposition I.62. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soient $f : I_1 \to I_2$ et $g : I_2 \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur I_1 et si g est continue sur I_2 alors $g\circ f$ est continue sur I_1.*

I.5 Dérivées

La dérivation sert dans la plupart des applications des mathématiques. C'est l'outil le plus pratique pour faire l'étude des variations d'une fonction et la recherche d'extrema. Comme nous allons le voir, l'idée est de remplacer, quand on le peut, la fonction par une approximation affine, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(x)=ax+b$ (dont la courbe représentative est une droite).

I.5.1 Introduction

Voici l'équation donnant l'altitude, en fonction du temps, d'une scorie expulsée par un volcan d'Auvergne lors de sa dernière éruption il y a 6000 ans :

$$h = f(t), \text{ avec } f(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t, \tag{4}$$

où $g = 9,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ est l'accélération due à la pesanteur, $h_0 = 1200\,\mathrm{m}$ est l'altitude du cratère et $v_0 = 30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ est la vitesse verticale d'expulsion de la scorie à l'instant $t = 0\,\mathrm{s}$. Cette équation est simplement celle obtenue à partir des lois de Newton, en négligeant notamment la résistance exercée par l'air.

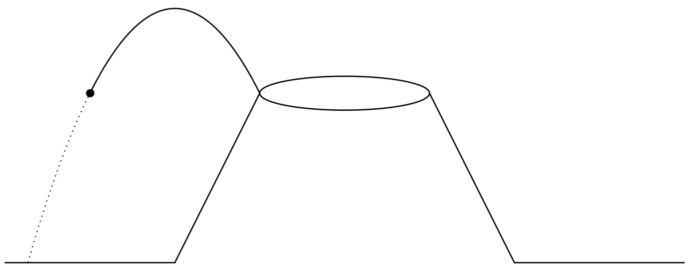


FIGURE I.27 – Trajectoire de la scorie après son expulsion du volcan

Imaginons qu'à l'époque un observateur ait été présent pour faire la mesure de cette altitude en fonction du temps. Voici le tableau de valeurs qu'il aurait pu remplir :

t en s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h en m	1200	$1225,1$	$1240,4$	$1245,9$	$1241,6$	$1227,5$	$1203,6$	$1169,9$	$1126,4$

D'après ces valeurs, on voit que l'altitude maximale de la trajectoire se situe aux environs de 1245 m, à $t = 3\,\mathrm{s}$. Comment déterminer de façon précise ce maximum ? Une approche serait de procéder à des mesures plus fines autour de l'instant $t = 3\mathrm{s}$. On obtiendrait :

t en s	$2,900$	$2,990$	$2,999$	$3,000$	$3,001$	$3,010$	$3,100$
h en m	$1245,791$	$1245,894$	$1245,899$	$1245,900$	$1245,901$	$1245,906$	$1245,911$

On voit donc que $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ n'est pas le moment où l'altitude de la scorie est maximale et que cette méthode n'est pas près de nous fournir la bonne valeur. On peut cependant en déduire la vitesse d'élévation moyenne entre $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ et un autre instant de mesure t en calculant le **taux de variation**, donné par le rapport entre l'écart d'altitude et la durée :

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t) - 1245,9}{t - 3}.$$

Bien sûr, ce rapport ne peut pas être calculé pour $t = 3\,\mathrm{s}$, mais il donne la vitesse d'élévation moyenne v_{moy} entre $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ et tout autre instant de mesure $t \neq 3\,\mathrm{s}$:

t en s	$2,900$	$2,990$	$2,999$	$3,000$	$3,001$	$3,010$	$3,100$
v_{moy} en m.s^{-1}	$1,090$	$0,649$	$0,605$	???	$0,595$	$0,551$	$0,110$

Pour compléter ce tableau, on définit la **vitesse instantanée** à l'instant $t_0 = 3\,\mathrm{s}$, $v_{inst}(t_0)$: c'est la limite (lorsqu'elle existe) de la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t, quand t tend vers t_0. On a donc :

$$v_{inst}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

En utilisant l'expression de f donnée dans (4) on calcule :

$$\begin{aligned} v_{inst}(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - (h_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 + v_0 t_0)}{t - t_0} \\ &= v_0 - \tfrac{1}{2}g \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} \\ &= v_0 - \tfrac{1}{2}g \lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} \\ &= v_0 - gt_0 \end{aligned} \tag{5}$$

On dispose cette fois d'un bon critère pour trouver le point d'altitude maximum : supposons qu'à t_0 la vitesse (d'élévation) instantanée de la scorie soit strictement positive. Alors le taux de variation d'altitude entre t_0 et tout instant suffisamment voisin est strictement positif. En particulier, on peut trouver $t > t_0$ tel que l'altitude $f(t)$ soit plus grande que celle à t_0. Le même raisonnement montre que si la vitesse instantanée à t_0 est strictement négative, l'altitude n'est pas maximale. Ainsi, pour que t_0 soit un instant où l'altitude est maximale, il faut que la vitesse instantanée soit nulle en t_0. On trouve alors facilement que $t_0 = v_0/g = 3,061\,\mathrm{s}$ et que l'altitude maximale est $1245,918\,\mathrm{m}$.
Ainsi, une donnée importante pour étudier une fonction f au voisinage d'un point t_0 est

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite *la dérivée de f au point* t_0, que l'on note $f'(t_0)$. Cette dérivée correspond à la vitesse instantanée en t_0. En physique, la dérivée de f au point t_0 est souvent notée $\dot{f}(t_0)$.

> **Remarque I.63.** Il est clair que l'équation (4) n'est pas valable à tout instant : au bout d'un moment, la scorie retombe sur le sol. Si t_0 est cet instant, on ne peut plus parler de vitesse instantanée en t_0 : la vitesse moyenne entre t_0 et un autre instant changeant brutalement au voisinage de t_0, la limite $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ n'existe pas. La fonction donnant l'altitude de la scorie en fonction du temps n'est pas dérivable en ce point.

I.5.2 Définition et propriétés

Donnons à présent la définition et les règles permettant le calcul de la dérivée :

Définition I.64. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x. On dit que f est* **dérivable** *en x si le quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0. On note alors*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si f est dérivable en chaque point d'un intervalle $]a, b[$, on dit que f est dérivable sur $]a, b[$. On note alors f' la fonction qui à tout réel $x \in]a, b[$ associe le nombre $f'(x)$. Si f est dérivable sur $]a, b[$ et si f' est continue sur $]a, b[$, on dit que f est **continûment dérivable**, *ou encore que f est de* **classe** C^1 *sur $]a, b[$.*

Remarquons que le quotient $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'est rien d'autre que le taux de variation $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ de f entre x et $x+h$.

Remarque I.65. Si le graphe d'une fonction continue peut se dessiner sans lever le crayon, celui d'une fonction dérivable est de plus (on verra au corollaire I.75 qu'une fonction dérivable est en particulier continue) *lisse*, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de « brisure ».

Exemples I.66.

1. Montrons que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en $x_0 = 1$. Déjà, f est définie au voisinage de 1. Puis on a $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$, donc ce taux de variation a bien une limite quand h tend vers 0. On trouve $f'(1) = 2$.
   En fait on peut généraliser ce raisonnement à tout $x \in \mathbb{R}$: puisque $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x+h$, on trouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 2x$.
2. La fonction $f(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ introduite dans la formule (4) est dérivable sur $\mathbb{R}$: les calculs sont faits (voir formule (5)). On a $f'(t) = v_0 - gt$.

I.5.3 Dérivées des fonctions usuelles

Dans le tableau I.3 ci-dessous[5], on a listé les dérivées de la plupart des fonctions usuelles vues à la section I.3. Une autre façon de noter la fonction dérivée de f est : $f' = \frac{df}{dx}$.

Fonction	**Domaine de dérivabilité**	**Dérivée**	**Notation**
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$n \in \mathbb{N}$
x^α	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$	
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	

TABLE I.3 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Attention ! Cette notation ne signifie pas que f' est un quotient, mais rappelle plutôt la définition :

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Poussons l'ambiguïté plus loin : on écrira même $df = f'(x)dx$ pour exprimer que $\Delta f = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$ en 0 (cette notation signifie que $\Delta f - f'(x)\Delta x$ est **négligeable** devant Δx quand Δx tend vers 0, ou plus précisément que le quotient $\frac{\Delta f - f'(x)\Delta x}{\Delta x}$ a pour limite 0 quand Δx tend vers 0). Cette

5. À de rares exceptions près (comme les fonctions valeur absolue ou racine carrée), on n'insistera pas sur les différences (parfois importantes) pouvant exister entre le domaine de définition d'une fonction, son domaine de continuité et celui de dérivabilité.

notation, appelée **notation différentielle**, rendra plus naturelles certaines formules et certaines approximations.

Règles de calculs des dérivées

Dans la pratique, on n'utilise que très rarement la définition à l'aide du taux de variation pour le calcul de la dérivée d'une fonction. On préfère en général décomposer la fonction à dériver en une somme, un produit ou une composée de fonctions usuelles et utiliser le tableau des dérivées des fonctions usuelles ci-dessus. La dérivée cherchée se déduit alors de règles de calculs que l'on donne maintenant.

Théorème I.67. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$. On a :*

1. *la fonction $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $(f+g)' = f' + g'$;*
2. *la fonction $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$;*
3. ***si** g **ne s'annule pas sur** $]a,b[$**,** la fonction $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Corollaire I.68. *Soient f une fonction dérivable sur $]a,b[$, et c un réel.*

1. *La fonction $cf : x \mapsto c \cdot f(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $(cf)' = cf'$;*
2. *si g ne s'annule pas sur $]a,b[$, la fonction $1/g$ est dérivable sur $]a,b[$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.*

Pour démontrer ce théorème, ainsi que le suivant, il suffit d'utiliser les règles de calculs des limites.

Théorème I.69. *Soient $g :]a,b[\to]\alpha,\beta[$ et $f :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors la fonction composée $f \circ g :]a,b[\to \mathbb{R}$ définie par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ est dérivable et $(f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g)$.*

Remarque I.70. La notation différentielle permet de mémoriser facilement la formule précédente, sous la forme d'une dérivation par étapes : f est une fonction de g, donc $df = f'(g)\,\mathrm{d}g$, et g est une fonction de x, donc $dg = g'(x)\,\mathrm{d}x$; si on veut dériver f comme une fonction de x via g, on combine les deux expressions pour trouver : $\mathrm{d}(f \circ g) = f'(g) \cdot g'\,\mathrm{d}x$, ce qui signifie : $(f \circ g)' = \frac{\mathrm{d}(f \circ g)}{\mathrm{d}x} = g' \cdot f'(g)$.

Exemples I.71.

1. Calculons la dérivée de $x \mapsto \tan x$. Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, puisque sin et cos sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on trouve que tan est dérivable en tout point où cos ne s'annule pas, c'est-à-dire : tan est dérivable sur son domaine de définition. Pour mémoire, ce domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé des réels de la forme $\pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ (voir §I.3.6). Puisque $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$, on obtient que si x est dans le domaine de définition de tan, alors
$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$
2. Calculons la dérivée de $g : x \mapsto \cos(\ln x)$. On remarque que g est la composée de $U : x \mapsto \ln x$ et de $f : u \mapsto \cos u$. Puisque f est définie sur tout $\mathbb{R}$, le domaine de définition de g est celui de U, c'est-à-dire $]0,+\infty[$. Les fonctions f et U sont dérivables sur leur domaine de définition, donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$. Enfin, pour $x \in]0,+\infty[$, on a $U'(x) = 1/x$ et pour $u \in \mathbb{R}$ on a $f'(u) = -\sin u$. Puisque $g = f \circ U$ on trouve que pour $x \in]0,+\infty[$, on a $g'(x) = U'(x) \cdot f'(U(x)) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$.

I.5.4 Approximation affine d'une fonction

La propriété fondamentale liée à la dérivabilité d'une fonction est celle de pouvoir faire localement l'approximation de sa courbe représentative par une droite (la tangente) :

Proposition I.72. *Supposons que f est une fonction dérivable en x_0. Alors, pour x suffisamment proche de x_0, on peut écrire f sous la forme :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0), \tag{6}$$

où ε est une fonction, définie au voisinage de 0, telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Autrement dit, l'erreur commise en approximant la valeur de $f(x)$ au voisinage de x_0 par la formule $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est négligeable (voir la définition de ce terme donnée page 35) devant l'écart $x - x_0$.

Remarque I.73. La fonction $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est affine (c'est-à-dire est un polynôme de degré au plus 1) : sa courbe représentative est une droite.
La formule (6) permet donc de faire une estimation pratique de f au voisinage de x_0 avec une formule du type $ax + b$ à partir de $x_0, f(x_0)$ et $f'(x_0)$: les coefficients a et b sont donnés par $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.
En d'autres termes, on peut faire l'approximation de la courbe représentative de f au voisinage de x_0 par une droite. Cette droite est appelée la *tangente à la courbe représentative de f en x_0*. Elle passe par le point $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et a pour pente $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

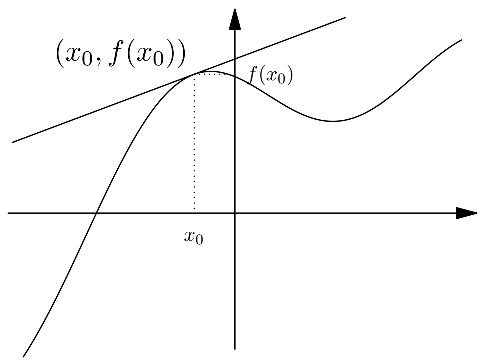


FIGURE I.28 – Au voisinage du point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, le graphe de la fonction f est bien approché par sa tangente

Exemple I.74. Reprenons l'exemple étudié dans l'introduction. Quand on regarde l'écart entre la courbe et la tangente, on voit que plus on zoome sur l'instant t_0, moins on arrive à faire la différence entre la courbe et la tangente.
Nous allons comparer les valeurs de la fonction définie en (4) données dans les deux tableaux de valeurs avec l'**approximation affine** obtenue en utilisant la dérivée à l'instant $t_0 = 3$ s : l'approximation de $f : t \mapsto h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ donnée par (6) pour $t_0 = 3$ est un polynôme du premier degré qui s'écrit :

$$P(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) = h_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 + (v_0 - gt_0)t = 1244,1 + 0,6t.$$

On obtient les valeurs approximatives :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	1200	1225,1	1240,4	1245,9	1241,6	1227,5	1203,6	1169,9	1126,4
$P(t)$	1244,1	1244,7	1245,3	1245,9	1246,5	1247,1	1247,7	1248,3	1248,9

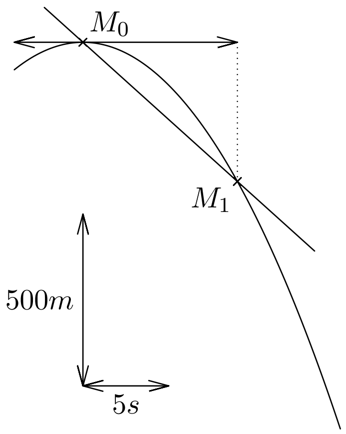


Figure I.29 – $t_1 - t_0 = 9$: l'écart entre la tangente et la courbe est d'environ $400m$ à l'instant t_1

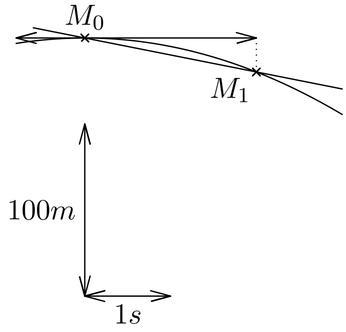


Figure I.30 – $t_1 - t_0 = 2$: l'écart entre la tangente et la courbe est d'environ $20m$ à l'instant t_1

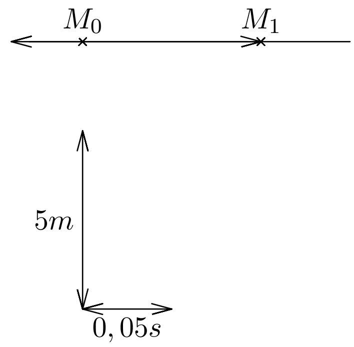


Figure I.31 – $t_1 - t_0 = 0,1$: l'écart entre la tangente et la courbe est d'environ $5mm$ à l'instant t_1 !

où l'on réalise que l'approximation, relativement correcte pour $t = 2$ ou 4, est vraiment grossière pour les valeurs trop éloignées de t_0, alors qu'en faisant les calculs pour des valeurs proches de t_0, on obtient :

t	$2,900$	$2,990$	$2,999$	$3,000$	$3,001$	$3,010$	$3,100$
$f(t)$	$1245,791$	$1245,894$	$1245,899$	$1245,900$	$1245,901$	$1245,906$	$1245,911$
$P(t)$	$1245,840$	$1245,894$	$1245,899$	$1245,900$	$1245,901$	$1245,906$	$1245,960$

ce qui montre la qualité de l'approximation au voisinage de t_0.

En plus de fournir cette formule simple d'approximation, une autre conséquence de (6) s'obtient en l'utilisant pour calculer $\lim_{x \to x_0} f(x)$:

Corollaire I.75. *Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

Remarque I.76. Un exemple classique d'une fonction continue mais non dérivable est celui de la fonction valeur absolue : elle est continue en 0, mais n'y est pas dérivable (le taux d'accroissement a une limite à gauche égale à -1 et une limite à droite égale à 1, comme l'atteste son graphe ; voir figure I.13).

I.6 Étude de fonctions

Dans cette section, on utilise les notions vues précédemment (limites, continuité, dérivabilité) pour étudier plus précisément les fonctions, de façon globale ou localement en certains points particuliers.

I.6.1 Sens de variation et recherche d'extrema

Les figures I.32, I.33 et I.34 suivantes illustrent le fait que le signe du taux de variation d'une fonction (donc le signe de la dérivée, si elle existe, de la fonction) change au passage par un extremum local (voir la définition I.13).

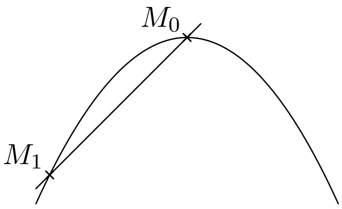


FIGURE I.32 – M_1 est à gauche du maximum M_0 : la pente de M_0M_1 est positive

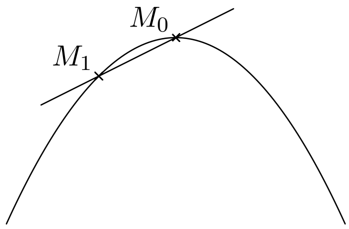


FIGURE I.33 – M_1 se rapproche de M_0 : la pente est moins grande

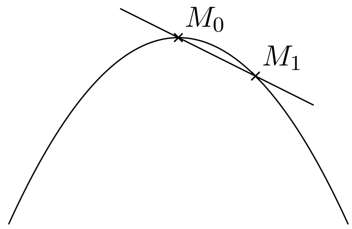


FIGURE I.34 – M_1 a dépassé M_0 : la pente est devenue négative

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *La situation dessinée est celle au passage par un maximum. Faire de même sur un dessin dans le cas d'un minimum.*

Plus généralement, on a le critère suivant :

Théorème I.77. *Soit f une fonction dérivable en a. Pour que a soit un extremum local de f, il faut que $f'(a) = 0$.*

Remarque I.78. S'il faut que la dérivée s'annule pour avoir un extremum local, la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pas un extremum.

En pratique, pour faire l'étude des variations d'une fonction la proposition suivante est très utile :

Proposition I.79. *Supposons que f soit une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$.*

1. *f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est nulle sur $]a, b[$;*
2. *f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est positive ou nulle sur $]a, b[$.*
3. *f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est négative ou nulle sur $]a, b[$.*
4. *Si f' est strictement positive sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.*
5. *Si f' est strictement négative sur $]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.*

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Montrer que pour $x > 0$ on a $\ln x \leq x-1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.*

RÉPONSE Posons $f(x) = \ln x - (x - 1)$. C'est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1/x - 1$. Autrement dit f' s'annule en 1, prend des valeurs strictement positives sur $]0, 1[$ et strictement négatives sur $]1, +\infty[$. Comme f est continue sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ contenu dans $]0, +\infty[$, on en déduit le tableau de variations suivant. Puisque $f(1) = 0$, l'inégalité est prouvée. Pour les cas d'égalité, on a déjà

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

FIGURE I.35 – Tableau de variations de la fonction f

observé que $f(1) = 0$. Soit $x \geq 1$ tel que $f(x) = 0$. Comme f est décroissante sur $[1, x]$ et que $f(1) = f(x)$, elle doit y être constante. Si $x > 1$, cela implique par la proposition précédente que f' s'annule ailleurs qu'en 1, ce qui est impossible. On raisonne de la même manière pour montrer que f ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

I.6.2 Concavité, convexité, point d'inflexion

On a défini à la section I.5 la dérivée f' d'une fonction dérivable f. Si f' est elle-même dérivable, on dit que f est deux fois dérivable et on note f'' la dérivée de f'. On l'appelle *dérivée seconde* de f. Tant que la fonction obtenue est dérivable, on peut réitérer ce processus. On obtient ainsi un ensemble de fonctions appelées dérivées successives de f : $f', f'' = (f')', f^{(3)} = f''' = (f'')', f^{(4)} = (f^{(3)})', \ldots$

Définition I.80. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* **convexe** *si « son graphe est tourné vers le haut », c'est-à-dire si quels que soient les points A et B de son graphe, le segment $[AB]$ est entièrement situé au-dessus de son graphe.*

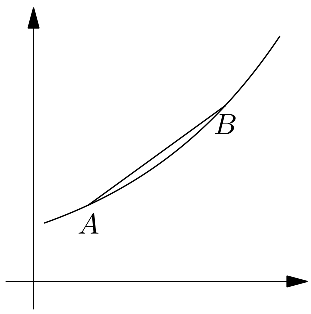


FIGURE I.36 – Graphe d'une fonction convexe

Dans la situation inverse, on parle de fonction concave :

Définition I.81. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* **concave** *si « son graphe est tourné vers le bas », c'est-à-dire si quels que soient les points A et B de son graphe, le segment $[AB]$ est entièrement situé en dessous de son graphe.*

La caractérisation suivante des fonctions convexes est utile dans la pratique.

Proposition I.82. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*

1. *Si f est dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.*
2. *Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles.*

On a bien entendu une caractérisation équivalente des fonctions concaves :

Proposition I.83. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*

1. *Si f est dérivable sur I, alors f est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante.*
2. *Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est concave si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles.*

Exemples I.84.

1. La fonction ln $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est concave : sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ qui ne prend que des valeurs négatives sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction exp en revanche est convexe sur $\mathbb{R}$: elle est égale à sa dérivée seconde et ne prend que des valeurs positives.
3. Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont convexes et concaves à la fois. Lorsque $n \geq 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $[0, +\infty[$.

Définition I.85. *Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que f présente un* **point d'inflexion** *en x_0 si f est concave sur $[a, x_0]$ et convexe sur $[x_0, b]$ ou inversement.*

À l'aide des propositions ci-dessus on a une caractérisation des points d'inflexion.

Proposition I.86. *Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$. Alors f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.*

Remarque I.87. Les points d'inflexion renseignent sur l'allure locale d'une courbe et leur connaissance permet un tracé plus précis. En chimie, lors d'un dosage d'un acide par une base, le pH augmente. La courbe est montante et présente un point d'inflexion à l'équivalence.

Chapitre II

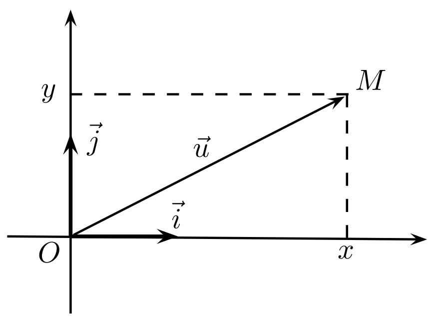
Vecteurs et fonctions de plusieurs variables

II.1 Vecteurs du plan

Pour se repérer dans le plan, on se donne deux axes (droites orientées) perpendiculaires qui se coupent en un point O. On note ces axes Ox, Oy, et on suppose que sur chacun est définie une unité de même longueur. Ils constituent un **repère orthonormé**.
Soit $\vec{i}$ le vecteur sur Ox de même sens que Ox et de longueur 1 ; et $\vec{j}$ le vecteur sur Oy de même sens que Oy et de longueur 1. La famille $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est appelée la **base canonique**, car les coordonnées, les distances et les angles sont calculés à partir de cette base. Ces deux vecteurs déterminent un **carré unité**, de côté 1, dont l'aire est égale à 1 unité d'aire.
Tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire de façon unique comme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Les nombres réels x et y sont les **composantes** de $\vec{u}$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, ou encore, les **coordonnées** du point M du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.



Cas particulier : le **vecteur nul** $0\vec{i} + 0\vec{j}$ s'écrit $\vec{0}$.

Pente d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Si $y = 0$, $\vec{u}$ est parallèle à Oy (il est **vertical**). Si $y \neq 0$, sa **pente** est le nombre réel y/x. Un vecteur de pente nulle est **horizontal**.

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, ce qui avec les composantes s'écrit $x_1 = \lambda x_2$ et $y_1 = \lambda y_2$. Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs.

Exemple II.1. Les vecteurs $\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$ et $-\sqrt{2}\vec{i} + 2\vec{j}$ sont colinéaires.

II.1.1 Produit scalaire dans le plan

Définition II.2. *Le* **produit scalaire** *de deux vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ est le nombre réel*

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

On a toujours $\vec{i}.\vec{j} = 0$ et $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = 1$.
Les propriétés suivantes se vérifient directement en utilisant la définition :

Proposition II.3. *Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs quelconques du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors*
– *$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (commutativité) ;*
– *$(\overrightarrow{\lambda u}).\vec{v} = \lambda\,(\vec{u}.\vec{v})$;*
– *$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ (distributivité par rapport à l'addition) ;*
– *$\vec{u}.\vec{u} \geq 0$.*

Définition II.4. *La* **norme** *(ou* **longueur***) d'un vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel positif*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on obtient donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

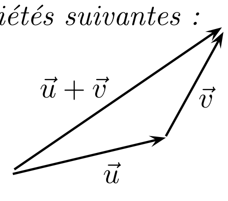
Le résultat suivant sera utile :

Proposition II.5. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a*

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|. \tag{1}$$

Entraînez-vous ! *Supposons qu'aucun des deux vecteurs n'est nul. Montrer que l'inégalité 1 devient une égalité si, et seulement si, les deux vecteurs sont colinéaires.*

Proposition II.6. *La norme vérifie les propriétés suivantes :*
1. *$\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$;*
2. *$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$;*
3. *$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.*



Démonstration Les deux premières propriétés sont simples à vérifier. La troisième est appelée l'**inégalité du triangle**. Elle se démontre en utilisant la proposition précédente, car

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2. \quad \blacksquare$$

Entraînez-vous ! *Démontrer l'égalité*

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \tag{2}$$

Réponse Il suffit de développer : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$.

II.1.2 Divers emplois du produit scalaire dans le plan

Orthogonalité

Cette notion correspond à celle de **perpendicularité** en géométrie.

Définition II.7. *Deux vecteurs sont* **orthogonaux** *si leur produit scalaire est nul.*

C'est le cas des vecteurs de la base canonique. On sait que de plus $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de longueur 1, de sorte que la famille $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est appelée une **base orthonormée** du plan.
D'une façon générale, une famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de vecteurs forme une **base orthonormée** du plan si ces deux vecteurs sont orthogonaux et de norme 1, autrement dit si

$$\vec{u}.\vec{v} = 0, \quad \vec{u}.\vec{u} = \vec{v}.\vec{v} = 1.$$

Tout vecteur $\vec{w}$ du plan peut alors s'écrire de façon unique comme $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

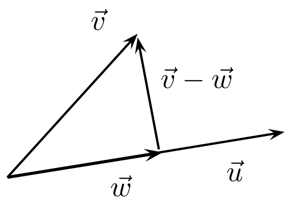
Proposition II.8. *Dans une base orthonormée $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, tout vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire*

$$\vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{u} + (\vec{v}.\vec{w})\,\vec{v}.$$

Démonstration Si l'on écrit $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, on vérifie que $\vec{u}.\vec{w} = x$ et que $\vec{v}.\vec{w} = y$. ■

Projection orthogonale

On suppose que $\vec{u}$ est un vecteur du plan non nul. La **projection orthogonale** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{w}$ qui remplit les deux conditions suivantes :
– $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$;
– $\vec{v} - \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$.



Proposition II.9. *Si $\vec{w}$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ alors $\vec{w} = \lambda\vec{u}$ où $\lambda = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$. En particulier on a*

$$\|\vec{w}\| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|}. \tag{3}$$

Démonstration On sait que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, donc il existe un réel λ tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u}$ car $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.
De plus $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux, donc $0 = \vec{u}.(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} - \lambda\vec{u}) = \vec{u}.\vec{v} - \lambda\|\vec{u}\|^2$. Ceci permet de trouver la valeur de λ.
La norme de $\vec{w}$ s'en déduit immédiatement. ■

Distance entre deux points

Soient $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à $(x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$.
La **distance** entre A et B est la norme de ce vecteur $\overrightarrow{AB}$, soit

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4}$$

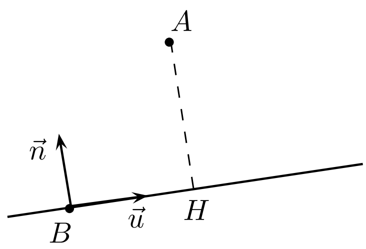
Ceci permet de calculer l'équation d'un cercle de centre $C(x_0, y_0)$ et de rayon R : c'est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) vérifiant l'égalité $\operatorname{dist}(C, M) = R$, soit encore

$$\|\overrightarrow{CM}\|^2 = R^2.$$

On obtient $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite déterminée par un point $B(x_2, y_2)$ et par un vecteur directeur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Un point $A(x_1, y_1)$ se projette perpendiculairement sur (D) en un point H : H est l'unique point de la droite (D) tel que le vecteur $\vec{BH}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{BA}$ sur $\vec{u}$. La distance de A à (D) est égale à la norme de $\overrightarrow{HA}$.



Pour calculer cette norme, on peut utiliser un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$: par exemple $\vec{n} = -b\vec{i}+a\vec{j}$, qui vérifie bien $\vec{n}.\vec{u} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{HA}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{BA}$ sur $\vec{n}$. D'après l'équation 3, $\|\overrightarrow{HA}\| = |\vec{n}.\overrightarrow{BA}|/\|\vec{n}\|$. On obtient donc

$$\mathrm{dist}(A, (D)) = \frac{|-b(x_1 - x_2) + a(y_1 - y_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{5}$$

Entraînez-vous ! *Calculer la distance du point $A(1, 2)$ à la droite passant par $B(1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j}$.*

Réponse Les calculs donnent $\vec{n} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{j}$, $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$. On en déduit que $\mathrm{dist}(A, (D)) = \sqrt{2}$.

Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan. Ils sont colinéaires s'ils ont même pente, ou bien s'ils sont tous deux verticaux.
Donnons une autre caractérisation de la colinéarité :
Le vecteur $\vec{n} = -y_1\vec{i} + x_1\vec{j}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Cette condition se traduit par l'égalité $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Définition II.10. *La quantité $x_1y_2 - x_2y_1$ est appelée le* **déterminant** *des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (relativement à la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$). On peut la noter de différentes façons :*

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \det(\vec{u}, \vec{v}) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

On a donc le résultat suivant :

Proposition II.11. *Dans le plan, deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.*

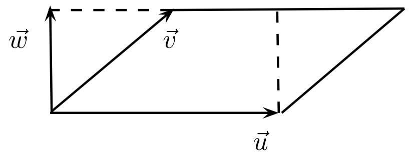
On en tire directement une condition pour que 3 points A, B, C du plan soient alignés : il faut, et il suffit, que le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ soit nul.

Aire d'un parallélogramme

On se donne deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En géométrie, on peut construire un parallélogramme (P) sur ces deux vecteurs en leur donnant même origine. Par exemple, posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Le parallélogramme a pour sommets A, B, D, C, où le point D est défini par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Proposition II.12. *L'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs est égale à la valeur absolue de leur déterminant.*

Démonstration Soient $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$, et $\vec{w}$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{n}$. L'aire de (P) est égale à $\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|$.



Soient $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. On peut prendre $\vec{n} = -y_1\vec{i} + x_1\vec{j}$ de façon que $\|\vec{n}\| = \|\vec{u}\|$. On obtient

$$\vec{w} = \frac{\vec{n}.\vec{v}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n},$$

donc $\|\vec{w}\| = |\vec{n}.\vec{v}|/\|\vec{n}\|$. Et finalement $\text{Aire}(P) = |\vec{n}.\vec{v}| = |x_1y_2 - x_2y_1|$. ■

Entraînez-vous ! *Soient trois points $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,4)$. Calculer l'aire du triangle ABC.*

Réponse On obtient $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + 3\vec{j}$. L'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 6 - 1 = 5$. L'aire du triangle est donc $5/2$.

Angle de deux vecteurs du plan

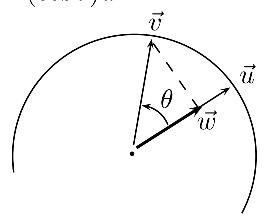
Proposition II.13. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Appelons θ l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Alors*

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\theta.$$

Démonstration Supposons d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de norme 1. Appelons $\vec{w}$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. On a

$$\vec{w} = (\cos\theta)\vec{u}$$

(voir la figure).



Par ailleurs, la proposition II.9 permet d'écrire $\vec{w} = (\vec{u}.\vec{v})\vec{u}$. En identifiant, on obtient $\vec{u}.\vec{v} = \cos\theta$.
Si les normes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sont quelconques, les vecteurs $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ et $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ sont de norme 1, et forment le même angle θ, de sorte que

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta.$$

Ceci permet d'obtenir la formule cherchée. ■

On peut vérifier aussi que $\sin\theta = \dfrac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

Equation d'une droite

L'approche est différente selon la façon dont la droite (D) est décrite. Il faudra se donner au moins un point, qui est sur la droite. Mais on aura besoin d'une information supplémentaire, qui pourra être un autre point, un vecteur **directeur** (c'est-à-dire un vecteur de même pente que (D)), ou un vecteur **normal** (c'est-à-dire un vecteur orthogonal à un vecteur directeur de (D)).

Vecteur normal : La droite (D) passe par le point $A(x_0, y_0)$ et elle a pour vecteur normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
Un point $M(x, y)$ appartient à la droite (D) si et seulement si

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0.$$

L'équation de la droite s'écrit alors $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Vecteur directeur : La droite (D) passe par le point $A(x_0, y_0)$ et elle a pour vecteur directeur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
On va donner trois méthodes pour obtenir l'équation de la droite.

1. Calculer un vecteur normal : si $\vec{n} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ alors $\vec{n}.\vec{u} = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$, donc normal à (D). On utilise le cas précédent pour obtenir l'équation de la droite (D) :

$$-b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0.$$

2. Comparer des pentes des vecteurs : si $a \neq 0$ ($\vec{u}$ n'est pas " vertical "), la pente de $\vec{u}$ est b/a. Or deux vecteurs colinéaires ont même pente. Si $M(x, y)$ est un point de (D) différent du point A alors la pente de $\overrightarrow{AM} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$ est $(y - y_0)/(x - x_0)$. Comme $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, l'équation de la droite (D) peut s'écrire

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a}.$$

3. Trouver les équations paramétriques : si $M(x, y)$ est un point de (D) alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Pour chaque point M de (D) il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui donne

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$

Ce sont les équations **paramétriques** de la droite. En éliminant la variable t dans ce système on trouve la relation cherchée entre x et y (équation **cartésienne**).
Si par exemple $a \neq 0$, on obtient $t = (x - x_0)/a$ et

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Autre point : La droite D passe par deux points distincts $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1)$. Supposons $x_0 \neq x_1$ (sinon la droite est parallèle à Oy, et son équation s'écrit $x = x_0$). Si $M(x, y)$ est un point de (D) différent du point A alors les pentes de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{AB}$ valent $(y-y_0)/(x-x_0)$ et $(y_1-y_0)/(x_1-x_0)$ respectivement. Comme ces deux vecteurs sont colinéaires, l'équation de (D) peut s'écrire

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Une autre façon, dans ce cas, de trouver l'équation de cette droite est d'écrire que le déterminant de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{AB}$ est nul, ce qui donne

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

II.2 Vecteurs de l'espace

En ce qui concerne ce cours il n'y a guère de changement entre les dimensions 2 et 3. Pour se repérer dans l'espace il faut se donner 3 axes perpendiculaires deux à deux Ox, Oy, Oz et trois vecteurs directeurs de même longueur $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de ces trois axes. A eux trois ils définissent l'unité de volume.
La famille $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est appelée la **base canonique**, et tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace peut s'écrire de façon unique comme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

où x, y, z sont les composantes de $\vec{u}$.
Tout point M de $\mathbb{R}^3$ a trois coordonnées, qui sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Mais on peut aussi repérer un point de l'espace avec deux coordonnées et une valeur d'angle, une distance et deux valeurs d'angle, etc. L'espace $\mathbb{R}^3$ est donc un espace à **trois degrés de liberté**.

II.2.1 Produit scalaire en dimension 3

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{u} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ est le nombre réel

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

La norme de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$. Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Les équations (1), (2), (3) restent vraies. Mais certains changements, dûs à la dimension supplémentaire, interviennent dans les applications. En particulier on ne peut pas parler du déterminant de 2 vecteurs, un point et un vecteur normal déterminent un plan et non une droite, etc...

Distance entre deux points de l'espace

La distance entre $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$ est

$$\text{dist}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ceci permet de calculer l'équation d'une sphère de centre $C(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R : c'est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) vérifiant l'équation $\text{dist}(C, M) = R$, soit encore

$$\|\overrightarrow{CM}\|^2 = R^2.$$

On obtient $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Distance d'un point à une droite

Le point $A(x_1, y_1, z_1)$ se projette perpendiculairement sur une droite (D) repérée par un point $B(x_2, y_2, z_2)$ et un vecteur directeur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. On ne peut utiliser ici la technique précédente, car il existe une infinité de directions orthogonales à $\vec{u}$. Il faut plutôt procéder en deux étapes :
– On construit le vecteur $\overrightarrow{BH}$ qui est la projection orthogonale de $\overrightarrow{BA}$ sur $\vec{u}$: $\overrightarrow{BH} = \lambda\vec{u}$, avec

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{BA}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2};$$

– On en déduit les coordonnées du point H sur (D), puis la norme $\|\overrightarrow{AH}\|$ qui est la distance demandée.

Entraînez-vous ! *On donne un point $A(2,3,1)$ et une droite (D) passant par $B(1,-2,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Calculer la distance de A à (D).*

Réponse On calcule successivement $\overrightarrow{BA} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\overrightarrow{BA}.\vec{u} = 1 + 5 = 6$, $\|\vec{u}\|^2 = 3$, $\lambda = \frac{6}{3} = 2$.
Donc $\overrightarrow{BH} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. On en déduit les coordonnées de H : $H(3,0,-1)$, et le vecteur $\overrightarrow{AH} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.
La distance demandée est $\sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$.

Equation d'un plan

Un plan (P) est déterminé complètement par un point A du plan et un vecteur $\vec{u}$ normal au plan : le plan passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et normal au vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0.$$

Une équation du plan est donnée par

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Equations d'une droite

En dimension 3 une droite est l'intersection de deux plans non parallèles. Elle peut être déterminée par un système du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

où les vecteurs $a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ et $a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ ne sont pas colinéaires. Remarquons qu'il existe une infinité de tels systèmes qui déterminent la même droite.
Si la droite passe par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, on peut donner sa **représentation paramétrique** : la droite est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels qu'il existe un réel t vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui se traduit par le système

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

de 3 équations à 4 inconnues x, y, z, t. En éliminant la variable t on se retrouve avec un système de 2 équations à 3 inconnues, c'est-à-dire deux équations de plan comme ci-dessus.

Entraînez-vous ! *On donne le point $A(1,2,-1)$ et le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Trouver deux plans dont l'intersection est la droite (D) passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$.*

Réponse Les équations paramétriques de (D) sont $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$. On tire t de la 1ère équation : $t = x - 1$, et on le remplace dans les deux suivantes, qui deviennent

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de deux plans qui se coupent en (D). On peut vérifier que le point A appartient bien à ces deux plans.

Inversement on aimerait pouvoir passer de la représentation d'une droite par deux plans à une représentation paramétrique. Autres questions : donner une condition simple de colinéarité entre deux vecteurs, trouver l'équation d'un plan passant par trois points donnés, etc... Pour cela on va introduire un outil nouveau et très efficace : le produit vectoriel.

II.2.2 Produit vectoriel en dimension 3

Le produit **scalaire** de deux vecteurs est un nombre réel, le produit **vectoriel** est un vecteur.

Attention ! Le produit vectoriel ne se définit qu'en dimension 3.

Définition II.14. *Dans la base canonique* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$*, le produit vectoriel de deux vecteurs* $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ *et* $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ *est le vecteur*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}. \tag{7}$$

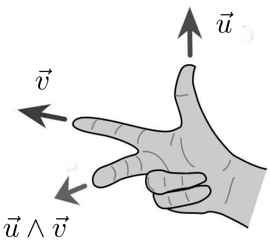
Les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ peuvent sembler un peu compliquées, mais on voit qu'il suffit d'en retenir une : les autres s'en déduisent par **permutation circulaire** (on remplace x par y, y par z, et z par x).
On remarque aussi que ces composantes sont des déterminants. Pour en retrouver la formulation, on peut s'aider du tableau ci-dessous :

x_1	x_2
y_1	y_2
z_1	z_2
x_1	x_2
y_1	y_2

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}\vec{i} + \det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}\vec{j} + \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\vec{k}$$

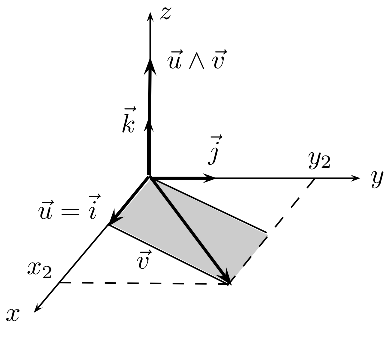
Propriétés géométriques

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
2. Direction : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
3. Sens : la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est orientée de manière **directe** (voir la “ règle de la main droite ” ci-dessous) ;



4. Norme : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration Pour la direction, il est facile de vérifier, à l'aide des composantes, que les produits scalaires $\vec{u}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$ et $\vec{v}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$ sont nuls.
Nous ne donnons pas le détail des autres démonstrations. Mais considérons le cas typique où $\vec{u} = \vec{i}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, avec $y_2 \neq 0$:



Le calcul donne $\vec{u} \wedge \vec{v} = y_2\vec{k}$. On vérifie aisément que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Si $y_2 > 0$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est dans le sens de $\vec{k}$; si $y_2 < 0$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est dans le sens contraire, ce qui correspond bien à l'orientation directe. Enfin, comme la troisième composante de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nulle, l'aire du parallélogramme formé sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\right| = |y_2| \ :$$

c'est bien la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. ■

Remarque II.15. La norme $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est minimale (égale à 0) lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Par ailleurs, cette norme est maximale lorsque les deux vecteurs sont orthogonaux.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *On se donne trois points O, $A(0,1,1)$ et $B(1,0,2)$. Trouver l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.*

RÉPONSE Avec $\overrightarrow{OA} = \vec{j} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + 2\vec{k}$, on obtient $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, donc cette aire vaut $\sqrt{6}$.

Propriétés algébriques

Elles se vérifient aisément en utilisant les composantes du produit vectoriel :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$;
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$;
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

II.2.3 Divers emplois du produit vectoriel

Points alignés

Considérons 3 points A, B, C distincts. Ils sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Pour cela, une condition nécessaire et suffisante est que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Equation d'un plan

Soit un plan (P) passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et contenant deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Leur produit vectoriel est normal (perpendiculaire) à (P). Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, l'équation de (P) est

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

On peut de cette façon obtenir l'équation d'un plan passant par trois points A, B, C : en effet ce plan passe par A et il est normal à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Trouver l'équation du plan passant par O, $A(0,1,1)$ et $B(1,0,2)$.*

RÉPONSE Ce plan passe par O et il est normal à $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Son équation est donc $2x + y - z = 0$.

Points coplanaires

Considérons 4 points A, B, C, D. Si trois d'entre eux sont alignés, ils appartiennent tous à un même plan. Sinon, les trois premiers appartiennent au plan (P) passant par A et normal à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Donc les 4 points appartiennent à un même plan si, et seulement si, $D \in (P)$, ou encore : $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. On en déduit le résultat suivant :

Proposition II.16. *Les quatre points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si,*

$$\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0.$$

Le réel $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ est appelé **produit mixte** des trois vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

II.2.4 Le produit mixte

Définition II.17. *Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est le nombre réel*

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Attention ! Le résultat du produit mixte dépend de l'ordre dans lequel sont placés les vecteurs.

En posant

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}, \vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k},$$

le produit mixte se développe ainsi :

$$x_1y_2z_3 - x_1z_2y_3 + y_1z_2x_3 - y_1x_2z_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3.$$

On peut vérifier sans difficulté qu'il peut aussi s'écrire

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v}.(\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\vec{u}.(\vec{w} \wedge \vec{v}) = -\vec{v}.(\vec{u} \wedge \vec{w}) = -\vec{w}.(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

On remarque qu'il est **invariant par une permutation circulaire**.
En général le produit mixte est appelé le **déterminant** des trois vecteurs, et on le note

$$\vec{u}.(\vec{v}.\vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

Vous en apprendrez plus sur les déterminants dans un cours sur les espaces vectoriels. Il est utile de les faire apparaître dans certains cas qui nous intéressent :

Vecteurs coplanaires

Comme on l'a vu, 4 points A, B, C, D appartiennent à un même plan si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.
Donc trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires (parallèles à un même plan) si leur déterminant est nul.

Equation d'un plan

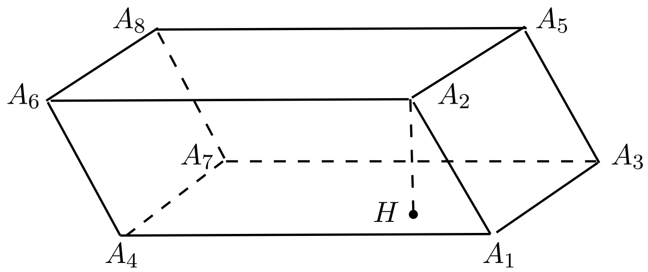
On considère un plan (P) passant par le point A et contenant deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$: un point M appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. L'équation de (P) peut donc s'écrire

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Volume d'un parallélépipède

On se donne quatre points distincts non coplanaires A_1, A_2, A_3 et A_4. On en construit quatre autres A_5, A_6, A_7 et A_8, tels que

$\overrightarrow{A_1A_5} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_6} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_7} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_8} = \overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_1A_4}$



Ces huit points sont les sommets d'un **parallélépipède** (figure dont les 6 faces sont des parallélogrammes). Soient (P_1) le parallélogramme de sommets A_1, A_3, A_4, A_7, et H la projection orthogonale du point A_2 sur le plan contenant (P_1). Le volume du parallélépipède est

$$\|\overrightarrow{HA_2}\|(\text{Aire}(P_1)) = \|\overrightarrow{HA_2}\| \, \|\overrightarrow{A_1A_3} \wedge \overrightarrow{A_1A_4}\| = |\overrightarrow{A_1A_2}.(\overrightarrow{A_1A_3} \wedge \overrightarrow{A_1A_4})|.$$

D'où le résultat :

Proposition II.18. *Le volume d'un parallélépipède construit sur trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est égal à $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.*

Entraînez-vous ! *Soient $A(1,1,0)$, $B(0,2,1)$ et $C(0,0,1)$. Montrer que le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ est égal à 2.*

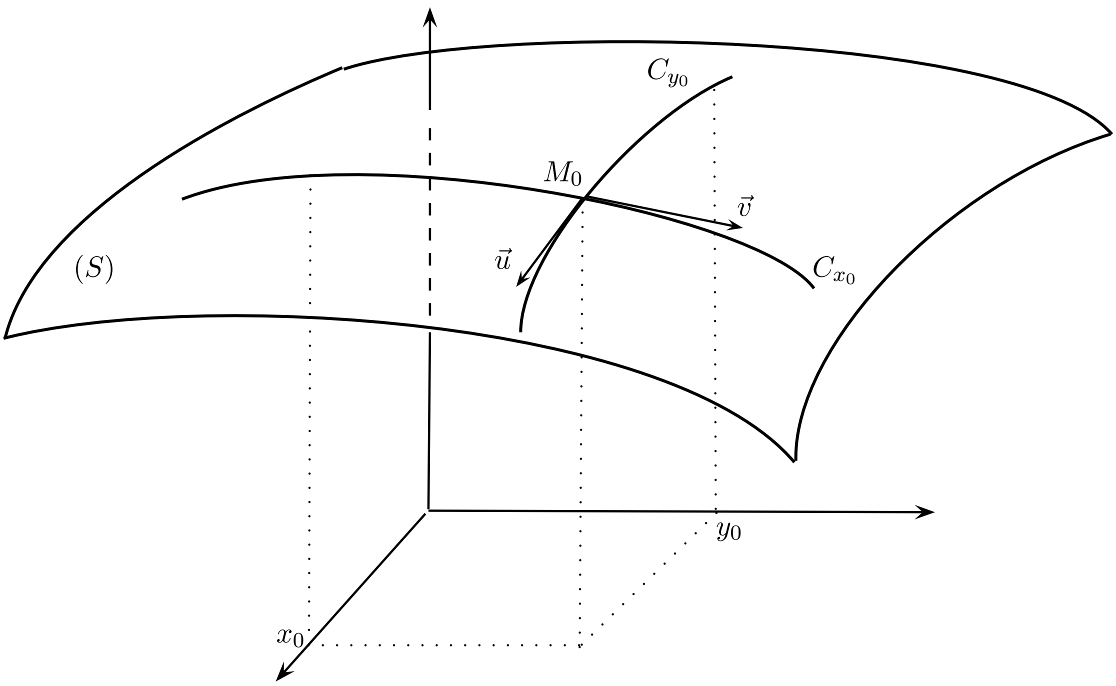
II.3 Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions de plusieurs variables interviennent dans tous les domaines scientifiques.

Exemples II.19.
1. Si un randonneur lit sa position sur une carte, elle peut être repérée par des coordonnées (x, y). Son altitude z dépend de x et de y : c'est une fonction de deux variables, que l'on peut donc noter $z(x, y)$.
2. La température d'une salle dépend du point où on la mesure. Si un repère cartésien a été défini, il s'agit donc d'une fonction de trois variables $T(x, y, z)$.
3. La loi des gaz parfaits relie la pression P, le volume V, et la température T d'un gaz. Elle peut s'écrire
$$PV = nRT,$$
où R est la constante des gaz parfaits et n la quantité de matière. On peut donc considérer P comme une fonction de deux variables :
$$P = P(V, T) = nR\frac{T}{V},$$
si n est supposée constante, ou bien comme une fonction de trois variables : $P = P(V, T, n)$, si n est prise comme variable.
4. La formule de Dubois de la surface du corps humain (en m^2) s'énonce ainsi :
$$S = 0,007184\, T^{0,725}\, P^{0,425}$$
où T est la taille en cm et P le poids en kg. A ce titre, S est une fonction de deux variables.

II.3.1 Fonctions de 2 variables

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables. Dans l'espace de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, la **surface représentative** de f est l'ensemble (S) des points de coordonnées (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$.
On ne peut faire dans ce paragraphe une introduction générale aux propriétés de continuité ou de dérivabilité d'une telle fonction f. Notre propos est seulement d'établir la notion de dérivée partielle qui est utile dans tous les domaines scientifiques.
Fixons x_0 : la fonction $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ est une fonction d'une seule variable, et à ce titre on peut parler de sa courbe représentative. C'est la projection sur $\mathbb{R}^2$ de la courbe C_{x_0} de l'espace qui est l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = x_0$ (voir la figure ci-après).
De même, si l'on fixe y_0, la fonction $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ a une courbe représentative, qui correspond à la courbe C_{y_0} de l'espace, intersection de (S) avec le plan d'équation $y = y_0$.
Les deux courbes C_{x_0} et C_{y_0} se coupent au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ où $z_0 = f(x_0, y_0)$.



Dérivées partielles

Il se peut que f_{x_0} et f_{y_0} soient dérivables. En revanche on ne parle pas de la dérivée de f. On remplace cette notion par celle de **dérivée partielle**.

Définition II.20. *Les* **dérivées partielles** *de f en (x_0, y_0) sont les dérivées $f'_{y_0}(x_0)$ et $f'_{x_0}(y_0)$, si elles existent. On les note*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= f'_{y_0}(x_0) &&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= f'_{x_0}(y_0) &&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ on fixe la variable y et on dérive par rapport à x ; et pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ on fixe la variable x et on dérive par rapport à y. Remarquons que ces dérivées partielles sont de nouvelles fonctions de deux variables.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Calculer les dérivées partielles du potentiel de gravitation* $\dfrac{1}{r}$*, où* $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

RÉPONSE On fixe y : $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2)^{(-1/2)} = -x(x^2+y^2)^{(-3/2)}$. On fixe x : $\dfrac{d}{dy}(x^2+y^2)^{(-1/2)} = -y(x^2+y^2)^{(-3/2)}$. Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}.$$

Si l'on veut écrire avec précision : ce sera plutôt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{x_0}{[r(x_0,y_0)]^3}$$

mais avec les dérivées partielles on a vite fait d'obtenir des formules longues comme le bras... Ce qui ne gêne pas trop les mathématiciens. En général on préfère les formules condensées, qui sont faciles à interpréter, mais qui comportent des risques d'erreur sur les variables.

Vecteurs tangents à la surface représentative

On suppose que f est **de classe** C^1, c'est-à-dire que ses dérivées partielles existent et sont continues. On considère deux réels x_0 et y_0. Soit $z_0 = f(x_0,y_0)$.
Dans le plan Oxz muni du repère orthonormé $\{\vec{i},\vec{k}\}$, la courbe représentative de f_{y_0} admet une tangente en (x_0,y_0). Dans l'espace de dimension 3, la courbe C_{y_0} est tracée dans le plan $y = y_0$ et elle admet une tangente, de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{k}$.
De même, dans le plan $0yz$ muni du repère orthonormé $\{\vec{j},\vec{k}\}$, la courbe représentative de f_{x_0} admet une tangente en (x_0,y_0). Dans l'espace de dimension 3, la courbe C_{x_0} est tracée dans le plan $x = x_0$ et elle admet une tangente, de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{k}$.
Si l'on compare (S) à la surface d'une montagne, le randonneur qui est arrivé au point (x_0,y_0,z_0) peut partir dans le sens de Ox : la pente du chemin sera celle de $\vec{u}$. Et il peut partir dans le sens de Oy : la pente sera celle de $\vec{v}$.
Pour une fonction de classe C^1, on appelle **normale à la surface** (S) tout vecteur orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. L'un de ces vecteurs est évidemment $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. On appelle **plan tangent** à (S) au point (x_0,y_0,z_0) le plan passant par le point (x_0,y_0,z_0) et contenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a alors que $\vec{n}$ est normal au **plan tangent** à (S) au point (x_0,y_0,z_0).

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Soient* $f(x,y) = 6-x^2-y^2$ *et* (S) *sa surface représentative. Calculer l'équation du plan tangent à* (S) *au point déterminé par* $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

RÉPONSE La surface (S) est un **paraboloïde de révolution**, d'axe Oz. Son sommet a pour coordonnées $(0,0,6)$. Comme $f(1,2) = 1$, on s'intéresse au point $A(1,2,1)$ de la surface. Comme pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -4.$$

On en déduit que $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{j} - 4\vec{k}$.
On calcule ensuite le produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.
Le plan tangent passe par A et il est normal à $\vec{n}$, son équation est donc

$$2(x-1) + 4(y-2) + (z-1) = 0,\ \text{ou encore } 2x + 4y + z = 11.$$

Dans le cas général,

Proposition II.21. *Soient f de classe C^1 et $z_0 = f(x_0, y_0)$. L'équation du plan tangent en (x_0, y_0, z_0) peut s'écrire*

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)(y - y_0). \tag{8}$$

Démonstration Il suffit de faire le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme ci-dessus : on trouve

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\vec{j} + \vec{k}.$$

Comme ce vecteur est normal au plan tangent, l'équation peut s'écrire

$$-(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))(x - x_0) - (\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))(y - y_0) + (z - z_0) = 0,$$

ce qui revient à la formule de l'énoncé. ■

II.3.2 Fonctions de n variables

Soit $n \geq 2$ un entier. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ peut être définie sous la forme

$$z = f(x_1, \ldots, x_n).$$

On peut, également, parler de ses dérivées partielles. Ainsi

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)$ est obtenue en dérivant par rapport à x_1, les variables x_2, …, x_n étant fixées ;

Si $1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est obtenue en dérivant f par rapport à x_i, les autres variables étant fixées. C'est, encore, une fonction de n variables.

II.3.3 Gradient

Soit f une fonction de n variables x_1, ..., x_n.

Définition II.22. *Dans l'espace de dimension n, muni de la base canonique $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$, on appelle* **gradient de** f *le vecteur*

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{e_n}. \tag{9}$$

Le gradient se note aussi ∇f ou $\vec{\nabla} f$ (le symbole ∇ se prononce "nabla").
Il faut remarquer qu'il s'agit d'une **fonction vectorielle** : à chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ il fait correspondre un vecteur de n composantes. Bien entendu il n'est défini qu'aux points où f est définie et admet n dérivées partielles.
On peut aisément vérifier les deux propriétés suivantes :

Proposition II.23. *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.*
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\text{grad}}(f + \lambda g) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}(g)$.*
- *$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\,\overrightarrow{\text{grad}}(f)$.*

Entraînez-vous ! *Soit* $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. *Calculer la norme de* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\frac{1}{r})$.

Réponse Par le même calcul que précédemment, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = -\dfrac{x_i}{r^3}$. Dans un repère orthonormé, le gradient peut donc s'écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = -\frac{1}{r^3}(x_1\vec{e_1} + \dots x_n\vec{e_n}).$$

On en déduit que $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\| = \dfrac{1}{r^2}$.

Application à l'équation d'un plan

Dans le cas d'une fonction de 2 variables, le gradient de f est le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

En tout point $M_0(x_0, y_0)$ où f admet des dérivées partielles, on peut obtenir l'équation du plan tangent à l'aide du gradient de f en M_0. En effet, le plan tangent au point M_0 est l'ensemble des points (x, y, z) vérifiant

$$z = f(x_0, y_0) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_0, y_0).\overrightarrow{M_0M}$$

où M désigne le point du plan de coordonnées (x, y).

Propriété géométrique du gradient

a) En dimension 2. Soit une fonction $f(x, y)$ définie dans un domaine du plan. Si k est une constante réelle, l'équation

$$f(x, y) = k$$

constitue une relation entre x et y. Il peut se faire qu'aucun couple (x, y) ne vérifie cette relation (par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = -1$ n'a pas de solution). Mais dans bien des cas cette équation a une infinité de solutions, qui forment une courbe dans le plan. Ainsi, si $f(x, y) = x^2 + y^2$, l'équation $f(x, y) = R^2$ est celle d'un cercle de centre O, de rayon R.
Notons cette courbe C_k : on l'appelle une **courbe de niveau** de f. Le gradient intervient ici :

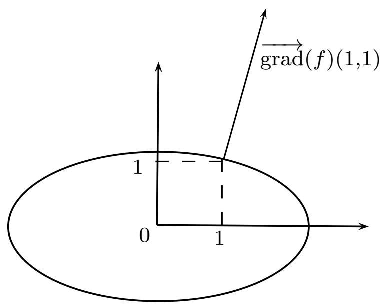
Proposition II.24. *Soit f définie en $M_0(x_0, y_0)$, et $k = f(x_0, y_0)$. On suppose que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_0, y_0)$ existe, qu'il est non nul, et que l'équation $f(x, y) = k$ définit une courbe de niveau C_k. Alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_0, y_0)$ est normal à C_k au point M_0.*

En d'autres termes, si ces conditions sont réalisées, il existe une tangente à C_k en M_0 et le gradient est orthogonal à la tangente.

Exemple II.25. Prenons $f(x, y) = \dfrac{1}{4}x^2 + y^2$. Pour tout $k > 0$, l'équation $f(x, y) = k$ définit une courbe appelée une **ellipse**. Le gradient s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_0, y_0) = \frac{1}{2}x_0\,\vec{i} + 2y_0\,\vec{j}.$$

La courbe de niveau $C_{5/4}$ passe par le point $M_0(1, 1)$. Le gradient $\dfrac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$ est normal à l'ellipse $C_{5/4}$ en ce point.



Entraînez-vous ! *Trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation* $\frac{1}{4}x^2+y^2=\frac{5}{4}$*, au point de coordonnées* $(1,1)$.

Réponse Un vecteur normal est $\vec{i}+4\vec{j}$ (c'est-à-dire deux fois le gradient), l'équation peut donc s'écrire $(x-1)+4(y-1)=0$, soit

$$x+4y=5.$$

b) En dimension 3. Soit une fonction $f(x,y,z)$, définie dans un domaine de l'espace. Si k est une constante réelle, l'équation

$$f(x,y,z)=k$$

constitue une relation entre x, y et z. Elle peut être l'équation d'une surface (S). Si $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point de cette surface, et si $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x_0,y_0,z_0)$ existe, alors il est normal à (S) en ce point – autrement dit, il est normal au plan tangent à (S) en M_0.

Exemple II.26. Soit $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Si $k>0$, l'équation

$$x^2+y^2+z^2=k$$

est celle d'une sphère de centre 0, de rayon $\sqrt{k}$. Prenons $k=3$. Le point $M_0(1,1,1)$ est sur la sphère, et le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(1,1,1)=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ est normal à la sphère en ce point.

II.3.4 Dérivées partielles d'une fonction composée

On a parlé de la dérivée de $g\circ f$, lorsque f et g sont des fonctions d'une variable : c'est

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\,f'(x).$$

Lorsqu'il y a plusieurs variables, on obtiendra des formules semblables mais où toutes les dérivées partielles doivent rentrer en jeu. Voici ces formules dans certains cas particuliers, en admettant que les fonctions sont de classe C^1 au voisinage des points considérés.

Cas 1. Fonction composée $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}^2\xrightarrow{g}\mathbb{R}$

La fonction f peut s'écrire $f=(f_1,f_2)$ où $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. La fonction g a deux dérivées partielles. Alors $g\circ f$ a une dérivée simple :

$$(g\circ f)'(t)=\frac{\partial g}{\partial x}(f(t))\,f_1'(t)+\frac{\partial g}{\partial y}(f(t))\,f_2'(t). \tag{10}$$

L'équation (10) peut s'écrire plus rapidement (en considérant pour simplifier que $f(t)=(x,y)$) :

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{11}$$

Attention ! L'expression (11) est utile d'un point de vue mnémotechnique, mais elle est trompeuse car la variable de la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ n'est pas celle de la fonction $\frac{dx}{dt}$.

Entraînez-vous ! *Calculer $(g \circ f)'$, avec $f(t) = (\cos t, 2 \sin t)$ et $g(x, y) = xy$.*

Réponse Avec $f_1'(t) = -\sin t$, $f_2'(t) = 2 \cos t$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x$, on obtient

$$(g \circ f)'(t) = (2 \sin t)(-\sin t) + (\cos t)(2 \cos t) = 2 \cos(2t).$$

Ne pas présenter le résultat final sous la forme $(g \circ f)' = y(-\sin t) + x(2 \cos t)$!
On peut vérifier que l'expression obtenue est bien la dérivée de $(g \circ f)(t) = 2 \sin t \cos t = \sin(2t)$.

Cas 2. Fonction composée $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

La fonction g a une dérivée usuelle, la fonction f a deux dérivées partielles. Il en est de même de $g \circ f$, et

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = g'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) = g'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \tag{12}$$

Ces relations peuvent s'écrire

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}$$

ce qui est facile à retenir. Mais comme précédemment, ces formulations simples peuvent être trompeuses car les dérivées sont écrites sans leurs variables.

Entraînez-vous ! *Calculer les dérivées partielles de $g \circ f$, avec $f(x, y) = x^2 y$ et $g(t) = t^2$.*

Réponse Avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$, et $g'(t) = 2t$, on trouve

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = 2(x^2 y)(2xy) = 4x^3 y^2, \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) = 2(x^2 y)x^2 = 2x^4 y.$$

Cas 3. Fonction composée $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

La fonction f peut s'écrire $f = (f_1, f_2)$ où $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les fonctions f_1, f_2 et g ont deux dérivées partielles. Il en est de même de $g \circ f$, et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g \circ f)}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(s, t))\frac{\partial f_1}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(s, t))\frac{\partial f_2}{\partial s}(s, t), \\
\frac{\partial(g \circ f)}{\partial t}(s, t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(s, t))\frac{\partial f_1}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(s, t))\frac{\partial f_2}{\partial t}(s, t).
\end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

On peut facilement généraliser ces formules au cas $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}$.

Attention ! Pour chacune des formules précédentes, on a donné une formulation simple qui constitue un bon moyen mnémotechnique, mais en rappelant qu'il est important d'attribuer à chaque dérivée partielle sa ou ses variables. L'exemple suivant illustre le fait que des simplifications hâtives peuvent conduire à des résultats erronés.

Exemple II.27. On a parlé de la loi des gaz parfaits

$$PV = cT$$

où $c = nR$ est une constante. Dans cette équation nous avons trois fonctions P, V et T, dont chacune a pour variables les deux autres. Calculons le produit

$$\frac{\partial P}{\partial V}(V,T) \times \frac{\partial V}{\partial T}(T,P) \times \frac{\partial T}{\partial P}(P,V).$$

Par une simplification " intuitive " on pourrait être tenté d'écrire

$$\frac{\partial P}{\partial V} \times \frac{\partial V}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial P} = 1,$$

mais pour trouver le vrai résultat il faut y mettre plus de rigueur, et l'on va voir qu'il est différent. Comme P est une fonction de V et T,

$$P(V,T) = \frac{cT}{V} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial V}(V,T) = \frac{-cT}{V^2}.$$

De la même façon, on peut exprimer V, puis T en fonction des deux autres variables. On obtient :

$$V(T,P) = \frac{cT}{P} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial T}(T,P) = \frac{c}{P}.$$

$$T(P,V) = \frac{PV}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial P}(P,V) = \frac{V}{c}.$$

En faisant le produit des trois résultats obtenus cela donne

$$\frac{\partial P}{\partial V}(V,T) \times \frac{\partial V}{\partial T}(T,P) \times \frac{\partial T}{\partial P}(P,V) = \frac{-cT}{PV} = -1.$$

Chapitre III

Intégrales

III.1 Définition de l'intégrale

Quand on veut calculer :
– le travail effectué par une force sur un chemin donné,
– la distance parcourue par un objet en chute libre au bout d'un temps donné,
– la hausse des prix sur une période de temps pour laquelle on connait le taux d'inflation,
– et bien d'autres choses encore...
on a recours à un calcul d'intégrales. Nous allons donner une définition très intuitive de l'intégrale d'une fonction continue, puis énoncerons ses principales propriétés utiles pour les calculs.

Définition III.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. L'***intégrale** *de f entre a et b est l'aire algébrique délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette valeur, A sur la figure III.1, est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

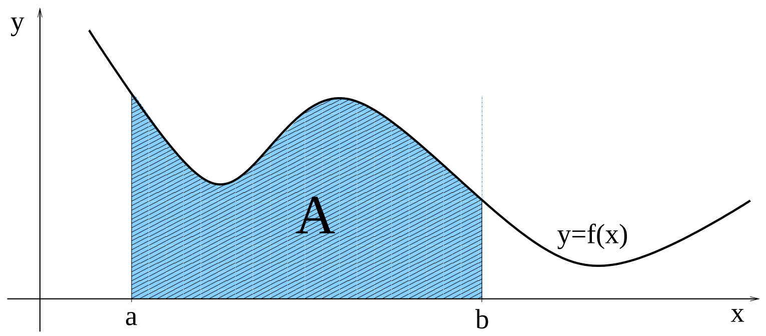


Figure III.1 – Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction positive

Par algébrique, on signifie que les portions du graphe de f au dessus de l'axe des abscisses ont une contribution positive et celles au dessous une contribution négative :
On convient de définir, lorsque $b \leq a$, la valeur de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

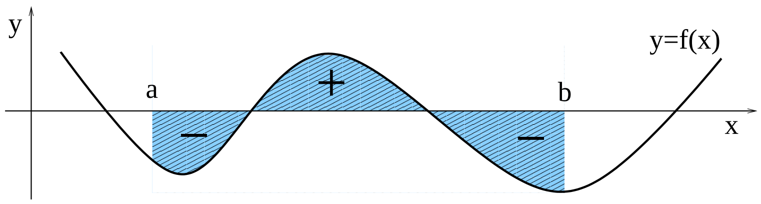


FIGURE III.2 – Interprétation géométrique de l'intégrale selon le signe de la fonction intégrée

III.2 Notion de primitive

III.2.1 Généralités

Dans ce chapitre on rappelle la notion de primitive qui est fondamentale dans le calcul des intégrales.

Définition III.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle* **primitive** *de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout x élément de I, $F'(x) = f(x)$.*

Exemples III.3.

1. La fonction $F: \ x \mapsto x^3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f: \ x \mapsto 3\,x^2$.
2. La fonction $F: \ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $f: \ x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
3. La fonction $F: \ x \mapsto x^2 + 5$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f: \ x \mapsto 2x$.

Enonçons quelques propriétés des primitives :

Proposition III.4.

1. *Si F et G sont deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I alors $F - G$ est constante sur I.*
   De façon équivalente : les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + c$ où F est une primitive fixée et c une constante quelconque.
2. *Si F est une primitive de f et G une primitive de g alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF est une primitive de λf pour toute constante λ.*

Remarque III.5. Une fonction qui admet une primitive sur un intervalle en admet donc une infinité.

Exemples III.6.

1. Les primitives de la fonction $x \mapsto 7x^4 + 21x^3$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{7}{5}x^5 + \frac{21}{4}x^4 + c$, $c \in \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 4x^3 + 3x + 2 + \frac{15}{x}$. La fonction $F(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 15\ln(x)$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. En outre, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 15\ln(x) + c$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Remarque III.7. Généralement on désigne une fonction par une lettre minuscule et une de ses primitives (si elle en a) par la même lettre majuscule.

III.2.2 Existence de primitive

Théorème III.8. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.*

Nous pouvons en déduire la conséquence suivante :

Proposition III.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet une primitive et une seule F sur I qui prend la valeur a au point x_0.*

Dans la pratique, on trouve les primitives de f en reconnaissant en f la dérivée d'une fonction usuelle (à l'aide du tableau ci-dessous par exemple) ou plus généralement en utilisant de façon inversée les règles de dérivation. C'est ce que nous allons développer dans les deux prochains paragraphes.

III.2.3 Primitives de quelques fonctions usuelles

En se référant au chapitre sur la dérivation on peut dresser le tableau suivant (un tableau plus complet se trouve dans l'Annexe C, page 87) :

fonction f	une primitive F
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$

Exemple III.10. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Comme $\sqrt{x} = x^{1/2}$, on en déduit que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Entraînez-vous ! *En utilisant la linéarité (cf. (ii) de la première proposition), déterminer toutes les primitives de la fonction suivante, définie pour $x > 0$:*

$$f(x) = \frac{1}{2x} + 4\sin x.$$

Réponse On utilise le tableau précédent pour obtenir les primitives de $\frac{1}{x}$ et $\sin x$. En utilisant le second point de la proposition III.4 (c'est-à-dire des propriétés de linéarité), on en déduit que les primitives de f sont les fonctions :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - 4\cos x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

III.2.4 Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée

La fonction $f(x) = 2x\cos(x^2)$ n'apparaît pas dans le tableau précédent, pourtant on y trouve une fonction très voisine : cos dont les primitives sont les fonctions $x \mapsto \sin(x) + c$. Soyons plus précis : on a $f(x) = 2x\cos(u(x))$ où la fonction $u(x)$ est donnée par $u(x) = x^2$. Remarquons que $2x = u'(x)$, donc :

$$f(x) = u'(x)\sin'\big(u(x)\big).$$

Ainsi, on reconnaît dans l'expression de f la dérivée d'une fonction composée, en effet si :

$$F(x) = \sin\big(u(x)\big)$$

alors

$$F'(x) = u'(x)\sin'\big(u(x)\big)$$

par la formule bien connue de dérivation d'une fonction composée.
Conclusion : les primitives de $f(x) = 2x\cos(x^2)$ sont les fonctions $F(x) = \sin(x^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Il est donc indispensable de connaître les primitives des fonctions usuelles et de se souvenir de la formule de la dérivée d'une fonction composée :

$$\big(v \circ u\big)'(x) = \Big(v\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x)\,v'\big(u(x)\big).$$

Proposition III.11. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si pour tout $x \in I$ on écrit $f(x) = u'(x)\,v'\big(u(x)\big)$ alors les fonctions F définies par $F(x) = v(u(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$, sont les primitives de f sur I.*

Exemple III.12. Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On a $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}u'(x)g'\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = x^2+1$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$. On en déduit que pour tout réel c, la fonction $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Déterminer toutes les primitives de $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.*

RÉPONSE On reconnait $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)g'\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = x^2$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x$. On en déduit que les fonctions $F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$, sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

En pratique, on rencontre fréquemment des calculs de primitives de fonctions f qui sont de la forme $f(x) = u'(x)(u(x))^\alpha$. Si $\alpha \neq -1$ alors $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1}$ est une primitive de f sur I.

Exemple III.13. Soit $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$. On a $f(x) = u'(x)g'\left(u(x)\right)$ avec $u(x) = 2x+1$ et $g'(x) = \sqrt{x}$. Les primitives de f sont de la forme $F(x) = \dfrac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

III.3 Calcul d'intégrales

III.3.1 Le théorème fondamental du calcul intégral

Le résultat suivant permet de relier la notion de primitive, à celle d'intégrale. Il est fondamental au sens où il montre que pour calculer effectivement la valeur d'une intégrale - autrement dit une aire sous la courbe représentant une fonction f, il "suffit" de connaitre une primitive de cette fonction f...

Théorème III.14. *(Théorème fondamental du calcul intégral). Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive quelconque de f. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Remarque III.15. Puisque deux primitives F et G de f diffèrent d'une constante, on a $G(b)-G(a) = F(b) - F(a)$ et il est clair que la formule dans le théorème ne dépend pas du choix de F. En fait, cette formule pourrait être prise comme une définition de l'intégrale.

Par convention on note $\Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque III.16. On a pour toute fonction f continûment dérivable sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

Le théorème fondamental du calcul intégral nous fournit un outil de calcul pour les intégrales :

Pour calculer l'intégrale de f entre a et b, il suffit de déterminer une primitive de f sur cet intervalle et d'appliquer la formule du théorème fondamental du calcul intégral, Théorème III.14.

Réciproquement, le théorème fondamental du calcul intégral, Théorème III.14, permet d'exprimer les primitives de f à l'aide d'intégrales :

Corollaire III.17. *La fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.*

III.3.2 Les principales propriétés de l'intégrale

Proposition III.18. *Soient a, b et c trois nombres réels, et soient f et g deux fonctions. On a :*

1. *Linéarité de l'intégrale :*

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b kf(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. *Relation de Chasles :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. *Croissance de l'intégrale :*

$$\textit{Si } a \leq b \textit{ et si } f(x) \leq g(x) \textit{ pour tout } x \in [a, b], \textit{ alors } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple III.19. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Afin de calculer la dérivée de g nous l'écrivons sous la forme suivante (en utilisant la relation de Chasles, Proposition III.18) :

$$g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $z \in \mathbb{R}$, notons $F(z) = \displaystyle\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = F(x^2) - F(x).$$

D'après le corollaire III.17, on a $F' = f$ de sorte que

$$g'(x) = 2xf(x^2) - f(x).$$

Corollaire III.20. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$.*

1. *Si f est positive alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
2. *Si $|f|$ désigne la fonction valeur absolue de f alors*
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
3. *Si pour tout $x \in [a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$ alors*
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a).$$

Remarque III.21. On a aussi :
– Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
– Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
– Si f est périodique de période T et $n \in \mathbb{Z}$ alors $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(t)\,\mathrm{d}t = n\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

III.4 Techniques de calcul des intégrales

III.4.1 Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée dans une intégrale

Le théorème fondamental du calcul intégral, Théorème III.14, page 66, permet de disposer des techniques vues pour le calcul des primitives. Tout particulièrement, il s'applique au calcul de l'intégrale d'une fonction f qui se présente sous la forme de la dérivée d'une fonction composée.

Proposition III.22. $\displaystyle\int_a^b u'(t)v'(u(t))\,\mathrm{d}t = \Big[v(u(t))\Big]_a^b$

Exemple III.23. Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$. On reconnait la dérivée d'une fonction composée : $(\mathrm{e}^{\sin(t)})' = \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}$. On en déduit donc que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\sin(t)}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e} - 1.$$

III.4.2 Intégration par parties

Supposons qu'on cherche à calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ avec f qui se présente sous la forme $f(x) = u'(x)v(x)$. La règle de dérivation d'un produit de fonctions donne :
$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Autrement dit, $u'v = (uv)' - uv'$. Puisqu'une primitive de $(uv)'$ est évidemment la fonction uv, si on connait une primitive w de la fonction uv' alors on en déduira une primitive de la fonction $u'v$, ce sera $uv - w$. Cette technique, appelée **intégration par parties**, peut se mémoriser ainsi :

Proposition III.24 (Intégration par parties)**.** *Si u et v sont continûment dérivables sur $]a,b[$ alors :*

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples III.25.

1. Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ en remarquant que la fonction à intégrer est un produit du type $u'v$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$. La formule d'intégration par parties s'écrit

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

2. Calculons $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$ en intégrant par parties : Posons $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$. Après la première intégration par parties, on a :

$$(1) \qquad \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Recommençons une intégration par parties avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \cos x$. Alors :

$$(2) \qquad \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{e}^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x.$$

En substituant dans (1) le calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$ fait dans (2) on obtient :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin x\Big]_0^\pi - \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x,$$

dont on déduit le résultat :

$$2\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin x\Big]_0^\pi - \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^\pi + 1)$.

Entraînez-vous ! *En utilisant une intégration par parties, calculer* $\displaystyle\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Réponse On pose $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$. On a alors

$$\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,\mathrm{d}x = \Big[x \cos x\Big]_\pi^0 + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi.$$

Le premier exemple et l'exercice précédent peuvent se généraliser au cas où la fonction dont on cherche une primitive est du type $p(x)g(x)$ avec p un polynôme de degré d et g une fonction dont on sait calculer au moins d primitives successives : on obtient les primitives de $p(x)g(x)$ après d intégrations par parties successives où on choisit toujours de dériver la partie polynomiale.

Exemple III.26.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \Big[(x^2+x+2)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad (u'=\mathrm{e}^x,\ v=x^2+x+2)\\ &= \Big[(x^2+x+2)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \left(\Big[(2x+1)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) \qquad (u'=\mathrm{e}^x,\ v=2x+1)\\ &= \Big[(x^2+x+2)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \Big[(2x+1)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 + \Big[2\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \Big[(x^2-x+3)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = 3e-3\end{aligned}$$

Entraînez-vous ! *De la même façon que dans l'exemple précédent, calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-2x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Réponse

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-2x)\cos x\,\mathrm{d}x &= \Big[(x^2-2x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-2)\sin x\,\mathrm{d}x \ (u'=\cos x,\ v=x^2-2x+2)\\ &= \Big[(x^2-2x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\Big[(2x-2)(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(-\cos x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \Big[(x^2-2x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[(2x-2)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \Big[(x^2-2x-2)\sin x + (2x-2)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi^2}{4} - \pi\end{aligned}$$

Dans tous les cas présentés ci-dessus, le choix de u' et v dans la fonction à intégrer pouvait sembler évident. En pratique, ce fait d'écrire la fonction à intégrer comme un produit ne saute pas toujours aux yeux...

Exemple III.27. Pour calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ on peut utiliser une intégration par parties : on remarque que $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$ et on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$. On a alors

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \Big[x\Big]_1^e = e-e+1 = 1.$$

Chapitre IV

Equations différentielles

IV.1 Qu'est ce qu'une équation différentielle ?

Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel la fonction inconnue est soumise. Plus précisement, on a la définition suivante.

Définition IV.1. *Une* **équation différentielle** *est une équation de la forme*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(N)}) = 0 \tag{1}$$

où N est un entier non nul et F est une fonction de $N+2$ variables.
*- L'***ordre** *de cette équation différentielle est l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ correspondant à la plus haute dérivée apparaissant dans la relation.*
- Résoudre l'équation différentielle (1) *c'est trouver toutes les fonctions y, dépendant de la variable x, vérifiant cette relation.*

Remarque IV.2. Les fonctions que nous considérons dans ce cours sont toutes des fonctions de la variable réelle. On peut noter qu'une théorie quasiment similaire peut être introduite pour des fonctions de la variable complexe, faisant par conséquent appel à la notion de dérivation d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple IV.3. Les équations différentielles les plus "élémentaires" sont celles qui s'écrivent sous la forme

$$y' = f \tag{2}$$

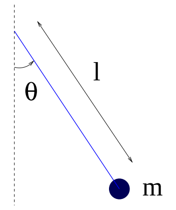
où f est une fonction donnée [1]. Les solutions de (2) correspondent aux primitives de f ; elles ont été largement étudiées dans le chapitre précédent.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques correspondant à des phénomènes physiques, biologiques, économiques, etc. Par conséquent, les variables et les fonctions en jeu ont souvent un sens "physique" et sont donc, selon le contexte, notées différemment. De même, la dérivée d'une fonction y, notée y' dans la définition précédente, est parfois notée $\dot{y}$ ou bien $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (lorsque la "variable" est notée x...).

Exemple IV.4 (Equation du pendule)**.** Un pendule simple est formé d'une boule de masse m suspendu par un fil supposé sans masse et de longueur ℓ, voir la figure ci-après. A partir de la

1. On vérifiera aisement que cette équation (2) est bien sous la forme de l'équation (1), en posant $F(x, y, y') = y' - f(x)$.

conservation de l'énergie mécanique on décrit le mouvement de ce pendule à l'aide d'une équation différentielle
$$\ddot{\theta} + \lambda \sin(\theta) = 0 \tag{3}$$
où $\lambda = \frac{g}{\ell} \in \mathbb{R}_+^*$, la constante g correspondant à l'accélération de la pesanteur. Dans l'équation différentielle (3), la fonction θ désigne l'écart angulaire par rapport à la verticale (voir la figure ci-après) et la variable (qui n'apparait pas dans l'expression de l'équation différentielle !) représente le temps ; elle est généralement notée t.



En utilisant les notations de la définition IV.1, l'équation du pendule (3) est une équation différentielle d'ordre 2, elle correspond à l'application
$$F(x, y, y', y'') = y'' + \lambda \sin(y).$$
Selon les notations, cette équation (3) pourra aussi s'écrire
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \lambda \sin(\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad \theta''(t) + \lambda \sin(\theta(t)) = 0 \quad \text{ou} \quad y''(x) + \lambda \sin(y(x)) = 0 \quad ...$$

IV.2 Equations différentielles linéaires

Définition IV.5. *Une équation différentielle est dite* **linéaire** *si elle est de la forme*
$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = f. \tag{4}$$
- Les valeurs a_N,..., a_0 sont appelées **coefficients** *de l'équation.*
- La fonction f est appelée **second membre***.*
- Lorsque le second membre f est nul, on dit que l'équation est **homogène***.*

Dans le document présenté ici, les coefficients a_N,..., a_0 seront supposés constants et $a_N \neq 0$.

Exemple IV.6 (Dynamique des populations)**.** Pour modéliser l'évolution au cours du temps d'une population (insectes, bactéries, algues, poissons...) on la décrit à l'aide du nombre d'individus $P(t)$ vivants à l'instant t. Le modèle malthusien, proposé par Thomas Malthus en 1798, suppose que la population possède un taux de reproduction “a” constant, simple différence du taux de natalité et du taux de mortalité. La variation de population $P'(t)$ satisfait alors l'équation différentielle linéaire homogène de degré 1 :
$$P'(t) = \mathrm{a}\, P(t).$$
Bien que relativement satisfaisant, le modèle précédent a un inconvénient important : celui de ne pas tenir compte de la taille du territoire sur lequel vit l'espèce. Si la population devient grande, il faut tenir compte de la compétition entre les individus pour avoir accès à l'espace vital. Le modèle de croissance logistique est basé sur cette remarque. On ajoute un terme de “rappel” qui agit de plus en plus lorsque la population devient grande. Mathématiquement, on introduit un paramètre $\mathrm{b} > 0$ modélisant la force de ce rappel et on écrit :
$$P'(t) = \mathrm{a}\, P(t) - \mathrm{b}\, P(t)^2.$$
L'équation différentielle obtenue est toujours de degré 1 mais elle n'est plus linéaire (car le terme $\mathrm{b}\, P(t)^2$ ne peut pas s'écrire sous la forme préscrite dans la définition 4).

Bien entendu une équation différentielle linéaire est un cas particulier d'équation différentielle introduit au sens de la définition IV.1. Le terme “linéaire” provient du fait qu'il existe une structure particulière sur l'ensemble des solutions. On a en particulier la propriété suivante :

Proposition IV.7 (Principe de superposition)**.**
Si la fonction y_1 est une solution de l'équation

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = f_1,$$

et si la fonction y_2 est une solution de l'équation

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = f_2$$

alors pour tous nombres réels α et β, la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est une solution de l'équation

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = \alpha f_1 + \beta f_2.$$

Ainsi, si y_p et y_q sont deux solutions de $y' + ay = f$ alors la différence $y_q - y_p$ est une solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$. Autrement dit $y_q = y_p + y$ où y est une solution de l'équation homogène. On en déduit la stratégie suivante pour résoudre, en trois étapes, l'équation différentielle (4) :

Étape 1 : Recherche de toutes les solutions de l'équation homogène associée (prendre $f = 0$).

Étape 2 : Recherche d'une solution particulière de l'équation complète.

Étape 3 : Écriture de la forme générale de toutes les solutions de l'équation complète.

Par la suite, nous allons appliquer cette stratégie pour des équations d'ordre 1 et 2 (En pratique il est rare d'avoir à considérer une équation d'ordre supérieur à 2).

IV.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

IV.3.1 Cas des équations sans second membre

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 s'écrit

$$y' + ay = 0 \tag{5}$$

où a est un nombre réel. Considérons une fonction y dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ (en particulier soit $y(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $y(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Alors :

$$\begin{aligned}
y'(x) + ay(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -a \\
&\Longleftrightarrow \quad (\ln(|y(x)|))' = -a \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(|y(x)|) = -ax + b \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad |y(x)| = e^{-ax+b} \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad |y(x)| = ce^{-ax} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}_+^* \\
&\Longleftrightarrow \quad y(x) = Ke^{-ax} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

On peut aussi montrer que si une fonction y s'annule en un point, et que si cette même fonction est une solution de l'équation différentielle (5) alors c'est la fonction nulle $y = 0$. Finalement, on a

Proposition IV.8. *L'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est formé des fonctions*

$$y(x) = K\, e^{-ax}$$

où K désigne une constante réelle.

Exemple IV.9. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $y(x) = K\mathrm{e}^{-3x}$ où K est un nombre réel quelconque.
Ainsi les fonctions définies par $y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et $y_2(x) = \pi\mathrm{e}^{-3x}$ sont deux exemples de solutions.

En pratique, une équation différentielle est fréquemment issue d'un phénomène réel, et dire qu'un problème a une infinité de solutions n'est généralement pas satisfaisant. Des données supplémentaires sont donc nécessaires pour pouvoir sélectionner une solution au problème étudié.

Exemple IV.10 (Temps de demi-vie)**.** La décroissance radioactive est la réduction du nombre de noyaux radioactifs instables dans un échantillon. La loi de désintégration radioactive stipule que le nombre $N(t)$ de noyaux non désintégrés d'un élément présents dans un échantillon à un instant t satisfait

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

où la constante de proportionnalité $\lambda > 0$ est appelée constante radioactive. Autrement dit, la fonction N satisfait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
D'après la proposition précédente, toutes les solutions sont de la forme $N(t) = K\, e^{-\lambda t}$, K étant un réel quelconque.
La donnée supplémentaire permettant de déterminer "la" solution peut être la suivante : au moment de l'expérience ($t = 2013$), on suppose que le nombre de noyaux radioactifs instables est connu, disons par exemple que $N(2013) = 17 \cdot 10^{15}$. Puisque $N(2013) = K\, e^{-2013\lambda}$, on en déduit la valeur de la constante $K = 17\, e^{2013\lambda} \cdot 10^{15}$ et donc que

$$N(t) = 17\, e^{\lambda(2013-t)} \cdot 10^{15}.$$

Entraînez-vous ! *Déterminer la fonction g vérifiant à la fois l'équation différentielle $g' = 5g$ et la relation $g(1) = 1$.*

Réponse On commence par appliquer le résultat de la proposition IV.8 avec $a = -5$: les fonctions g qui vérifient l'équation différentielle $g' = 5g$ sont de la forme $g(x) = K\,\mathrm{e}^{5x}$, le réel K étant une constante quelconque.
Si on veut en plus que $g(1) = 1$ alors on doit avoir nécessairement $K\,\mathrm{e}^{5} = 1$, autrement dit la constante K vérifie $K = \mathrm{e}^{-5}$.
Finalement ; la solution vaut $g(x) = \mathrm{e}^{-5}\,\mathrm{e}^{5x} = \mathrm{e}^{5(x-1)}$.

IV.3.2 Cas des équations avec second membre

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'écrit

$$y' + ay = f \tag{6}$$

où a est un nombre réel et f une fonction.
Pour résoudre ce type d'équation, on exploite le principe de superposition (voir la proposition (IV.7)) : si y_p est une solution de l'équation différentielle (6) alors toutes les solutions de l'équation différentielle (6) seront de la forme $y_p + y_0$ où y_0 est une solution de l'équation différentielle homogène (5). Puisque la proposition IV.8 fournit toutes les solutions de l'équation différentielle homogène (5), on a

Proposition IV.11. *Si y_p désigne une solution donnée de $y' + ay = f$ alors la forme générale de toutes les solutions de $y' + ay = f$ est :*

$$y(x) = y_p(x) + Ke^{-ax}$$

où K est une constante réelle arbitraire.

Finalement, pour résoudre l'équation différentielle (6), il suffit de déterminer une solution particulière, et pour cela toutes les méthodes sont autorisées!
Par exemple, si pour des valeurs particulières du coefficient a et du second membre f, il existe une solution "évidente" à l'équation (6) alors toutes les solutions de l'équation (6) seront facilement obtenues.

Entraînez-vous ! *Résoudre l'équation différentielle $y' + 4y = 7$.*

Réponse On commence par résoudre l'équation homogène, c'est-à-dire sans le second membre : $y_0' + 4y_0 = 0$. Selon la proposition IV.8, les solutions sont toutes de la forme $y_0(x) = K\,\mathrm{e}^{-4x}$, $K \in \mathbb{R}$.
On trouve ensuite une solution particulière en remarquant que la fonction constante $y_p(x) = 7/4$ est une solution de $y' + 4y = 7$ (vérifiez-le!).
D'après la proposition IV.11, on en déduit que toute les solutions de $y' + 4y = 7$ s'écrivent

$$y(x) = \frac{7}{4} + K\,\mathrm{e}^{-4x},$$

K étant une constante réelle arbitraire.

En pratique, il existe une méthode (appelée **méthode de variation de la constante**) qui permet d'obtenir à coup sûr l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle (6). Cette méthode consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = K(x)e^{-ax}$. On obtient le résultat suivant

Proposition IV.12. *L'ensemble des solutions de* (6) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = \left(K + \int_{x_0}^{x} f(s)\mathrm{e}^{as}\mathrm{d}s\right) e^{-ax}$$

où x_0 est un réel quelconque de l'ensemble de définition de f, et où K est une constante réelle.

Il est d'un intérêt limité d'apprendre par coeur cette expression de la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Par contre, la méthode permettant de la retrouver est riche d'enseignement. On va la présenter sur l'exemple suivant.

Exemple IV.13. Considérons l'équation différentielle suivante

$$y'(x) + 3y(x) = x + 1.$$

<u>Etape 1</u> : résoudre l'équation homogène associée - d'après l'exemple du paragraphe précédent, les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(x) = K\mathrm{e}^{-3x}$, K étant une constante arbitraire.

<u>Etape 2</u> : déterminer une solution particulière - la méthode de variation de la constante nous propose de chercher une solution de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-3x}$ où $K(x)$ est une fonction à déterminer. Or on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y_p'(x) + 3y_p(x) = x + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(K(x)e^{-3x}\right)' + 3K(x)e^{-3x} = x + 1, \\
&\Longleftrightarrow \quad K'(x)e^{-3x} - 3K(x)e^{-3x} + 3K(x)e^{-3x} = x + 1, \\
&\Longleftrightarrow \quad K'(x)e^{-3x} = x + 1, \\
&\Longleftrightarrow \quad K'(x) = (x + 1)e^{3x}.
\end{aligned}$$

On obtiendra ainsi une solution y_p dès lors que l'on aura obtenu une primitive de la fonction $(x+1)e^{3x}$. Ceci peut se faire à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x (s+1)e^{3s}ds &= \left[\frac{s+1}{3}e^{3s}\right]_{s=0}^{s=x} - \int_0^x \frac{1}{3}e^{3s}ds\\ &= \frac{x+1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{s=0}^{s=x}\\ &= \left(\frac{x}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{3x} - \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Une fonction K pouvant convenir [2] est $K(x) = \left(\frac{x}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{3x} - \frac{2}{9}$ de sorte qu'une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = K(x)e^{-3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}e^{-3x}.$$

<u>Etape 3</u> : conclure - on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) + 3y(x) = x + 1$ correspond aux fonctions de la forme

$$y(x) = \underbrace{K\mathrm{e}^{-3x}}_{\text{toutes les solutions de l'équation homogène}} + \underbrace{\frac{x}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}e^{-3x}}_{\text{une solution de l'équation complète}},$$

où K est une constante réelle quelconque. Notons qu'on peut écrire les solutions sous une forme plus condensée :

$$y(x) = \widetilde{K}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}, \qquad \widetilde{K} \in \mathbb{R}.$$

On notera qu'on a pris $\widetilde{K} = K - \frac{2}{9}$.

Les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 dépendent d'une constante K arbitraire, c'est-à-dire qu'il y a autant de solutions que de choix possibles pour K parmi les nombres réels. En pratique, comme dans le cas de l'équation homogène (5), cette constante est fixée dès qu'une condition initiale est imposée. Plus précisément :

Proposition IV.14. *Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $m_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule fonction y solution de $y' + ay = f$ et satisfaisant la condition $y(x_0) = m_0$.*

Entraînez-vous ! *Quelle est la solution de l'équation $y'(x) + 3y(x) = x + 1$ qui s'annule en 0 ?*

Réponse D'après l'exemple précédent, les solutions de $y'(x) + 3y(x) = x + 1$ sont toutes de la forme

$$y(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} + \widetilde{K}\mathrm{e}^{-3x}.$$

Si cette fonction vérifie $y(0) = 0$ alors nécessairement on aura $\widetilde{K} = -2/9$. On en déduit la solution cherchée

$$y(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3x}.$$

2. Le choix de cette fonction est ici arbitraire, il provient du fait que l'on a choisi la primitive qui s'annule en $x = 0$, en mettant 0 comme borne dans l'intégrale. Si on fait un autre choix, on obtiendra une autre primitive K, et donc une autre solution particulière y_p. Néanmoins le résultat final donnant toutes les solutions de l'équation différentielle ne sera pas perturbé.

Exemple IV.15. Lors d'une tentative de pénalité, un ballon de rugby[3] de masse m est soumis aux forces de gravité ainsi qu'à des forces de frottement proportionnelles à son vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc pour un tel système :

$$m\boldsymbol{v}'(t) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - k\boldsymbol{v}(t),$$

le coefficient k étant le coefficient de frottement du ballon. On posera $a = k/m$. Les trois composantes v_x, v_y et v_z de la vitesse $\boldsymbol{v}$ vérifient donc trois équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} v_x' + av_x &= 0, \\ v_y' + av_y &= 0, \\ v_z' + av_z &= -g. \end{aligned}$$

Les deux premières équations différentielles sont homogènes, leurs solutions sont donc données par la proposition IV.8. On a

$$\begin{aligned} v_x(t) &= K_x e^{-at}, \qquad K_x \in \mathbb{R}, \\ v_y(t) &= K_y e^{-at}, \qquad K_x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle satisfaite par v_z est une équation différentielle linéaire du premier ordre et non homogène. On peut deviner[4] que l'application constante $-\frac{g}{a}$ est une solution pour l'équation différentielle satisfaite par v_z. On en déduit toutes les solutions possibles :

$$v_z(t) = K_z e^{-at} - \frac{g}{a}, \qquad K_z \in \mathbb{R}.$$

Supposons maintenant que l'on connaisse la vitesse initiale du ballon (c'est à dire la valeur de v_x, v_y et v_z au temps $t = 0$). Si par exemple $\boldsymbol{v}(0) = (1, 0, 1)$ alors on a $v_x(0) = 1$, $v_y(0) = 0$ et $v_z(0) = 1$, et en reportant ces valeurs dans les solutions obtenues on en déduit les valeurs des constantes K_x, K_y et K_z :

$$K_x = 1, \quad K_y = 0, \quad K_z = 1 + \frac{g}{a}.$$

L'expression de la vitesse au cours du temps est alors déterminée de façon unique :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= e^{-at}, \\ v_y(t) &= 0, \\ v_z(t) &= \left(1 + \frac{g}{a}\right) e^{-at} - \frac{g}{a}. \end{aligned}$$

IV.3.3 Approfondissement

On a traité le cas des équations différentielles $y' + ay = f$ où a est un nombre réel. Le cas où a est une fonction continue se traite de façon identique et les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$y(x) = Ke^{-A(x)}$$

où $A'(x) = a(x)$ et K est une constante réelle arbitraire. On détermine ensuite une solution de l'équation complète avec la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$. Enfin, on écrit la forme générale des solutions, qui résulte encore une fois de l'application du principe de superposition (cf. proposition IV.7).

3. Pour des raisons de simplicité nous ne prendrons pas en compte la forme étrange d'un ballon de rugby...

4. Si on ne le devine pas, on peut utiliser la méthode de variation de la constante en cherchant v_z sous la forme $v_z(t) = K(t)e^{-at}$ comme dans l'exemple précédent.

IV.4 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

IV.4.1 Cas des équations sans second membre

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 s'écrit

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7}$$

où a, b et c sont trois réels, a étant supposé non nul.
D'un point de vue théorique, la "linéarité" de telles équations permet d'affirmer que des solutions existent. Il y en a même une infinité et elles peuvent toutes être décrites dès qu'on connaît deux solutions "indépendantes".
Le principe de résolution (qui peut être adapté à des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre quelconque) consiste à déterminer des solutions sous forme exponentielle, c'est-à-dire telles que $y(x) = e^{\lambda x}$. Si on obtient autant de solutions (c'est-à-dire autant de valeurs de λ) que l'ordre de l'équation différentielle (ici l'ordre est 2) alors on disposera d'une base de l'ensemble de toutes les solutions.
On remarque que

$$\begin{aligned} y(x) = e^{\lambda x} \text{ est une solution de (7)} &\iff a(e^{\lambda x})'' + b(e^{\lambda x})' + ce^{\lambda x} = 0 \\ &\iff a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \\ &\iff a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Cette dernière relation (8) est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle (7). Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Plus exactement, on a la proposition suivante :

Proposition IV.16.
• *Si* $\Delta > 0$ *alors l'équation caractéristique* (8) *possède deux solutions réelles* λ_1 *et* λ_2 *et l'ensemble des solutions de* (7) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}$$

où K_1 *et* K_2 *sont deux constantes réelles.*
• *Si* $\Delta = 0$ *alors l'équation caractéristique* (8) *ne possède qu'une seule solution* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On démontre alors que l'ensemble des solutions de* (7) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = (K_1 x + K_2)e^{\lambda x}$$

où K_1 *et* K_2 *sont deux constantes réelles.*
• *Si* $\Delta < 0$ *alors l'équation caractéristique* (8) *ne possède pas de solutions réelles mais deux solutions complexes conjuguées :* $\lambda_1 = u + iv$ *et* $\lambda_2 = u - iv$. *L'ensemble des solutions de* (7) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = e^{ux}(K_1 \cos(vx) + K_2 \sin(vx))$$

où K_1 *et* K_2 *sont deux constantes réelles.*

Rappelons que les racines de l'équation polynomiale (7) se calculent ainsi (selon le signe du discriminant Δ). Si $\Delta > 0$ alors les deux racines réelles sont $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Si $\Delta = 0$ alors l'unique racine est réelle, et vaut $\lambda = \frac{-b}{2a}$. Enfin, si $\Delta < 0$ alors les deux racines sont des nombres complexes $\lambda = u \pm \mathrm{i}v$ où $u = \frac{-b}{2a}$ et $v = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Entraînez-vous ! *Déterminer la solution de* $y'' = y$ *telle que* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.

Réponse Afin de suivre les résultats de la proposition IV.16 dans le cas où $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$, on résoud l'équation caractéristique
$$\lambda^2 - 1 = 0.$$
Le discriminant $\Delta = 4$ étant positif, on dispose de deux racines réelles distinctes : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. D'après la proposition IV.16, les solutions de l'équation $y'' = y$ sont de la forme
$$y(x) = K_1\,\mathrm{e}^{x} + K_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$
Les deux constantes K_1 et K_2 vont être déterminées grâce aux conditions supplémentaires $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. La relation $y(0) = 1$ s'écrit $1 = K_1\,\mathrm{e}^0 + K_2\,\mathrm{e}^{-0} = K_1 + K_2$. De même la relation $y'(0) = 0$ devient $K_1 - K_2 = 0$. Les seules constantes K_1 et K_2 qui vérifient le système $\begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ K_1 - K_2 = 0 \end{cases}$ sont $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$.
Finalement, la seule solution est donnée par
$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

Remarque IV.17. Lorsque $\Delta < 0$, en utilisant des formules de trigonométrie classiques, on peut aussi écrire l'ensemble des solutions de (7) comme l'ensemble des fonctions de la forme
$$y(x) = A\,e^{ux}\cos(vx + \varphi) \tag{9}$$
où A et φ sont deux constantes réelles.
En effet, le terme $K_1\cos(vx) + K_2\sin(vx)$ peut s'écrire
$$K_1\cos(vx) + K_2\sin(vx) = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\Big(\underbrace{\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}}_{\alpha}\cos(vx) - \underbrace{\frac{-K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}}_{\beta}\sin(vx)\Big).$$
Puisque $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, le point (α, β) du plan $\mathbb{R}^2$ est situé sur le cercle trigonométrique. On peut donc lui associer un angle $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que
$$\alpha = \cos\varphi \quad \text{et} \quad \beta = \sin\varphi.$$
On en déduit alors (voir l'Annexe A, page 83, concernant les formules trigonométriques)
$$\begin{aligned} K_1\cos(vx) + K_2\sin(vx) &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\big(\cos(\varphi)\cos(vx) - \sin(\varphi)\sin(vx)\big) \\ &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\,\cos(vx + \varphi). \end{aligned}$$
On retrouve bien l'expression (9) en posant $A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$.

Entraînez-vous ! *Déterminer la solution de $y'' + y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.*

Réponse On suit la même méthode que dans l'exercice précédent (on utilise la proposition IV.16 lorsque $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$).
Dans ce cas, le discriminant $\Delta = -4 < 0$, les racines complexes de l'équation caractéristique sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Les solutions de $y'' + y = 0$ sont donc de la forme
$$y(x) = K_1\cos(x) + K_2\sin(x).$$
Les deux constantes K_1 et K_2 sont ensuite déterminées grâce aux conditions supplémentaires $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On trouve $K_1 = 1$ et $K_2 = 1$ de sorte que
$$y(x) = \cos(x) + \sin(x).$$

Noter que les formules de trigonométrie permettent d'écrire $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$, et on a donc

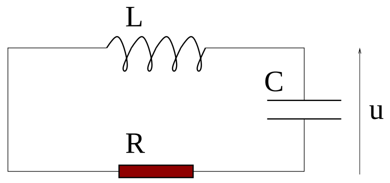
$$y(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}),$$

ce qu'on aurait pu retrouver en utilisant la remarque IV.17.

Exemple IV.18 (Circuit électrique RLC)**.** On s'intéresse un circuit RLC dessiné sur la figure ci-dessous. La tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 suivante

$$u''(t) + 2\lambda u'(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

où $2\lambda = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ (λ est appelé le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre, ces deux coefficients sont strictement positifs). Les solutions de cette équation différentielle sont données par la proposition IV.16. Leur "allure" dépend du signe du discriminant Δ qui vaut ici $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.



En électricité, on définit le facteur de qualité par $Q = \frac{\omega_0}{\lambda}$ ce qui permet de distinguer différents régimes de fonctionnement :

• Si $Q < 1$ alors $\Delta > 0$ et les solutions sont de la forme

$$u(t) = K_1\,\mathrm{e}^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + K_2\,\mathrm{e}^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

et le régime est dit apériodique.

• Si $Q = 1$ alors $\Delta = 0$ et les solutions sont de la forme

$$u(t) = (K_1 + K_2 t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et le régime est dit critique.

• Si $Q > 1$ alors $\Delta < 0$ et les solutions sont de la forme

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[K_1 \cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right) + K_2 \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)\right]$$

et le régime est dit sinusoïdal amorti.

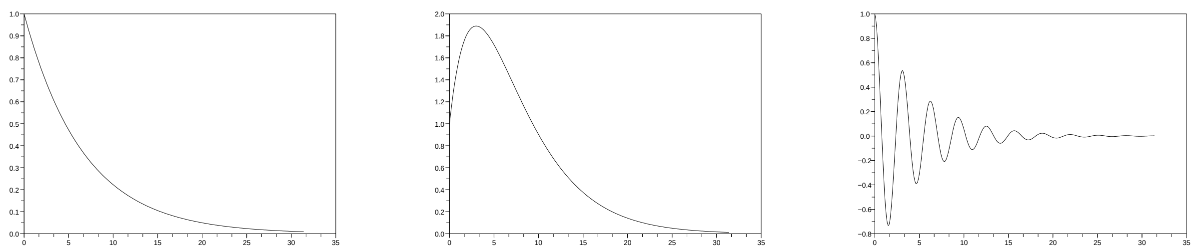


Figure IV.1 – Courbes d'évolution de la tension dans un circuit RLC en fonction du temps. Les trois régimes physiques selon le facteur qualité Q sont décrits. De gauche à droite : le régime apériodique, le régime critique et le régime sinusoïdal amorti.

IV.4.2 Cas des équations avec second membre

En toute généralité, une équation différentielle linéaire d'ordre 2 s'écrit

$$ay'' + by' + cy = f \tag{10}$$

où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels et où f est une fonction. Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, il est possible d'exploiter les résultats portant sur l'équation homogène associée. En effet, les solutions de l'équation différentielle (10) sont les fonctions $y_p + y_0$ où y_p est une solution particulière de (10) et où y_0 est une solution générale de l'équation homogène associée.
Dans la pratique, il faut d'une part savoir résoudre l'équation homogène (ce qui a été fait au paragraphe précédent) et d'autre part connaître une solution particulière de (10).
Outre la méthode de la variation des constantes comme pour l'ordre 1 mais plus lourde à exploiter en pratique, deux principes généraux peuvent nous guider afin d'obtenir une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :
• le premier est le principe de superposition : si le second membre f est la somme de plusieurs fonctions f_1 et f_2 on peut chercher une solution particulière y_{p_1} de l'équation différentielle avec f_1 pour second membre, puis une solution particulière y_{p_2} de l'équation différentielle avec f_2 pour second membre. La somme de ces deux solutions particulières $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution particulière de l'équation avec $f = f_1 + f_2$ pour second membre.
• Le second principe repose sur le fait que certains "espaces" de fonctions sont stables par dérivation. Par exemple l'ensemble des combinaisons de cos et sin est stable par dérivation au sens où si on dérive une de ces fonctions alors on obtient à nouveau une fonction de ce type. Ainsi, si le second membre à une forme particulière, on peut chercher une solution particulière dans un tel "espace"...

Exemple IV.19. L'équation différentielle pour un système d'oscillations forcées (obtenu par exemple en imposant une tension sinusoïdale de la forme $E\cos(\omega t)$ à un circuit de type RLC, voir l'exemple IV.18)

$$u''(t) + 2\lambda u'(t) + \omega_0^2 u(t) = E\cos(\omega t). \tag{11}$$

On cherche une solution particulière à cette équation sous la forme $u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, A et B étant deux coefficients réels à déterminer. En dérivant deux fois u_p, on en déduit que

$$\begin{aligned}
u_p \text{ est une solution de (11)} \quad &\Longleftrightarrow \quad (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))'' + 2\lambda(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))' \\
&\qquad\qquad + \omega_0^2(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = E\cos(\omega t) \\
&\Longleftrightarrow \quad (-A\omega^2 + 2B\omega\lambda + A\omega_0^2)\cos(\omega t) \\
&\qquad\qquad + (-B\omega^2 - 2A\omega\lambda + B\omega_0^2)\sin(\omega t)) = E\cos(\omega t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -A\omega^2 + 2B\omega\lambda + A\omega_0^2 = E \\ -B\omega^2 - 2A\omega\lambda + B\omega_0^2 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A + \quad 2\omega\lambda B = E \\ -2\omega\lambda A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système linéaire admet une unique solution (A, B) donnée par

$$\begin{cases} A = \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2} \\ B = \dfrac{2\omega\lambda E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}. \end{cases}$$

On en déduit qu'une solution particulière de (11) est donnée par

$$u_p(t) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}\cos(\omega t) + \frac{2\omega\lambda E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}\sin(\omega t).$$

Il suffit d'ajouter cette solution aux solutions de l'équation homogène (voir l'exemple IV.18) pour obtenir toutes les solutions de l'équation (11).

Il existe des "règles" pour savoir sous quelle forme chercher une solution particulière. Une des plus utiles/générales est la suivante :

> Si $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$, où P est un polynôme de degré d, et λ est un nombre réel alors il existe une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est un polynôme de degré égal à d si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, de degré égal à $d+1$, si λ est racine simple de l'équation caractéristique, et de degré égal à $d+2$, si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Noter qu'il peut être intéressant de se plonger dans le corps des complexes, et de voir $\cos(x)$ comme la partie réelle de e^{ix}, la règle précédente s'appliquant aussi lorsque λ est un nombre complexe...

Entraînez-vous ! *Déterminer toutes les solutions de l'équation $y"(x) - y(x) = x^2\, e^{5x}$.*

Réponse Nous avons déjà résolu l'équation homogène associée (vous les exercices précédents), les solutions sont de la forme

$$y_0(x) = K_1\, e^x + K_2\, e^{-x}.$$

Le second membre étant de la forme $P(x)e^{\lambda x}$ où $P(x) = x^2$ et $\lambda = 5$, nous allons chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^{5x}.$$

On écrit alors

$$y_p \text{ est solution de } y"(x) - y(x) = x^2\, e^{5x} \iff \Big[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^{5x}\Big]'' - \Big[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^{5x}\Big] = x^2\, e^{5x}.$$

En calculant la dérivée seconde, on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } y"(x) - y(x) = x^2\, e^{5x} &\iff 24\alpha\, x^2 + (20\alpha + 24\beta)x + (2\alpha + 10\beta + 24\gamma) = x^2 \\ &\iff \begin{cases} 24\alpha = 1 \\ 20\alpha + 24\beta = 0 \\ 2\alpha + 10\beta + 24\gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha = 1/24, \quad \beta = -5/144, \quad \gamma = 19/1728. \end{aligned}$$

Toutes les solutions de l'équation $y"(x) - y(x) = x^2\, e^{5x}$ sont donc de la forme

$$y(x) = \Big(\frac{1}{24}x^2 - \frac{5}{144}x + \frac{19}{1728}\Big)\, e^{5x} + K_1\, e^x + K_2\, e^{-x}.$$

Annexe A

Fonctions trigonométriques

Relations, valeurs de référence et décalages de phase

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

Table A.1 – Valeurs de référence du premier quadrant des fonctions sinus, cosinus et tangente

β	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$
$\cos(\beta)$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$\sin(\beta)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$\tan(\beta)$	$-\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\frac{-1}{\tan(\alpha)}$	$-\tan(\alpha)$	$\tan(\alpha)$

Table A.2 – Relations entre les valeurs des fonctions sinus, cosinus et tangente en différents angles

Equations trigonométriques

$$\cos a = \cos b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin a = \sin b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan a = \tan b \iff a = b + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Formules d'addition et de différence

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

Formules de multiplication

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\
\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\tan(2\theta) &= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \\
\sin(3\theta) &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
\cos(3\theta) &= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta
\end{aligned}$$

Conversion produit / somme

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big), \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big), \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin p - \sin q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Annexe B

Fonctions hyperboliques

Relations

$$\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$$

$$\operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta = \mathrm{e}^{\theta}$$
$$\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta = \mathrm{e}^{-\theta}$$

$$\operatorname{th}\theta = \frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta}$$

Formules d'addition et de différence

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b + \operatorname{ch}a\operatorname{sh}b\\
\operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b - \operatorname{ch}a\operatorname{sh}b\\
\operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b\\
\operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b - \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b\\
\operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}b}{1 + \operatorname{th}a\operatorname{th}b}\\
\operatorname{th}(a-b) &= \frac{\operatorname{th}a - \operatorname{th}b}{1 - \operatorname{th}a\operatorname{th}b}
\end{aligned}$$

Formules de multiplication

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(2\theta) &= \operatorname{ch}^2\theta + \operatorname{sh}^2\theta = 2\operatorname{ch}^2\theta - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2\theta\\
\operatorname{sh}(2\theta) &= 2\operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta\\
\operatorname{th}(2\theta) &= \frac{2\operatorname{th}\theta}{1 + \operatorname{th}^2\theta}\\
\operatorname{sh}(3\theta) &= 3\operatorname{sh}\theta + 4\operatorname{sh}^3\theta\\
\operatorname{ch}(3\theta) &= -3\operatorname{ch}\theta + 4\operatorname{ch}^3\theta
\end{aligned}$$

Conversion produit / somme

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\big),\\
\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\big),\\
\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q &= 2 \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q &= 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q &= 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q &= 2 \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Annexe C

Dérivées et primitives usuelles

fonction f	dérivée f'
α (constante)	0
x	1
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\mathrm{e}^{\alpha x}$	$\alpha\, \mathrm{e}^{\alpha x}$
α^x $(\alpha > 0)$	$\ln(\alpha)\, \alpha^x$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$

fonction f	dérivée f'
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$1-\mathrm{th}^2(x)$

fonction f	dérivée f'
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x)^\alpha$	$\alpha\, u'(x)\, u(x)^{\alpha-1}$

fonction f	dérivée f'
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x)\, \mathrm{e}^{u(x)}$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \times v'(x)$

fonction f	une primitive F
α (constante)	$\alpha\, x$
x	$\dfrac{x^2}{2}$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x
$\mathrm{e}^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	$\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$

fonction f	une primitive F
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$

fonction f	une primitive F
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$	$\dfrac{-1}{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u'(x)\,u(x)^\alpha$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1}$

fonction f	une primitive F
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$
$u'(v(x)) \times v'(x)$	$u(v(x))$