Trivialisations dans les catégories tannakiennes

Julien Bichon

Sommaire

0. Introduction

Dans l'article [**5**], Deligne donne un théorème de représentation pour certaines catégories tensorielles, montrant ainsi que ce sont des catégories tannakiennes. Sa preuve est basé sur un phénomène de trivialisation : pour chaque objet V d'une telle catégorie $\mathcal{V}$ il construit un anneau A_V de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ (catégorie des ind-objets de $\mathcal{V}$) tel que $A_V \otimes V \tilde{\to} A_V \otimes 1^n$ (1 est l'unité monoïdale de $\mathcal{V}$, n est la dimension de V).

Notre but premier est d'expliquer l'occurence de tels phénomènes (partie 4). Ensuite nous donnerons une construction directe des anneaux de trivialisations (que Deligne construit par itérations) : ils sont des versions catégoriques des algèbres de Hopf GL_n.

Nous appliquerons ces résultats à la caractérisation des catégories de représentations de groupes compacts, et retouverons le théorème de dualité de Doplicher-Roberts ([**7**]).

Les deux premiers paragraphes sont consacrés à des rappels sur la dualité de Tannaka et au principe général de reconstruction initié dans le livre de Saavedra ([**21**]). Ils sont directement inspirés de l'excellent article de Joyal et Street ([**16**]).

La partie 3 est consacrée à des rappels sur les catégories tensorielles : nous passons en revue le matériel nécessaire au théorème de représentation de la partie 5.

Ce théorème sera donné sous une forme plus faible que celui de Deligne : nous nous limiterons au cas de catégories semi-simples. En restreignant la généralité nous obtenons des preuves simplifiées des résultats de Saavedra et Deligne : unicité d'un foncteur fibre quand le corps de base est algébriquement clos ; existence d'un foncteur fibre à valeurs sur une extension algébrique du corps de base (quand celui-ci est non dénombrable) sur une catégorie tannakienne algébrique.

Le théorème principal donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une catégorie tensorielle sur un corps de caractéristique nulle admette un foncteur fibre (c'est à dire un foncteur exact, fidèle et préservant ses stuctures) à valeurs dans une catégorie de modules sur un anneau commutatif (en d'autres termes une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle catégorie soit tannakienne).

Dans le paragraphe 4, nous étudierons un exemple qui éclaire cette construction. Le problème est le suivant : définir sur la catégorie des revêtements d'un espace localement simplement connexe B un foncteur fibre (c'est à dire qui à un revêtement associe sa fibre en un point de B) sans faire référence à un point de base. Ceci conduit à la construction d'un revêtement universel de B, c'est à dire un revêtement qui trivialise tous les autres.

Nous introduirons ensuite la notion de trivialisation pour une représentation d'un groupe compact G. Les objets qui trivialiseront les représentations seront des G-espaces, et G sera l'unique G-espace homogène qui trivialise toutes les représentations.

On reliera ceci à la catégorie des représentations linéaires en prenant des algèbres de fonctions sur les espaces homogènes, et nous obtiendrons des anneaux de la catégorie des Ind-objets.

De même qu'un revêtement universel fournit un foncteur fibre sur la catégorie des revêtements de B, un anneau qui trivialise tous les objets d'une catégorie tensorielle complète semi-simple (définition dans la partie 3), en caractéristique 0, fournira un foncteur fibre sur cette catégorie.

Aucune notion de géométrie algébrique n'est requise, et nous n'aurons pas plus besoin d'analyse non commutative dans la dernière partie.

Il y a maintenant plusieurs applications du principe de dualité de Tannaka-Krein, notamment la construction de groupes quantiques à partir d'opérateurs de Yang-Baxter (cf [**16**]).

Le formalisme des catégories tannakiennes s'applique également à la théorie des équations différentielles algébriques : la construction d'une extension de Picard-Vessiot pour une équation différentielle linéaire est équivalente à la construction d'un foncteur fibre sur une certaine catégorie tannakienne (cf [**5**] pour cette application).

1. Dualité de Tannaka-Krein

La théorie de Gelfand-Naimark caractérise les algèbres de la forme $C(X)$ (fonctions continues à valeurs complexes sur un espace topologique compact X) : ce sont les C^*-algèbres commutatives ([**8**]). Le foncteur $X \to C(X)$ établit alors une anti-équivalence (dualité) de catégories entre la catégorie des espaces topologiques compacts et la catégorie des C^*-algèbres commutatives.

Si $X = G$ est un groupe topologique, Hofmann ([**15**]) montre que cette anti-équivalence induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes compacts et celle des C^*-algèbres de Hopf commutatives.

La dualité de Tannaka-Krein permet de décrire cette situation à l'aide d'une sous-algèbre de $C(G)$, l'algèbre des fonctions représentatives, notée $R(G)$.
Les différentes stuctures algébriques de $R(G)$ se déduisent des propriétés de la catégorie des représentations (continues, de dimension finie) de G, et $R(G)$ étant un "dual" pour G, ces propriétés fournissent les axiomes corrects pour reconnaitre les catégories de représentations de groupes compacts.

Définition. Une fonction continue $f : G \to \mathbb{C}$ est dite représentative si le sous-espace vectoriel de $C(G)$ engendré par les translatées $x.f$, $x \in G$, est de dimension finie. On note $R(G)$ l'ensemble des fonctions représentatives.

De telles fonctions sont directement reliées aux représentations de G : si $f \in C(G), f \in R(G)$ si et seulement s'il existe (V, π_V) (V est un espace vectoriel de dimension finie, $\pi_V : G \to GL(V)$ un morphisme de groupes topologiques) une représentation de G, $A \in \mathrm{End}(V)$, tels que $f(x) = Tr(A \circ \pi_V(x))$, $\forall x \in G$.
De façon équivalente, il existe une base de V telle que si en notation matricielle, on a $\pi_V = (\pi_{ij})_{1 \leq i,j \leq dimV}$, il existe i et j tels que $f = \pi_{ij}$.

La somme de fonctions représentatives est une fonction représentative : ceci provient de l'existence de sommes directes dans la catégorie $\mathcal{R}ep(G)$.
Le produit tensoriel de représentations induit un produit sur $R(G)$: si (V, π_V) et (W, π_W) sont des représentations de G,

$$Tr(A \circ \pi_V(x)) \times Tr(B \circ \pi_W(x)) = Tr((A \otimes B) \circ (\pi_V(x) \otimes \pi_W(x)))$$

$$= Tr((A \otimes B) \circ \pi_{V \otimes W}(x))$$

$R(G)$ est de plus stable à l'$*$-involution de $C(G)$, en raison de l'existence de la représentation conjuguée.
$R(G)$ est donc une sous $*$-algèbre de $C(G)$.

Le théorème de Peter-Weyl ([**14**], II-1-4) affirme que $R(G)$ est dense dans $C(G)$. Pour reconstituer G à partir de $R(G)$, on a besoin d'informations supplémentaires sur $R(G)$.

On a un morphisme naturel $R(G) \to R(G \times G)$, induit par le produit de G, ainsi qu'un isomorphisme $R(G) \otimes R(G) \to R(G \times G)$ qui à $f \otimes g$ associe la fonction sur $G \times G : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ ([**14**]).
On déduit de ces flèches un coproduit associatif $\Delta : R(G) \to R(G) \otimes R(G)$. Si f est représentative de (V, π_V), $f = \pi_{ij}$, alors $\Delta(f) = \sum_k \pi_{ik} \otimes \pi_{kj}$.
Soit $\varepsilon : R(G) \to \mathbb{C}$ l'application évaluation en l'unité de G (counité).
ε et Δ sont des morphismes d'algèbres et $\varepsilon \otimes 1_{R(G)} \circ \Delta = 1_{R(G)} \otimes \varepsilon \circ \ \Delta = 1_{R(G)}$: ceci signifie que $R(G)$ est une bialgèbre.
Enfin $R(G)$ est munie d'une antipode $S : R(G) \to R(G)$, c'est à dire que S vérifie $m \circ S \otimes 1_{R(G)} \circ \Delta = m \circ 1_{R(G)} \otimes S \circ \Delta = u \circ \varepsilon$ (m est la multiplication de $R(G)$ et u est l'unité). Pour $f \in R(G)$, $S(f)(x) = f(x^{-1})$, $\forall x \in G$. On a $S(f) \in R(G)$, ce qui provient de la notion de représentation contragrédiente :

$$S(f)(x) = Tr(A \circ \pi_V(x^{-1}) = Tr({}^tA \circ {}^t\pi_V(x^{-1})) = Tr({}^tA \circ \pi_{V^\vee}(x))$$

Les représentations conjuguées et contragédientes sont isomorphes, et on a $S(f^*) = S(f)^*$, $\forall f \in R(G)$.

En résumé $R(G)$ est une $*$-algèbre de Hopf commutative.

Pour toute algèbre A notons $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des morphismes d'algèbres de A dans $\mathbb{C}$: les caractères de A.
Si $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf, $\mathrm{Spec}(A)$ est un groupe : si χ et ψ appartiennent à $\mathrm{Spec}(A)$, posons $\chi.\psi = \chi \otimes \psi \circ \Delta$. L'élément neutre est ε, et l'inverse de χ est $\chi \circ S$.
Si A est une $*$-algèbre de Hopf, notons $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des χ de $\mathrm{Spec}(A)$ tels que $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}, \forall a \in A$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{Spec}(A)$ car $\Delta(a^*) = \Delta(a)^*$ et $S(a^*) = S(a)^*$, $\forall a \in A$. Un élément de $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$ sera appelé un caractère réel.
Munissons alors $\mathrm{Spec}(A)$ (et donc aussi $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$) de la topologie la moins fine rendant continues les évaluations en les points de A.

On a un morphisme naturel :

$$G \longrightarrow \ \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(R(G))$$

qui à un point de G associe l'évaluation en ce point.

Le théorème de dualité de Tannaka affirme que c'est un isomorphisme ([**13**], 30.5, 30.53, 30.54).

Remarque. En général, on a $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(R(G)) \not\subset \mathrm{Spec}(R(G))$. Par exemple, si $G = SU(n)$, alors $R(G) = \mathbb{C}[X_{11}, \ldots, X_{nn}]/(D-1)$, où $D = \det(X_{ij})$; on a $\Delta(\pi_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$, et $\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$. De plus $S(X_{ij})_{ij}$ est la transposée de la matrice des cofacteurs de $(X_{ij})_{ij}$, et $(X_{ij})^*_{ij}$ est la matrice des cofacteurs de $(X_{ij})_{ij}$.

On a alors $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(R(G)) = SU(n)$ et $\mathrm{Spec}(R(G)) = SL_n(\mathbb{C})$. $SL_n(\mathbb{C})$ est une forme réelle de $SU(n)$.

Caractérisons maintenant les $*$-algèbres de la forme $R(G)$, pour un certain groupe compact G.

Soit $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une $*$-algèbre de Hopf. Une forme linéaire $J : A \to \mathbb{C}$ est dite une mesure de Haar sur A (appelée jauge dans [**14**]) si $1_A \otimes J \circ \Delta = u \circ J$ (invariance par translations), $J \circ u = 1$ et $J(a^*a) > 0$ si $a \neq 0$.
Pour un groupe compact G, la mesure de Haar habituelle munit $R(G)$ d'une mesure de Haar
Quand A est munie d'une mesure de Haar, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$ est un groupe compact.

Théorème (Tannaka-Krein). *Le foncteur $G \to R(G)$ établit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes compacts et la catégorie des $*$-algèbres de Hopf commutatives munies d'une mesure de Haar.*

Remarque. Dans [14], on utilise l'hypothèse additionnelle que les caractères réels d'une telle algèbre de Hopf séparent ses points. Ce théorème est donné sous sa forme originelle dans [4], livre récent dans lequel les auteurs semblent tout connaitre. L'énoncé donné ici semble donc nouveau (voir [**2**]).

Notons une autre caractérisation des algèbres de fonctions représentatives, fondée sur la notion d'algèbre de Krein (voir [**13**]), qui donne lieu à une anti-équivalence de catégorie ([**10**]).
Cette approche permet une caractérisation directe des catégories de représentations de groupes compacts, parmi les sous-catégories de la catégorie des espaces de Hilbert de dimension finie (en exercice dans [**19**]).

Nous préfèrerons ici l'approche des catégories tannakiennes de Saavedra ([**21**]), où plus généralement on caractérise les catégories de comodules sur une algèbre de Hopf (représentations d'un schéma en groupe affine).
En effet la catégorie des représentations d'un groupe compact G n'est autre que la catégorie des comodules sur $R(G)$.

2. Catégories de comodules

Soit (V, π_V) une représentation d'un groupe compact. Fixons $v_1, \cdots, v_n$ une base de V telle que π_V ait la représentation matricielle $\pi_V = (\pi_{ij})_{ij}$, où $\pi_{ij} \in R(G)$. On définit alors une application linéaire $\rho_V : V \to V \otimes R(G)$, par $\rho_V(v_i) = \sum_j v_j \otimes \pi_{ji}$, vérifiant :

$$1_V \otimes \Delta \circ \rho_V = \rho_V \otimes 1_{R(G)} \circ \rho_V$$

$$1_V \otimes \varepsilon \circ \rho_V = 1_V$$

Ceci signifie que V est muni d'une structure de $R(G)$-comodule à droite. Notons $\mathcal{C}omod_f(R(G))$ la catégorie des comodules à droites de dimension finie sur $R(G)$.

Proposition. *Le foncteur précédent $\mathcal{R}ep(G) \longrightarrow \mathcal{C}omod_f(R(G))$ est une équivalence de catégories.*

$\mathcal{R}ep(G)$ est donc un cas particulier de catégorie de comodules sur une algèbre de Hopf.

Décrivons maintenant le procédé de reconstruction.

Une fonction représentative est déterminée par la donnée d'une représentation (V, π_V) et d'un élément $A \in \mathrm{End}(V)$. Si E est l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de G, on a une application linéaire surjective $\bigoplus_{V \in E} \mathrm{End}(V) \longrightarrow R(G)$.

Soit N le sous-espace de $\bigoplus_{V \in E} \mathrm{End}(V)$ engendré par les $f \circ A - A \circ f$, où $f : V \to W$ est un morphisme de $\mathcal{R}ep(G)$, et $A : V \to W$ est une application linéaire quelconque. On pose :

$$\mathrm{End}^\vee(\Omega) := \bigoplus_{V \in E} \mathrm{End}(V)/N$$

Consulter [**16**] pour le résultat suivant :

Théorème. $\mathrm{End}^\vee(\Omega) \xrightarrow{\sim} R(G)$ *(isomorphisme d'espaces vectoriels).*

En fait, pour construire $\mathrm{End}^\vee(\Omega)$, on n'utilise que la donnée d'une catégorie (ici $\mathcal{R}ep(G)$) et d'un foncteur à valeurs dans les espaces vectoriels de dimension finie (ici le foncteur oubli Ω). Généralisons cette construction.

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $F : \mathcal{C} \to Vect_f(k)$ (où k est un corps commutatif, $Vect_f(k)$ est la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie), un foncteur. $\mathrm{End}^\vee(F)$ est par définition le quotient de $\bigoplus_{X \in ob(\mathcal{C})} \mathrm{End}(F(X))$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $A \circ F(f) - F(f) \circ A$, où $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $A \in \mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$.
Si $A \in \mathrm{End}(F(X))$, on note $[X, A]$ son image dans $\mathrm{End}^\vee(F)$.

La notation $\mathrm{End}^\vee(F)$ est justifiée par le fait que $(\mathrm{End}^\vee(F))^*$ est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes du foncteur F : à un élément $u = (u_X)$, on associe la forme linéaire ψ_u sur $\mathrm{End}^\vee(F)$ telle que $\psi_u(\sum_i [X_i, A_i]) = \sum_i Tr(u_{X_i} \circ A_i)$.

$\mathrm{End}^\vee(F)$ est muni d'une structure naturelle de coalgèbre, transportée de celle des $\mathrm{End}(F(X))$: $\varepsilon([X,A]) = Tr(A)$. Si $X \in ob(\mathcal{C})$, soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de X et soit $E_{i,j} = e_i^* \otimes e_j$ la base associée de $\mathrm{End}(F(X))$. On pose $\Delta([X, E_{i,j}]) = \sum_k [X, E_{i,k}] \otimes [X, E_{k,j}]$.

Notons que si $\mathcal{C} = Rep(G)$, alors $\mathrm{End}^\vee(\Omega)$ et $R(G)$ sont isomorphes comme coalgèbres.

Pour chaque objet de $\mathcal{C}$, on munit $F(X)$ d'une structure de $\mathrm{End}^\vee(F)$-comodule par $\alpha_{F(X)} : F(X) \to F(X) \otimes \mathrm{End}^\vee(F)$ défini ainsi : si $e_1, \cdots, e_n$ est une base de $F(X)$ et $x \in F(X)$, alors $\alpha_{F(X)}(x) = \sum_j e_j \otimes [X, e_j^* \otimes x]$.

Le foncteur F se factorise alors en un foncteur $\overline{F}$ suivi du foncteur oubli :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\overline{F}"'] & Vect_f(k) \\
Comod_f(\mathrm{End}^\vee(F)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Le résultat fondamental de la théorie est le suivant (voir [**16**], partie 7) :

Théorème fondamental. *1) Soit E une k-coalgèbre, et $\Omega : Comod_f(E) \to Vect_f(k)$ le foncteur oubli. Il existe un isomorphisme de coalgèbres $\mathrm{End}^\vee(\Omega) \xrightarrow{\sim} E$.*
2) Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie abélienne k-linéaire, et $F : \mathcal{C} \to Vect_f(k)$ un foncteur exact et fidèle. Alors F se factorise en un foncteur $\overline{F} : \mathcal{C} \to Comod_f(\mathrm{End}^\vee(F))$, qui est une équivalence de catégories.

Pour reconstruire un groupe compact à partir de sa catégorie de représentations, nous avons besoin de plus de structure sur cette catégorie.
On a vu au paragraphe précédent que le produit tensoriel sur $\mathcal{R}ep(G)$ induit un produit sur $\mathrm{End}^\vee(\Omega)$: $[V, A][W, B] = [V \otimes W, A \otimes B]$, opération rendue possible par le fait que Ω préserve le produit tensoriel. Le produit est commutatif car l'application $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ est G-linéaire.

Dans le cas général $F : \mathcal{C} \to Vect_f(k)$, nous connaissons alors la structure à imposer à $\mathcal{C}$ pour obtenir un produit sur $\mathrm{End}^\vee(F)$: une sorte de produit tensoriel (structure monoïdale) préservée par F. Une notion de dual donnera l'antipode et enfin la conjugaison sur $\mathrm{End}^\vee(F)$ découlera de propriétés de conjugaison dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C} = \mathcal{R}ep(G)$, alors $G = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(\mathrm{End}^\vee(\Omega))$.

Le prochain paragraphe est consacré à ces différentes structures (sauf pour la conjugaison, sur laquelle nous reviendrons dans la partie 6).

Remarque. Ici les objets qui interviennent naturellement sont les coalgèbres. Les produits sont des données supplémentaires.

3. Catégories tensorielles : rappels et définitions

3.1 Définition. Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$, d'un foncteur $-\otimes - : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ associatif (i.e. $(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes(Y\otimes Z)$, pour tous objets X, Y, Z de $\mathcal{C}$), et d'un objet 1 de $\mathcal{C}$ tel que $X\otimes 1 = 1\otimes X = X$ pour tout objet X.
Si $\mathcal{C}$ est k-linéaire, $\mathcal{C}$ sera dite monoïdale sur k si $-\otimes-$ est k-bilinéaire (k désignera toujours un corps commutatif).

Exemple. Soit A une k-algèbre commutative. Le produit tensoriel usuel fait de la catégorie des A-modules une catégorie monoïdale sur A.

On voit sur cet exemple que la condition $(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes(Y\otimes Z)$ n'est pas toujours vérifiée, l'égalité étant remplacée par des isomorphismes fonctoriels. En fait le théorème de cohérence de Mac-Lane assure qu'il n'y a pas de perte d'information à supposer que ces isomorphismes sont des flèches identité, car une catégorie monoïdale générale ([**17**]) est $\otimes$-équivalente (voir 3.2) à une catégorie monoïdale définie ici ([**17**]).

Exemple. Soit (E,Δ,ε) une k-coalgèbre. Si E est une bialgèbre, la catégorie $\mathcal{C}omod(E)$ devient une catégorie monoïdale sur k. Soit $m : E\otimes E\to E$ le produit, $u : k\to E$ l'unité, X et Y des E-comodules. On définit une coaction sur $X\otimes Y$ par $\alpha_{X\otimes Y} = 1_{X\otimes Y}\otimes m\circ 1_X\otimes\tau_{E,Y}\otimes 1_E\circ\alpha_X\otimes\alpha_Y$ (où $\tau_{E,Y} : E\otimes Y\to Y\otimes E$ est défini par $\tau_{E,Y}(x\otimes y) = y\otimes x$). L'unité monoïdale est k, munie de la coaction donnée par l'unité de E.
De même si A est une k-bialgèbre (non supposée commutative), la catégorie $Mod(A)$ est monoïdale.

3.2 Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories monoïdales, on dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ est monoïdal (ou un $\otimes$-foncteur) s'il préserve les structures monoïdales. Plus précisément :

Définition. Un foncteur $F : (\mathcal{C},\otimes,1)\to(\mathcal{C}',\otimes,1)$ entre catégories monoïdales est dit un $\otimes$-foncteur si $F(1) = 1$, et s'il existe un isomorphisme fonctoriel $\widetilde{F}_{X,Y} : F(X)\otimes F(Y)\to F(X\otimes Y)$ tel que pour tous objets X, Y, Z de $\mathcal{C}$ on a

$$\widetilde{F}_{X\otimes Y,Z}\circ\widetilde{F}_{X,Y}\otimes 1_{F(Z)} = \widetilde{F}_{X,Y\otimes Z}\circ 1_{F(X)}\otimes\widetilde{F}_{Y,Z}$$

Définition. Si F, $G : \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ sont des $\otimes$-foncteurs, un morphisme de $\otimes$-foncteurs $u : F\to G$ est un morphisme de foncteurs tel que $u_1 = 1$ et tel que pour tous objets X et Y :

$$u_{X\otimes Y} \circ \widetilde{F}_{X,Y} = \widetilde{G}_{X,Y} \circ u_X \otimes u_Y$$

Dans [**21**] il est montré que si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un $\otimes$-foncteur et une équivalence de catégories, il existe alors un $\otimes$-foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ et des isomorphismes de $\otimes$-foncteurs $1 \tilde{\to} G \circ F$, $1 \tilde{\to} F \circ G$. On dira que F est une une $\otimes$-équivalence.

3.3 Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie monoïdale, $F : \mathcal{C} \to Vect_f(k)$ un $\otimes$-foncteur. Ainsi que le suggèrent les paragraphes précédents, la coalgèbre $\mathrm{End}^\vee(F)$ est alors une bialgèbre : soit X, Y des objets de $\mathcal{C}$, $A \in \mathrm{End}(F(X))$, $B \in \mathrm{End}(F(Y))$,

$$[X, A][Y, B] := [X \otimes Y, \widetilde{F}_{X,Y} \circ A \otimes B \circ \widetilde{F}^{-1}_{X,Y}]$$

F se factorise alors en un $\otimes$-foncteur $\bar{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}omod_f(\mathrm{End}^\vee(F))$ qui est une $\otimes$-équivalence si $\mathcal{C}$ et F vérifient les conditions du théorème fondamental.
Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}omod_f(E)$ où E est une bialgèbre, l'isomorphisme $\mathrm{End}^\vee(F) \tilde{\to} E$ est un isomorphisme de bialgèbres.

3.4 Etudions maintenant le concept de dualité dans une catégorie monoïdale, qui est lié à l'existence d'une antipode pour une bialgèbre.

Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, et X un objet de $\mathcal{C}$. Un dual à gauche pour X est la donnée d'un triplet $(X^\vee, e_X, \delta_X)$ où $X^\vee$ est un objet de $\mathcal{C}$, $e_X : X^\vee \otimes X \to 1$, $\delta_X : 1 \to X \otimes X^\vee$ sont des flèches de $\mathcal{C}$ vérifiant :

$$1_X \otimes e_X \circ \delta_X \otimes 1_X = 1_X$$

$$e_X \otimes 1_{X^\vee} \circ 1_{X^\vee} \otimes \delta_X = 1_{X^\vee}$$

Etant donnés deux objets X et $X^\vee$, une application $e : X^\vee \otimes X \to 1$, on a pour tous objets Y et Z de $\mathcal{C}$ une application :

$$e_{Y,Z} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \otimes Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^\vee \otimes Y, Z)$$

qui à un élément f associe $e \otimes 1_Z \circ 1_{X^\vee} \otimes f$.

Proposition. *$e_{(Y,Z)}$ est une bijection pour tous objets Y et Z si et seulement si il existe $\delta : 1 \to X \otimes X^\vee$ tel que $(X^\vee, e, \delta)$ est un triplet de dualité pour X.*

Cela signifie que le foncteur $s_X = X \otimes -$ admet un adjoint à gauche, qui est de plus de la forme $s_{X^\vee}$, pour un certain objet $X^\vee$. Les résultats usuels d'unicité pour les foncteurs adjoints donnent :

Proposition. *Soit $(X^\vee, e, \delta)$, (X^*, e', δ') deux triplets de dualité pour un objet X. Alors il existe un unique isomorphisme $\mu : X^\vee \to X^*$ tel que $e' \circ \mu \otimes 1_X = e$ et $1_X \otimes \mu \circ \delta = \delta'$.*

Exemple. Dans [**5**] il est prouvé que dans la catégorie monoïdale des A-modules (A une k-algèbre commutative) un objet admet un dual si et seulement si il est projectif de type fini : le dual est alors le dual usuel et e est l'application évaluation.

Exemple. Si X admet un dual $X^\vee$ et Y admet un dual $Y^\vee$, alors $X \otimes Y$ admet un dual qui est $Y^\vee \otimes X^\vee$, on a $e_{X\otimes Y} = e_Y \circ 1_{Y^\vee} \otimes e_X \otimes 1_Y$ et $\delta_{X\otimes Y} = 1_Y \otimes \delta_X \otimes 1_{Y^\vee} \circ \delta_Y$.

Définition. Une catégorie monoïdale dans laquelle tout objet admet un dual est dite rigide.

Remarque. Contrairement à ce que suggèrent les notations, on n'a pas nécessairement d'isomorphisme entre X et $X^{\vee\vee}$ (cf. [**16**], partie 9). Toutefois cette propriété est vraie quand le produit tensoriel est commutatif (voir plus loin).

Soit $f : X \to Y$ une flèche dans une catégorie monoïdale rigide $\mathcal{C}$. On définit la transposée de f, notée ${}^t f : Y^\vee \to X^\vee$, ainsi :

$${}^t f = e_Y \otimes 1_{X^\vee} \circ 1_{Y^\vee} \otimes f \otimes 1_{X^\vee} \circ 1_{Y^\vee} \otimes \delta_X$$

${}^t f$ est l'unique flèche $Y^\vee \to X^\vee$ telle que

$$e_X \circ {}^t f \otimes 1_X = e_X \circ f \otimes 1_X$$

C'est aussi l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^\vee, X^\vee)$ tel que $1_Y \otimes {}^t f \circ \delta_Y = f \otimes 1_X \circ \delta_X$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, alors ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^\vee, X^\vee)$, posons $g^t = 1_Y \otimes e_X \circ 1_Y \otimes g \otimes 1_X \circ \delta_Y \otimes 1_X$. On vérifie facilement que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, alors $({}^t f)^t = f$ et ${}^t(g^t) = g$.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un $\otimes$-foncteur. Si X est un objet de $\mathcal{C}$ qui admet un dual, $F(X)$ admet un dual, isomorphe à $F(X^\vee)$.

Le prochain résultat sera utile ([**21**], I 5.2.3) :

Proposition. *Soit F, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ des $\otimes$-foncteurs entre catégories monoïdales rigides. Soit $u : F \to G$ un morphisme de $\otimes$-foncteurs : c'est un isomorphisme.*

3.5 Soit E une bialgèbre. Nous allons voir que E est une algèbre de Hopf si et seulement si $\mathcal{C}omod_f(E)$ est rigide.

Soit E une algèbre de Hopf, V un E-comodule de dimension finie. Fixons $v_1 \ldots v_n$ une base de V, soit n^2 éléments $(\alpha_{i,j})$ de E tels que $\alpha_V(v_i) = \sum_j v_j \otimes \alpha_{j,i}$. Définissons une coaction sur V^* par $\alpha_{V^*}(v_i^*) = \sum_j v_j^* \otimes S(\alpha_{i,j})$ (dans la base duale). Muni de cette coaction , V^* est un dual pour V dans $\mathcal{C}omod_f(E)$, avec la flèche évaluation usuelle.

Pour prouver la réciproque, on peut travailler sur $\mathrm{End}^\vee(\Omega)$, où

$$\Omega : \mathcal{C}omod_f(E) \to Vect_f(k)$$

est le foncteur oubli. Si V est un comodule , $A \in \mathrm{End}(V)$, en posant $S([V,A]) = [V^\vee, {}^t A]$, où ${}^tA$ est la transposée usuelle, on définit une antipode sur $\mathrm{End}^\vee(\Omega)$.

Plus généralement, si $F : \mathcal{C} \to Vect_f(k)$ est un $\otimes$-foncteur entre catégories rigides $\mathrm{End}^\vee(F)$ possède une antipode ([**22**]). Si $X \in ob(\mathcal{C})$, $A \in \mathrm{End}(F(X))$, fixons $\mu_X : F(X^\vee) \xrightarrow{\sim} F(X)^\vee$ des isomorphismes pour chaque objet, on pose

$$S([X,A]) := [X^\vee, \mu_X^{-1} \circ {}^t A \circ \mu_X]$$

où ${}^tA$ est la transposée habituelle.

3.6 Soit A un anneau commutatif. On a pour tous A-modules M et N, un isomorphisme A-linéaire évident $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A M$, $x \otimes y \mapsto y \otimes x$. Modélisons ce phénomène dans une catégorie monoïdale quelconque.

Définition. Une symétrie sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un isomorphisme fonctoriel $C_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ tel que :

$$C_{Y,X} \circ C_{X,Y} = 1_{X\otimes Y}$$

$$C_{X,Z} \otimes 1_Y \circ 1_X \otimes C_{Y,Z} = C_{X\otimes Y,Z}$$

Une catégorie monoïdale munie d'une symétrie sera dite monoïdale symétrique.
Une catégorie monoïdale sur un corps k et symétrique sera dite tensorielle sur k.

Exemple. Soit A une k-bialgèbre. $Mod(A)$ est tensorielle sur k si et seulement si A est cocommutative. De même $\mathcal{C}omod(A)$ est tensorielle sur k si et seulement si A est commutative.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories monoïdales symétriques, un $\otimes$-fonteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est dit symétrique si pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, on a

$$F(C_{X,Y}) \circ \widetilde{F}_{X,Y} = \widetilde{F}_{Y,X} \circ C_{F(X),F(Y)}$$

Quand $\mathcal{C}$ est monoïdale symétrique, $\mathrm{End}^\vee(F)$ est une algèbre commutative si $F : \mathcal{C} \to Vect_f(k)$ est un $\otimes$-foncteur symétrique.

Soit $\mathbb{P}$ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels, avec $(m,n) = \emptyset$ si $m \neq n$ et $(n,n) = S_n$, le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments.
$\mathbb{P}$ est une catégorie monoïdale symétrique : le produit de deux objets m et n de $\mathbb{N}$ est donné par addition, c'est à dire $m \otimes n = m + n$ et si $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_m$, on pose

$$\sigma \otimes \tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m & m+1 & \dots & m+n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(m) & m+\tau(1) & \dots & m+\tau(n) \end{pmatrix}$$

La symétrie est donnée par les permutations :

$$(m,n) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m & m+1 & \ldots & m+n \\ n+1 & \ldots & n+m & 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}$ est la catégorie monoïdale symétrique libre engendrée par un objet, c'est à dire :

Théorème. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique. Alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un unique $\otimes$-foncteur symétrique $F_X : \mathbb{P} \to \mathcal{C}$ tel que $F_X(1) = X$.*

La preuve est donnée par exemple dans [**17**], dans le cadre plus général des catégories tressées.
On a $F_X(n) = X^{\otimes n}$; si $s_i \in S_n$ est la transposition $(i, i+1)$, $F_X(s_i) = 1_{X^{\otimes i-1}} \otimes C_{X,X} \otimes 1_{X^{\otimes n-i-1}}$; $F_X((m,n)) = C_{X^{\otimes m}, X^{\otimes n}}$.

Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale rigide. Soit X un objet de $\mathcal{C}$, nous avons remarqué que s_X avait un adjoint à gauche de la forme $s_{X^\vee}$. Le foncteur $s'_X = - \otimes X$ admet quant à lui un adjoint à droite $s'_{X^\vee} = - \otimes X^\vee$. Si de plus $\mathcal{C}$ est symétrique, alors $s_X \xrightarrow{\sim} s'_X$ et donc s_X admet un adjoint à droite et à gauche : il commute donc aux limites inductives et projectives.
Pour tout objet X, $s_{X^\vee}$ est un adjoint à droite pour s_X, et dans le cas symétrique c'est aussi un adjoint à gauche, et donc X est un dual à gauche pour $X^\vee$, les flèches de dualité étant données par $e_{X^\vee} = e_X \circ C_{X,X^\vee}$ et $\delta_{X^\vee} = C_{X,X^\vee} \circ \delta_X$. On a donc un isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X^{\vee\vee}$.

3.7 Trace et dimension.

Fixons une catégorie monoïdale symétrique et rigide $\mathcal{C}$. Alors $\mathrm{End}(1)$ est un anneau commutatif.

Nous allons définir, pour chaque objet X, une application

$$Tr_X : \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(1)$$

vérifiant les propriétés de la trace usuelle.
Si $f \in \mathrm{End}(X)$, posons :

$$Tr_X(f) = e_X \circ 1_{X^\vee} \otimes f \circ C_{X,X^\vee} \circ \delta_X$$

Le résultat d'unicité du dual montre que $Tr_X(f)$ ne dépend pas du choix de $(X^\vee, e_X, \delta_X)$. On le note simplement $Tr(f)$.
Soit $\dim(X) = Tr(1_X)$, c'est la dimension de X.

Voici les principaux résultats :
Soit $f : Y \to X$, $g : X \to Y$, on a $Tr(g \circ f) = Tr(f \circ g)$.
En particulier si $X \xrightarrow{\sim} Y$, $\dim(X) = \dim(Y)$.

Si $f \in \mathrm{End}(X)$, $Tr(f) = Tr({}^t f)$, si $g \in End(Y)$, alors $Tr(f \otimes g) = Tr(f) \circ Tr(g)$ et en particulier $\dim(X \otimes Y) = \dim(X) \circ \dim(Y)$.
Si $X = X_1 \oplus X_2$, $\dim(X) = \dim(X_1) + \dim(X_2)$ (quand la catégorie est linéaire).
On peut également vérifier que $\dim(X) = \dim(X^\vee)$.

Dans $Vect_f(k)$, ces applications sont les traces et dimensions usuelles, pourvu que $car(k) = 0$.

3.8 Puissances extérieures.

Supposons k de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoidale sur k, que l'on suppose abélienne dans cette partie.
Pour un objet X, posons pour chaque entier n,

$$A_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) F_X(\sigma)$$

(notations du théorème dans 3.6). Alors $A_n(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}, X^{\otimes n})$.
C'est une projection (la projection totalement antisymétrique).

Définition. $\overset{n}{\wedge}(X) = Im(A_n(X))$

On notera $w_n(X) : \overset{n}{\wedge}(X) \to X^{\otimes n}$ et $\pi_n(X) : X^{\otimes n} \to \overset{n}{\wedge}(X)$ les morphismes tels que $A_n(X) = w_n(X) \circ \pi_n(X)$ et $\pi_n(X) \circ w_n(X) = 1_{\overset{n}{\wedge}(X)}$

Pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, on a un isomorphisme :

$$\overset{n}{\wedge}(X \oplus Y) \overset{\sim}{\to} \bigoplus_{k=0}^{n} \overset{k}{\wedge}(X) \otimes \overset{n-k}{\wedge}(X)$$

Les morphismes de sommes directes se définissent naturellement, et il faut ensuite écrire $A_n(X \oplus Y))$ en fonction des $A_k(X) \otimes A_{n-k}(X)$ (voir [**7**], relation 3.4).

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ est rigide.
Notons la relation ${}^t A_n(X) = A_n(X^\vee)$, car $\forall \sigma \in S_n$, ${}^t F_X(\sigma) = F_{X^\vee}(\sigma^{-1})$
La dimension d'un objet X est liée avec celle de $\overset{n}{\wedge}(X)$:

Théorème. *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$*

$$dim(\overset{n}{\wedge}(X)) = Tr(A_n(X)) = \frac{dimX \circ (dimX - 1) \circ \ldots \ (dimX - n + 1)}{n!}$$

On peut trouver la preuve dans [**7**], où la trace est décomposée.

3.9 Puissances symétriques.

On garde les mêmes notations que dans le paragraphe précédent.
Soit $B_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} F_X(\sigma)$ et $S^n(X) = Im(B_n(X))$.
On notera $\rho_n(X) : S^n(X) \to X^{\otimes n}$ et $\tau_n(X) : X^{\otimes n} \to S^n(X)$ les flèches telles que $\tau_n(X) \circ j_n(X) = 1_{S^n(X)}$ et $j_n(X) \circ \tau_n(X) = B_n(X)$.

Quand nous aurons abordé le paragraphe sur les Ind-objets, nous pourrons définir l'algèbre symétrique d'un objet (ainsi que l'algèbre extérieure mais nous n'en aurons pas l'utilité).

3.10 Catégories tannakiennes

Définition. Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle sur un corps k. Si $\mathcal{V}$ est rigide, abélienne et telle que $\mathrm{End}(1) = k$, on dit que $\mathcal{V}$ est une catégorie tensorielle complète.

Définition. une catégorie tannakienne sur un corps k est une catégorie tensorielle complète sur k munie d'un $\otimes$-foncteur linéaire exact et fidèle, à valeurs dans les A-modules pour A une k-algèbre commutative. Un tel foncteur sera appelé un foncteur fibre.
Une catégorie tannakienne sur k admettant un foncteur fibre à valeurs dans $Vect_f(k)$ sera dite neutre.

Remarques. 1) D'après le résultat ([**5**], 2.6) un foncteur fibre est nécessairement à valeurs dans les modules projectifs de type fini.
2) Une catégorie tannakienne sur k admet nécessairement un foncteur fibre à valeurs dans les K-espaces de dimension finie, où K est une extension de k.
En effet, soit $F : \mathcal{V} \to A-mod$ un foncteur fibre. Choisissons $\mathcal{J}$ un idéal maximal de A, et posons $K = A/\mathcal{J}$. En composant F avec le $\otimes$-foncteur exact et fidèle $A-mod \to Vect_f(K)$, $M \mapsto M/\mathcal{J}M$, on obtient un foncteur fibre $\mathcal{V} \to Vect_f(K)$.

Exemple. Soit H une algèbre de Hopf commutative : $\mathcal{C}omod_f(H)$ est tannakienne neutre.
Si H est cocommutative, $Mod_f(H)$ est tannakienne neutre.

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne neutre : $\mathcal{V}$ est $\otimes$-équivalente à la catégorie des comodules sur une algèbre de Hopf commutative (qui dépend à priori du foncteur fibre choisi).

Si $\mathcal{V} = Mod_f(H)$, H cocommutative, alors $\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}omod_f(H^\circ)$, où H° est l'algèbre de Hopf des fonctions représentatives de H.

Le théorème de Deligne ([**5**], 7.1) donne en caractéristique 0 une condition nécessaire et suffisante pour qu'une catégorie tensorielle complète soit tannakienne :

Théorème. *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle complète sur un corps de caractéristique nulle. $\mathcal{V}$ est tannakienne si et seulement si la dimension de chaque objet est un entier positif.*

La formule de 3.9 permet d'établir que la condition du théorème est encore équivalente à : pour tout objet X, il existe un entier n tel que $\overset{n}{\wedge}(X) = 0$.

Nous retrouverons ce résultat pour des catégories semi-simples (ie les suites exactes courtes sont scindées).

3.11 $\otimes$-générateurs

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle complète, X un objet de $\mathcal{V}$. On dit que X est un $\otimes$-générateur si tout objet de $\mathcal{V}$ est sous-quotient d'une somme $X^{\otimes n} \otimes (X^{\vee})^{\otimes m}$ pour des entiers m et n.

Exemples. Soit H une k-algèbre de Hopf commutative. $\mathcal{C}omod_f(H)$ admet un $\otimes$-générateur si et seulement si H est de type fini comme algèbre sur k (le schéma en groupe affine défini par H est un groupe algébrique).
Si G est un groupe compact, $\mathcal{R}ep(G)$ admet un $\otimes$-générateur si et seulement si G est un groupe de Lie.

Une catégorie tensorielle complète admettant un $\otimes$-générateur sera dite algébrique.

Nous verrons qu'une catégorie tannakienne algébrique semi-simple sur un corps algébriquement clos k non dénombrable admet un foncteur fibre dans $Vect_f(k)$, et nous aurons un résultat d'unicité dans ce cas (partie 5) (les hypothèses semi-simple pour la catégorie, et non dénombrable pour le corps de base ne sont pas nécessaires dans la théorie générale de [**21**]).

3.12 Ind-objets.

Notre objectif dans cette section est de généraliser certains calculs d'algèbre commutative aux catégories tensorielles, en particulier la construction des algèbres symétriques. Pour cela nous aurons besoin de faire des sommes directes quelconques, ce qui n'est pas possible dans la catégorie donnée.

Nous introduirons à cet effet une surcatégorie, la catégorie des Ind-objets. Pour une catégorie de comodules de dimension finie cette catégorie n'est autre que la catégorie de tous les comodules.

La référence classique du sujet est [**1**], ainsi que [**11**].

Voici le résultat principal du paragraphe :

Théorème. *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle complète sur un corps k.*
Il existe une catégorie Ind($\mathcal{V}$), et un foncteur $c : \mathcal{V} \to Ind(\mathcal{V})$ tels que :
1) Ind($\mathcal{V}$) est abélienne.
2) Le foncteur c est exact et pleinement fidèle.
3) Le produit tensoriel sur $\mathcal{V}$ se prolonge à $Ind(\mathcal{V})$. Il est encore exact, associatif, symétrique et commute aux limites inductives filtrantes.
4) Dans $Ind(\mathcal{V})$, les limites inductives filtrantes sont représentables.

Description de Ind($\mathcal{V}$)

Rappelons qu'une petite catégorie I est dite filtrante si pour tout couple (i, j) d'objets, les deux conditions suivantes sont vérifiées :
F1) si u,$v : i \to j$ sont des morphismes de I, il existe $k \in ob(I)$ et $w : j \to k$ tels que $w \circ u = w \circ v$
F2) il existe $k \in ob(I)$ et des flèches $u : j \to k$ et $v : j \to k$.

Un objet (X) de Ind($\mathcal{V}$) est un foncteur $(X) : I \to \mathcal{V}$ où I est une petite catégorie filtrante. On notera $(X) = (X)_{i\in I}$, ou bien $X = \varinjlim_{i\in I} X_i$.
Si $(X) = (X)_{i\in I}$ et $Y = (Y)_{j\in J}$ sont des Ind-objets, on pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{V})} = \varprojlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X_i, Y_j)$$

On vérifie directement que ceci fait de Ind($\mathcal{V}$) une catégorie.

Fixons un ensemble I_0 ne possédant qu'un seul élément et associons lui la catégorie dont l'unique objet est l'élément de I_o et qui ne possède qu'une seule flèche.
On peut alors définir le foncteur du théorème $c : \mathcal{V} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.
Si $X \in ob(\mathcal{V})$, soit $c(X) : I_0 \to \mathcal{V}$ tel que $c(X)(*) = X$

Si (X) est un Ind-objet, la limite inductive du foncteur (X) est représentable dans $Ind(\mathcal{V})$ (par définition des morphismes).

Toutefois le foncteur c ne commute pas en général aux limites inductives filtrantes (en fait c commute aux limites inductives filtrantes si et seulement si celles-ci sont représentables dans $\mathcal{V}$).

Cette description est agréable pour prolonger des foncteurs, mais elle l'est moins pour montrer que Ind($\mathcal{V}$) est abélienne.

A cet effet nous proposons une autre définition.

Préfaisceaux : soit $\widehat{\mathcal{V}}$ la catégorie des foncteurs contravariants (et linéaires) de $\mathcal{V}$ dans la catégorie des k-espaces vectoriels.

On a un foncteur $h : \mathcal{V} \to \widehat{\mathcal{V}}$ qui à un objet X associe le préfaisceau $h_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(-, X)$. Le lemme de Yoneda affirme que h est pleinement fidèle.
On peut considérer alors $\mathcal{V}$ comme sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{V}}$

Rappelons ([**1**], I-3-1) que $\widehat{\mathcal{V}}$ admet des limites projectives et inductives : cela provient de l'existence de telles limites dans $Vect(k)$, et elles se calculent "argument par argument".

Soit $\mathcal{V}^0$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{V}}$ formée des foncteurs exacts à gauche (c'est à dire transformant les limites projectives finies en limite projectives finies).

Soit $(X) = (X_i)_{i\in I}$ un Ind-objet. Associons-lui le préfaisceau $L(X)$ défini ainsi $L(X)(Y) = \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(Y, X_i)$.
$L(X)$ est exact à gauche : les limites inductives filtrantes dans $Vect(k)$ commutent aux limites projectives finies.
D'autre part,
$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{V}}}(L(X), L(Y)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{V}}}(h_{X_i}, L(Y)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X_i, Y_j) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{V})}((X),(Y))$.
$L : \mathrm{Ind}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}^0$ est donc un foncteur pleinement fidèle.

Soit F un préfaisceau. Montrons que F est limite inductive de foncteurs représentables. Le cas où F est exact à gauche correspondra au cas où la limite inductive est filtrante.

Soit $\mathcal{V}/F$ la catégorie dont les objets sont les (X, u), $X \in ob(\mathcal{V})$, $u \in F(X)$. Une flèche $(X, u) \to (X', u')$ est une flèche $f : X \to X'$ telle que $F(f)(u') = u$.

On a un foncteur $T_F : \mathcal{V}/F \to \widehat{\mathcal{V}}$, $T_F(X, u) = h_X$.
Alors $F \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\mathcal{V}/F} T_F$ (une telle limite se calcule argument par argument).

Lorsque F est exact à gauche, $\mathcal{V}/F$ est filtrante. Ceci prouve que $L : Ind(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}^0$ est essentiellement surjectif et donc est une équivalence de catégories.

Cette nouvelle description de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ permet d'utiliser les résultats de [**11**] : $\mathcal{V}^0$ est abélienne (la seule difficulté est de montrer l'existence de conoyaux).

Il est presque évident que les limites inductives filtrantes sont représentables (commutation dans $Vect(k)$ des limites inductive filtrantes et des limites projectives finies).

$\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ a bien sûr plus de propriétés (par exemple admet des limites projectives quelconques) mais les propriétés précédentes sont les seules qui interviennent ici.

Prolongement de foncteurs : soit $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un foncteur. Si $(X) = (X_i)_{i\in I}$, posons $F((X)) = F(X_i)_{i\in I}$. On définit ainsi un foncteur $\mathrm{Ind}(F) : \mathrm{Ind}(\mathcal{V}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.

Dans [**1**], on voit que $\mathrm{Ind}(F)$ commute automatiquement aux limites inductives filtrantes.

On montre également que si F est exact, il en est de même de $\mathrm{Ind}(F)$.

Ces résultats s'appliquent au produit tensoriel de $\mathcal{V}$, et le théorème est alors prouvé.

3.13 Application : construction d'algèbres tensorielles et symétriques.

$\mathcal{V}$ est toujours une catégorie tensorielle complète

Un anneau de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ est un objet A de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ muni d'un produit $m : A \otimes A \to A$ associatif, et d'une unité $u : 1 \to A$ tels que $m \circ u \otimes 1_A = 1_A = m \circ 1_A \otimes u$.

On définit alors les A-modules : un objet M est un A-module s'il est muni d'une flèche $\mu : A \otimes M \to M$ telle que $\mu \circ u \otimes 1_M = 1_M$, $\mu \circ m \otimes 1_M = \mu \circ 1_A \otimes \mu$.

Extensions des scalaires : pour tout objet M, on munit $A \otimes M$ d'une structure évidente de A-module.

Quand A est commutatif ($m \circ C_{A,A} = m$), on pose $M \otimes_A N = coker(1_M \otimes \mu_N - \mu_M \otimes 1_N \circ 1_M \otimes C_{A,M})$. Il est facile de vérifier que $A - Mod$ est une catégorie tensorielle sur k.

Idéaux : un sous-objet $i : I \to A$ est un idéal (à gauche) s'il existe $\mu_I : I \otimes A \to I$ qui fasse de I un A-module et tel que $m \circ i \otimes 1_A = i \circ \mu_I$.
Quand A est commutatif, le quotient de A par I peut être muni d'une structure évidente d'anneau.

Algèbre tensorielle : pour $V \in ob(\mathcal{V})$, soit $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ ($V^0 = 1$) et soit $\alpha_k : V^{\otimes k} \to T(V)$ les morphismes évidents.
La commutation du produit tensoriel aux limites inductives filtrantes permet de définir $m : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ tel que $m \circ \alpha_k \otimes \alpha_j = \alpha_{k+j}$
$T(V)$ est alors un anneau de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ et $\mathrm{Hom}_{ann}(T(V), B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, B)$ pour tout anneau B de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.

Algèbre symétrique : reprenons les notations de 3.9. Soit $V \in ob(\mathcal{V})$. Notons d'abord l'existence d'un morphisme $\mu_{k,j}$, $\forall i, j \in \mathbb{N} : S^k(V)) \otimes S^j(V) \to S^{k+j}(V)$ tel que $\mu_{k,j} \circ \tau_k \otimes \tau_j = \tau_{k+j}$.
Posons maintenant

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{n \in N} S^n(V)$$

et soit $m : \mathrm{Sym}(V) \otimes \mathrm{Sym}(V) \to \mathrm{Sym}(V)$ tel que $m \circ \alpha_k \otimes \alpha_j = \alpha_{k+j} \circ \mu_{k,j}$, où $\alpha_k : S^k(V) \to \mathrm{Sym}(V)$ est le morphisme évident.
$\mathrm{Sym}(V)$ est un anneau commutatif de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ et $\mathrm{Hom}_{ann}(\,Sym(V), B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, B)$ pour tout anneau commutatif B.

4. Trivialisations

Notre but dans ce paragraphe est d'expliquer la construction d'un foncteur fibre sur une catégorie tensorielle. A cet effet nous examinerons un exemple topologique où le concept de trivialisation s'introduit naturellement : la théorie des revêtements. Nous appliquerons sa philosophie pour obtenir une nouvelle variante de la dualité de Tannaka. Finalement, nous introduirons la notion d'anneau de trivialisation pour un objet d'une catégorie tensorielle, les considérations précédentes nous indiquant la marche à suivre pour les construire.

4.1 Fondation topologique.

Soit B un espace topologique connexe et localement simplement connexe (ici un espace simplement connexe est un espace dont tout revêtement est trivial). Notons Rev_B la catégorie des revêtements de B.

Soit $b_0 \in B$, on lui associe un foncteur

$$\begin{aligned} F_{b_0} : \quad Rev_B &\longrightarrow Ens \\ X &\longmapsto X(b_0) \end{aligned}$$

qui associe à un revêtement de B sa fibre en b_0 (un foncteur fibre !).

Le groupe fondamental de B en b_0 est défini comme le groupe des automorphismes de F_{b_0}, on le note $\pi_1(B, b_0)$ (si B est localement contractile cette définition coïncide avec la définition usuelle).

Le problème de définir un foncteur fibre sur une catégorie tensorielle ressemble à celui-ci : définir un foncteur fibre sur Rev_B sans choisir un point de B.

Si E est un revêtement de B, définissons un foncteur $Rev_B \longrightarrow Ens$ $X \longmapsto \mathrm{Hom}_{Rev_B}(E, X)$.
Si $b_0 \in B$, $t_0 \in E(b_0)$, on a un morphisme de foncteur

$$\Phi_{(E,t_0)} : \mathrm{Hom}_{Rev(B)}(E, -) \longrightarrow F_{b_0}$$

défini ainsi :
Si X est un revêtement de B et $f \in \mathrm{Hom}_{Rev_B}(E, X)$, posons $\Phi_{(E,t_0)}(f) = f(t_0)$.

Un revêtement universel de (B, b_0) est un couple (E, t_0) où E est un revêtement de B et $t_0 \in E(b_0)$, tel que $\Phi_{(E,t_0)}$ soit un isomorphisme.

Un revêtement universel de (B, b_0) est donc un représentant du foncteur fibre F_{b_0}.

Le fait crucial est que l'on peut caractériser un revêtement universel par une propriété interne à la catégorie Rev_B :

Proposition. *Pour qu'un revêtement pointé (E, t_0) de (B, b_0) soit universel, il faut et il suffit qu'il soit connexe et trivialise tout revêtement de B. En particulier, pour tout point b de B et tout point $t \in E(b)$, (E, t) est un revêtement universel de (B, b).*

Preuve. Voir [**9**], 4.3.2 (nous paraphrasons plusieurs passages de ce livre dans ce paragraphe).

Rappel. Soit $X \longrightarrow B$ un revêtement de B, Z un espace localement connexe, $f : Z \longrightarrow B$ une application continue. Le produit fibré $Z \times_B X$ est un espace au dessus de Z, qui est un revêtement. On dit que f trivialise X si $Z \times_B X$ est un revêtement trivial de Z :

$$\begin{tikzcd} Z \times I \arrow[r, "\sim"] & Z \times_B X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & Z \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

(I espace discret).

Dans une catégorie tensorielle, on cherchera un objet qui "trivialise" tous les autres.

La prochaine étape est la construction d'un revêtement universel.
Nous utiliserons le raisonnement de Chevalley, et non la preuve homotopique classique. Voici les idées de la preuve :

Etape 1. Les produits quelconques existent dans Rev_B.
Si $(X_\lambda)_{\lambda \in A}$ est une famille de revêtements de B, on peut munir X, le produit fibré des X_λ, d'une topologie plus fine que la topologie produit, qui en fasse un espace localement connexe, un revêtement de B et un produit dans la catégorie Rev_B. (cf.[**9**], 4.3.6, on utilise fortement le fait que B est localement simplement connexe).

Cette première étape nous permet pour un revêtement X de B, de construire un revêtement $\widetilde{X}$ de B qui trivialise X.

Rappelons qu'un revêtement X de B est trivial si et seulement si $\exists b_0 \in B$ tel que $\forall x \in X(b_0)$, $\exists\ s : B \longrightarrow X$ tel que $\pi \circ s = 1_B$ et $s(b_0) = x$ (B est *connexe*). Si maintenant Z est un revêtement connexe de B, Z trivialise X si et seulement si il existe $z_0 \in Z$, tel que $\forall x \in X(b_0)$ (b_0 est le projeté de z_0 sur B), il existe $f \in \mathrm{Hom}_{RevB}(Z, X)$ tel que $f(z_0) = x$.

Commençons par voir comment trivialiser X de façon ensembliste. Soit $Z = \bigcup_{b \in B} Bij(X(b_0), X(b))$, où b_0 est un point fixé de B et $Bij(X(b_0), X(b))$ est l'ensemble des bijections de $X(b_0)$ dans $X(b)$. Soit $p : Z \longrightarrow B$ l'application qui à $\varphi \in Bij(X(b_0), X(b))$, associe le point b.

Supposons que l'on a pu mettre une topologie sur Z qui en fasse un revêtement de B, et fixons $\varphi_0 \in B_{ij}(X(b_0), X(b_0))$. Si $x \in X(b_0)$, soit $y \in X(b_0)$ tel que $\varphi_0(y) = x$.
On définit alors $f : Z \longrightarrow X$ qui à $\varphi \in Bij(X(b_0), X(b))$, associe $\varphi(y)$.
Soit $\widetilde{Z}$ la composante connexe de φ_0. Alors, $\widetilde{Z}$ trivialise X de façon évidente.

Formalisons cette construction. Fixons $b_0 \in B$ et considérons le produit fibré des revêtements $(X, x)_{x \in X(b)} =: X'$. Soit $z_0 = (x)_{x \in X(b)} \in X'$. Prenons $\widetilde{X}$ la composante connexe du point z_0.

Alors $\forall\ y \in X(b)$, il existe $f : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un morphisme de revêtements tel que $f(z) = y$ (prendre la projection adaptée). Ceci signifie précisément que $\widetilde{X}$ trivialise X.

Etape 2. On prouve que la catégorie Rev_B est équivalente à une petite catégorie.

On forme le produit fibré de tous les revêtements pointés connexes de $(B, b_0)(b_0 \in B)$. La composante connexe d'un point de la fibre en b_0 fournit le revêtement universel ([**9**], 4.3.8).

Remarque. L'idée générale de ce raisonnement s'applique aussi à la construction de la clôture algébrique d'un corps commutatif k.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ la famille des extensions de k de la forme $k[X_1, \ldots, X_n]/J$, où J est un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$, et soit $A = \bigotimes_{i\in I} A_i$. Le quotient de A par un idéal maximal fournit une cloture algébrique de k (Encore [**9**], Ex. 5.2.4).

Si E est un revêtement universel de B, soit $G = \mathrm{Aut}_B(E)$ (le groupe de Galois de E). Alors on a un anti-isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} \pi_1(B, b)$, $\forall\, b \in B$ ([**9**], 4.5.3). Nous avons donc produit le groupe fondamental de B sans référence à un point de base. Notons enfin que le foncteur $Rev_B \longrightarrow Ens$, $X \longmapsto \mathrm{Hom}_{Rev_B}(E, B)$ se factorise en une équivalence de catégorie $Rev_B \longrightarrow G - Ens$.

4.2 Version galoisienne de la dualité de Tannaka.

Dans cette partie, nous donnons une propriété qui caractérise un groupe compact G parmi les G-espaces homogènes : ce sera l'unique G-espace homogène (avec action par translation à gauche) qui trivialise toutes les représentations de G (un revêtement universel de B est un objet de Rev_B de B qui trivialise tous les revêtements de G).

Nous commencerons par construire pour chaque représentation, un G-espace qui trivialise cette représentation, et pour obtenir G, on fera le produit de ces G-espaces dont on prendra un sous-espace homogène (pour le revêtement universel, on fait un large produit de revêtements et on prend une composante connexe).

Définition. Soit V une représentation d'un groupe compact G, X un G-espace homogène (à gauche). On dit que X trivialise V s'il existe un G-isomorphisme $\Phi : X \times V_0 \xrightarrow{\sim} X \times V$ (V_0 est la représentation triviale associée à V) tel que $pr_X \circ \Phi = pr_X$.

On peut symboliser cette situation par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \times V_0 \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & X \times V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

Remarques. 1) Si X trivialise V, tout sous-espace homogène de X trivialise V.
2) Si X trivialise V, Y trivialise W, $X \times Y$ trivialise $V \times W$.

Exemple. Notons T_G le groupe G muni de structure de G-espace par translations à gauche. T_G trivialise toutes les représentations : si V est une représentation, soit

$$\begin{aligned}\Phi_v : & T_G \times V_0 \longrightarrow T_G \times V \\ & (x, v) \longmapsto (x, xv)\end{aligned}$$

C'est une application équivariante et un isomorphisme. T_G est l'unique G-espace homogène à posséder cette propriété :

Proposition. *Soit X un G-espace homogène qui trivialise toutes les représenta tions de G. Alors $X \xrightarrow{\sim} T_G$.*

Preuve. Ecrivons $X = G/H$, et supposons $H \neq \{e\}$. Soit $h_0 \in H$, $h_0 \neq \{e\}$. Par le théorème de Peter-Weyl, il existe une représentation V de G et un élément $v \in V$ tel que $h_0.v \neq v$.
Soit $\Phi_V : X \times V_0 \longrightarrow X \times V$ une trivialisation. Soit $w \in V$ tel que $\Phi_V(H, w) = (H, v)$.
Pour tout $h \in H$, on a $\Phi_V(h.H, h.w) = \Phi_V(H, w) = (H, v)$ ($h.w$ est calculé dans V_0, donc $h.w = w$).
D'autre part, Φ_V étant équivariante, $\Phi_V(h.H, h.w) = h.\Phi_V(H, w) = h(H, v) = (H, h.v)$, $\forall\, h \in H$. Si $h = h_0$, on a une contradiction.

$\square$

On peut donc reconnaître G par $G = \mathrm{Aut}_G(T_G)$.

Construisons maintenant T_G par trivialisations successives des représentations. Soit V une représentation de G et $n = \dim V$. Posons $T_V = \mathrm{Is}(\mathbb{C}^n, V)$, l'ensemble des isomorphismes de $\mathbb{C}^n$ dans V. Alors T_V est un G-espace : si $x \in G$, $f \in T_V$ et $a \in \mathbb{C}^n$, on a $(x.f)(a) = x.(f(a))$.

Soit $\Phi_V : T_V \times \mathbb{C}^n \longrightarrow T_V \times V$ donné par $\Phi_V(f, a) = (f, f(a))$. On vérifie facilement :

Proposition. *Φ_V est un isomorphisme, donc T_V trivialise V.*

Soit $K = \prod\limits_{V \in \mathrm{Rev}(G)} T_V$, K trivialise toutes les représentations de G, et en prenant un sous-espace homogène, on retrouve T_G.

T_V est une variété algébrique affine, et en passant aux fonctions polynomiales, on obtient un isomorphisme équivariant $\mathrm{Pol}(T_V) \otimes \mathrm{Pol}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}(T_V) \otimes \mathrm{Pol}(V)$. $\mathrm{Pol}(\mathbb{C}^n)$ et $\mathrm{Pol}(V)$ sont les algèbres symétriques usuelles et $\mathrm{Pol}(T_V)$ a la forme bien connue : $\mathbb{C}[X_{11}, \ldots, X_{nn}, Z]/(DZ - 1)$ où $D = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) X_{1,\sigma(1)} \ldots X_{n,\sigma(n)}$.
En fait cet isomorphisme induit un isomorphisme en degré 1 :

$$\mathrm{Pol}(T_V) \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}(T_V) \otimes V$$

Nous le décrivons dans la prochaine section.

Remarque. L'utilisation des $\mathrm{Is}(\mathbb{C}^n, V)$ n'aura pas surpris ceux qui ont lu le paragraphe 11 du livre de N. Katz ([**18**]), où on reconstruit un groupe algébrique réductif sans utiliser un foncteur fibre sur sa catégorie de représentations (il est important dans ce cas de savoir que la catégorie en question est bien une catégorie de représentations pour utiliser la théorie des invariants des groupes algébriques réductifs, et cela ne résout donc pas le problême de dualité).

Notre inspiration pour les paragraphes 4.1 et 4.2 provient d'idées d'O. Leroy, qui décrit un phénomène de trivialisation par des Is dans [**20**].

4.3 Interprétation dans les catégories tensorielles.

Introduisons maintenant la notion de trivialisation dans une catégorie tensorielle complète $\mathcal{V}$ dans lequelle la dimension des objets est un entier : on dira qu'un objet V de $\mathcal{V}$ est trivialisé par un anneau A de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ si l'on a un isomorphisme A-linéaire $A \otimes V \xrightarrow{\sim} A \otimes 1^{\dim V}$.

Les considérations du paragraphe précédent nous indiquent la marche à suivre pour construire un anneau de trivialisation pour chaque objet. Nous pourrons alors, en formant un produit tensoriel infini, construire un anneau qui trivialise tous les objets de $\mathcal{V}$.

Expliquons tout d'abord pourquoi une telle construction nous permettra de définir un foncteur fibre sur $\mathcal{V}$, de même que la construction du revêtement universel (revêtement qui trivialise tous les autres) d'un espace topologique B localement simplement connexe et connexe permet d'obtenir un foncteur fibre sur la catégorie Rev_B.

Remarquons que si G est un groupe de Lie compact, il est algébrique, et $\mathrm{Pol}(G)$ s'identifie à $R(G)$.

Nous avons donc, pour toute représentation de G, des G-isomorphismes $R(G) \otimes V \xrightarrow{\sim} R(G) \otimes \mathbb{C}^{dimV}$.

En fait ce résultat se généralise à la catégorie des comodules sur une algèbre de Hopf commutative quelconque.

Proposition. *Soit H une algèbre de Hopf d'antipode inversible (c'est le cas si H est commutative). Alors, pour tout comodule V de dimension finie, il existe un isomorphe de comodules H-linéaire : $H \otimes V \xrightarrow{\sim} H \otimes V_0$. ($V_0$ est le comodule trivial dont l'espace sous-jacent est V, les structures de H-modules sont données par extension des scalaires).*

Preuve. Soit $\alpha_V : V \longrightarrow V \otimes H$ la coaction, $v_1, \ldots, v_n$ une base de V et $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ des éléments de H tels que $\alpha_V(v_i) = \sum_{j=1}^n v_i \otimes a_{ji}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $f = m_H \otimes 1_V \circ 1_H \otimes C_{H,H} \circ 1_H \otimes \alpha_V$.

Si $a \in H$, on a $f(a \otimes v_i) = \sum_j aa_{ji} \otimes v_j$, f est alors H-linéaire, et un calcul direct montre que f est un morphisme de comodules : $H \otimes V \longrightarrow H \otimes V_0$.
Soit $g : H \otimes V_0 \longrightarrow H \otimes V$, définie par $g(a \otimes v_i) = \sum_j aS^{-1}(a_{ji}) \otimes v_j$: g est inverse de f.

□

Supposons maintenant H commutative. Soit Γ le foncteur $\mathcal{C}omod_f(H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(H,H) - \mathrm{mod}$, $V \longmapsto \mathrm{Hom}_H(H, H \otimes V)$. (Cet ensemble désigne les morphismes à la fois H-linéaires et morphismes de comodules) à valeurs dans les $\mathrm{Hom}_H(H,H) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}omod}(k,H)$ modules (c'est une k-algèbre commutative). D'après la proposition précédente, il est à valeurs dans les $\mathrm{Hom}_H(H,H)$-modules libres, et comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}omod}(k,A) = k$, il est à valeurs dans $Vect_f(k)$ et c'est un foncteur fibre.

Plus généralement, si A est un anneau commutatif de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ qui trivialise tout objet de $\mathcal{V}$, le foncteur $\Gamma : X \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, A \otimes X)$ est un foncteur fibre à valeur dans les $\mathrm{Hom}_A(A,A) = \mathrm{Hom}(1,A)$ modules libres.

Nous connaissons désormais la marche à suivre pour construire un foncteur fibre sur une catégorie tensorielle.

Concluons ce chapitre par la description des isomorphismes $\mathrm{Pol}(T_V) \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}(T_V) \otimes \mathbb{C}^n$.

Soit V une représentation de G, de base $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Soit V^n la somme directe de n copies de V, et posons $\psi_{ij} = u_i(\psi_j)$, où les u_i désignent les morphismes canoniques $V \longrightarrow V^n$.

Considérons l'algèbre $\mathbb{C}[\psi_{11}, \ldots, \psi_{nn}]$, munie de l'opération de G induite par celle sur V.
Rajoutons une variable Z, sur laquelle on fait opérer G par $g.Z = \det(g^{-1})Z$ (ceci correspond à la représentation $\Lambda^n(V^\vee)$). Si $D = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\psi_{1,\sigma(1)} \ldots \psi_{n,\sigma(n)}$, on a $g.(DZ) = DZ$, donc l'idéal engendré par $DZ - 1$ est stable sous l'action de G, et G opère sur l'anneau $A_V := \mathbb{C}[\psi_{11}, \ldots, \psi_{nn}, Z]/(DZ-1)$.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{C}$.

Définissons une application A_V-linéaire et équivariante, $A_V \otimes V \longrightarrow A_V \otimes \mathbb{C}^n$, $1_{A_V} \otimes \psi_{i_0} \longmapsto \sum_{i=1}^n \psi_{ii_0} \otimes e_i$.

Dans l'autre sens, soit $1_{A_V} \otimes e_i \longmapsto \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \otimes \psi_j$ où les β_{ij} sont les cofacteurs associés à la matrice (ψ_{ij}) ie

$\beta_{ij} = (-1)^{i-1} \sum_{\sigma \in Sn(j)} \varepsilon(\sigma)\psi_{1,\sigma(2)} \ldots \psi_{i-1,\sigma(i)}\psi_{i+1,\sigma(i+1)} \ldots \psi_{n,\sigma(n)}$

($S_n(j)$ désigne l'ensemble des $\sigma \in S_n$ telsque $\sigma(1) = j$).

Ces deux applications sont réciproques.

Dans une catégorie tensorielle quelconque, A_V sera un quotient approprié de $\mathrm{Sym}(V^n) \otimes \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee))$.
Si $S = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(v)\psi_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\sigma(n)} \in V^{\otimes n}$, on a $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n(S) = D$ dans $\mathrm{Sym}(V^n)$.

Or l'espace vectoriel engendré par S n'est autre que l'image de l'application canonique $\Lambda^n(V) \longrightarrow V^{\otimes n}$.
Nous connaissons donc le quotient nécessaire.

La construction des cofacteurs dans une catégorie tensorielle découlera essentiellement de l'isomorphisme $V^\vee \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-1}(V) \otimes \Lambda^n(V^\vee)$.

5. Le théorème de représentation

5.1. Notations. On fixe dans tout le chapitre une catégorie tensorielle complète $\mathcal{V}$ sur un corps k de caractéristique 0, telle que la dimension de chaque objet est un entier positif.

Soit A un anneau de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$. Alors $\mathrm{Hom}(1, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A, A)$: si $f \in \mathrm{Hom}(1, A)$, on lui associe le morphisme A-linéaire $m_A \circ 1_A \otimes f$. L'application réciproque associe à $g \in \mathrm{Hom}_A(A, A)$ le morphisme $g \circ u_A$.

Si $f \in \mathrm{Hom}(1, A)$, alors $Im(m_A \circ 1_A \otimes f)$ est un sous A-module de A, c'est-à-dire un idéal de A, que nous noterons $\langle f \rangle$. Alors $A/\langle f \rangle$ vérifie la propriété universelle usuelle.

Produit tensoriel d'anneaux : soit A et B deux anneaux de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$, on définit un produit sur $A \otimes B$ ainsi : $m_{A\otimes B} = m_A \otimes m_B \circ 1_A \otimes C_{B,A} \otimes 1_B$. L'unité est donnée par $u_{A\otimes B} = u_A \otimes u_B$.

Si A, B, C sont des anneaux commutatifs, on a :
$\mathrm{Hom}_{Ann}(A \otimes B, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Ann}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{Ann}(B, C)$.

Fixons maintenant un objet V de $\mathcal{V}$, tel que $n = \dim V > 0$ et posons

$$B_V := \mathrm{Sym}(V^n) \otimes \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee))$$

Soit $(\mu_i)_{1\leq i\leq n} : 1^n \to 1$, et $(\nu_i)_{1\leq i\leq n} : 1 \to 1^n$ les morphismes tels que $\sum_{i=1}^n \nu_i \circ \mu_i = 1_{1^n}$, et $\mu_i \circ \nu_j = \delta_{ij} 1_1$.

Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} : V \longrightarrow V^n$, et $(r_i)_{1\leq i\leq n} : V^n \longrightarrow V$ les morphismes tels que $\sum_{i=1}^n u_i \circ r_i = 1_{V^n}$, et $r_i \circ u_j = \delta_{ij} 1_V$.

On notera A_k la projection totalement antisymétrique de $V^{\otimes k}$ (resp. $A_k^\vee$ celle de $V^{\vee \otimes k}$).

Soit $w_k : \Lambda^k(V) \longrightarrow V^{\otimes k}$, et $\pi_k : V^{\otimes k} \longrightarrow \Lambda^k(V)$
(resp. $w_k^\vee : \Lambda^k(V^\vee) \longrightarrow V^{\vee\otimes k}$, et $\pi_k^\vee : V^{\vee \otimes k} \longrightarrow \Lambda^k(V^\vee)$)
les morphismes tels que :
$\pi_k \circ w_k = 1_{\Lambda^k(V)}$, et $w_k \circ \pi_k = A_k$
(resp. $\pi_k^\vee \circ w_k^\vee = 1_{\Lambda^k(V^\vee)}$, et $w_k^\vee \circ \pi_k^\vee = A_k^\vee$).

Notons $i_k : (V^n)^{\otimes k} \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^n)$ le composé des morphismes

$$(V^n)^{\otimes k} \xrightarrow{\tau_k} S^k(V^n) \overset{\alpha_k}{\hookrightarrow} \mathrm{Sym}(V^n)$$

On définit de même $j_k : \Lambda^n(V^\vee)^{\otimes k} \longrightarrow \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee))$.

Enfin, soit $\delta_n : 1 \longrightarrow V^{\otimes n} \otimes V^{\vee \otimes n}$, défini par : $\delta_n = 1_{V^{\otimes n-1}} \otimes \delta \otimes 1_{V^{\vee \otimes n-1}} \circ \ldots \circ 1_V \otimes \delta \otimes 1_{V^\vee} \circ \delta$. On a $\delta_n = \delta_{V^{\otimes n}}$.

5.2. Construction d'un anneau de trivialisation.

Définissons $D : 1 \longrightarrow B_V$ ainsi :

$$D = i_n \otimes j_1 \circ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n$$

et soit $f = D - u_{B_V}$ $(u_{B_V} = i_0 \otimes j_0)$.

Soit $A_V := B_V/\langle f \rangle = B_V/\langle D-1 \rangle$.

Alors A_V est le $\mathrm{Pol}(T_V)$ du paragraphe précédent.

Nous devons commencer par prouver que A_V est non nul. Ceci est équivalent à $\mathrm{Hom}(1, A_V) \neq 0$.

Donnons une autre description de A_V.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $kn + p \geq 0$

D et les morphismes μ (fin de la partie 3.13) induisent un morphisme $d_{p,k}$:

$$S^{kn+p}(V^n) \otimes S^k(\Lambda^n(V^\vee)) \longrightarrow S^{(k+1)n+p}(V^n) \otimes S^{k+1}(\Lambda^n(V^\vee))$$

une vérification directe donne :

Lemme. $A_V \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \varinjlim_k S^{kn+p}(V^n) \otimes S^k(\Lambda^n(V^\vee))$ (les morphismes de transitions dans la limite inductive étant donnés par les $d_{p,k}$).

On a

$$\mathrm{Hom}(1, A_V) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \varinjlim_k \mathrm{Hom}(1, S^{kn+p}(V^n) \otimes S^k(\Lambda^n(V^\vee))$$

et il suffit alors de prouver que $\varinjlim_k \mathrm{Hom}(1, S^{kn}(V^n) \otimes S^k(\Lambda^n(V^\vee))$ est non nul.

Pour ceci il suffit de prouver que l'élément 1_1 de $\mathrm{Hom}(1,1)$ a une image non nulle dans le système inductif, ie $d_{0,k} \circ d_{0,k-1} \circ \ldots \circ d_{0,0} \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$d_{0,0} = \tau_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n$$

(notation de 3.9).

Si $d_{0,0} = 0$, alors $B_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ u_1 \otimes \ldots u_n \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n = 0$.

Or $r_1 \otimes \ldots \otimes r_n \circ B_n \circ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$
$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} r_1 \otimes \ldots \otimes r_n \circ F_{V^n}(\sigma) \circ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$
$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} r_1 \otimes \ldots \otimes r_n \circ u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)} \circ F_V(\sigma) = \frac{1}{n!} 1_{V^{\otimes n}}$.

Donc si $d_{0,0} = 0$, $1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n = 0$, donc $Tr(A_n) = 0 = \dim \Lambda^n(V)$, or la formule 3.9 implique que $Tr(A_n) = 1$, donc $d_{0,0} \neq 0$ (ceci prouve en même temps que $D \neq 0$).

Pour conclure, faisons quelques observations générales : si $W \in Ob(\mathcal{V})$, $\mathrm{Hom}(1, \mathrm{Sym}(W)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(1, S^k(W))$ est une algèbre graduée, et on peut montrer facilement que c'est une algèbre intègre.

D'autre part $B_V = \mathrm{Sym}(V^n) \otimes \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}(V^n \oplus \Lambda^n(V^\vee))$ donc $\mathrm{Hom}(1, B_V)$ est intègre.

Finalement, on vérifie que $d_{0,k} \circ \ldots \circ d_{0,0} = d_{0,0}^k$ dans $\mathrm{Hom}(1, B_V)$ donc $d_{0,k} \circ \ldots \circ d_{0,0} \neq 0$, donc $\mathrm{Hom}(1, A_V) \neq 0$.

5.3. Proposition. $A_V \otimes V \xrightarrow{\sim} A_V \otimes 1^n$, l'isomorphisme étant A_V-linéaire.

5.4. Construction des morphismes.

Dans les parties 5.4 et 5.5, on notera $A_V = A$.

Pour i, $1 \leq i \leq n$, soit $\theta_i : 1^n \longrightarrow A \otimes V$ défini ainsi :

$$\theta_i = (p \otimes 1_V) \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V) \circ ((-1)^{i-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_i \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V) \circ C_{V, V^{\otimes n-1} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}} \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n \circ \mu_i$$

(où $p : B = B_V \longrightarrow A = A_V$ est le morphisme canonique).

Soit

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} (m_A \otimes 1_V) \circ (1_A \otimes \theta_i) : A \otimes 1^n \longrightarrow A \otimes V.$$

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\lambda_i : V \longrightarrow A \otimes 1^n$ défini par :

$\lambda_i = ((p \circ i_1) \otimes (j_0 \circ u_i)) \otimes \nu_i$.

Soit

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (m_A \otimes 1_{1^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) : A \otimes V \longrightarrow A \otimes 1^n$$

Φ et Ψ sont évidemment A-linéaires, et nous allons montrer que Φ et Ψ sont réciproques.

5.5.a. Le lecteur aura peut-être déjà relié les différentes notations introduites depuis le début du paragraphe 5 avec les débuts de calculs explicites faits à la fin de la partie 4. Pour son confort, écrivons la preuve de 5.3 dans un cas concret.

Soit G un groupe, et V une représentation de G de dimension $n > 0$, de base $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

soit V^n la somme directe de n copies de V, et soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ et$(r_i)_{1\leq i\leq n}$ les morphismes de somme directe.

Posons $\psi_{i,j} = u_i(\psi_j)$. L'algèbre $\mathrm{Sym}(V^n)$ s'identifie avec $k[\psi_{i,j}]$.

L'espace vectoriel de dimension un $\Lambda^n(V^\vee)$ a pour base l'élément

$$S^* = \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau)\psi^*_{\tau(1)} \otimes \dots \psi^*_{\tau(n)}$$

G opère sur $\Lambda^n(V^\vee)$ par $g.S^* = \det(g^{-1})S^*$.

L'algèbre $B_V = \mathrm{Sym}(V^n) \otimes \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee))$ s'identifie donc à $k[\psi_{i,j}, Z]$ avec action de G sur la variable Z donnée par $g.Z = \det(g^{-1})Z$.

Définissons maintenant l'élément invariant D de B_V (5.2). Soit

$$D' = \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau)\psi_{1,\tau(1)} \cdots \psi_{n,\tau(n)}$$

On a $g.D' = \det(g)D^{'}$ et donc $g.D'Z = D'Z$. Soit $D = D'Z$.

Posons alors $A_V = B_V/(D-1)$.

Vérifions que le D défini en 5.2 (notons le D_0 provisoirement) coïncide effectivement (à un coefficient ± 1 près dont nous n'aurons pas à tenir compte) avec celui-ci.

Notons tout d'abord que $\pi_n^\vee(\psi^*_{k_1} \otimes \dots \otimes \psi^*_{k_n}) = 0$ si $\exists i \neq j$ tels que $k_i = k_j$ et que $\pi_n^\vee(\psi^*_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes \psi^*_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau)S^*$ pour $\tau \in S_n$.

On a $\delta_n(1) = \sum_{k_1,\dots,k_n} \psi_{k_1}\otimes\dots\otimes\psi_{k_n}\otimes\psi^*_{k_n}\otimes\dots\otimes\psi^*_{k_1}$, donc $1_{V^{\otimes n}}\otimes\pi_n^\vee\circ\delta_n(1) = (-1)^{E(n/2)}\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\psi_{\tau(1)}\otimes\dots\otimes\psi_{\tau(n)}\otimes S^*$
($E(n/2)$ est la partie entière de $n/2$).
Ainsi $D_0 = (-1)^{E(n/2)}D$.

Nous ne tenons pas compte du coefficient $(-1)^{E(n/2)}$ en ne le mentionnant pas dans l'écriture du morphisme Ψ de 5.4.

Ecrivons maintenant les morphismes Ψ et Φ de 5.4.

Calculons d'abord $\theta_i(e_j)$. Posons :

$$\beta_{ik} = (-1)^{i-1} \sum_{\tau\in S_n(k)} \varepsilon(\tau)\psi_{1,\tau(2)} \cdots \psi_{i-1,\tau(i)}\psi_{i+1,\tau(i+1)} \cdots \psi_{n,\tau(n)}$$

où $S_n(k)$ est formé des permutations τ telles que $\tau(1) = k$.

Un calcul direct montre que $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}(-1)^{E(n/2)}\sum_k \beta_{ik}Z \otimes \psi_k$, et donc $\Psi(1_{A_V} \otimes e_i) = (-1)^{E(n/2)}\sum_k \beta_{ik}Z \otimes \psi_k$.

D'autre part $\lambda_k(\psi_i) = \psi_{ki} \otimes e_k$, donc $\Phi(1_{A_V} \otimes \psi_i) = \sum_k \psi_{ki} \otimes e_k$.

Les relations $\sum_k \psi_{ki}\beta_{kj} = \delta_{ij}D'$ et $\sum_k \psi_{ik}\beta_{jk} = \delta_{ij}D'$ (formules classiques qui permettent de montrer qu'un matrice est inversible si et seulement si son déterminant est inversible) permettent de voir que Ψ et Φ sont réciproques.

L'objet du lemme à venir dans la preuve de 5.3 est d'établir ces formules.

5.5.b. Preuve de 5.3.

Montrons tout d'abord que $\Phi \circ \Psi = 1_A \otimes 1_{1^n}$.

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi &= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{1^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ (m_A \otimes 1_V) \circ (1_A \otimes \theta_j) \\
&= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{1^n}) \circ (m_A \otimes 1_A \otimes 1_{1^n}) \circ (1_A \otimes 1_A \otimes \lambda_i) \circ (1_A \otimes \theta_j) \\
&= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{1^n}) \circ (1_A \otimes m_A \otimes 1_{1^n}) \circ 1_A \otimes (1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j) \\
&= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{1^n}) \circ (1_A \otimes (m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j)) \quad (*)
\end{aligned}$$

Développons $1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j : 1^n \longrightarrow A \otimes V \longrightarrow A \otimes A \otimes 1^n$

$$\begin{aligned}
&1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j = \\
&= 1_A \otimes (p \circ i_1 \otimes j_0 \circ u_i) \otimes \nu_i \circ p \otimes 1_V \circ i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V \circ \\
&\qquad (-1)^{j-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V \circ C_{V, V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \circ \\
&\qquad 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n \circ \mu_j
\end{aligned}$$

(Faisons passer ν_i à la fin de l'expression)

$$\begin{aligned}
&= 1_A \otimes (p \circ i_1 \otimes j_0 \circ u_i) \otimes 1_{1^n} \circ p \otimes 1_V \otimes 1_{1^n} \circ i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V \otimes 1_{1^n} \circ \\
&\qquad (-1)^{j-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V \otimes 1_{1^n} \\
&\qquad \circ C_{V, V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{1^n} \circ \delta_n \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \otimes p \otimes 1_{1^n} \circ 1_B \otimes i_1 \otimes j_0 \otimes 1_{1^n} \circ 1_B \otimes u_i \otimes 1_{1^n} \circ i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V \otimes 1_{1^n} \\
&\quad \circ (-1)^{j-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V \otimes 1_{1^n} \\
&\quad \circ C_{V, V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{1^n} \circ \delta_n \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \otimes p \otimes 1_{1^n} \circ i_{n-1} \otimes j_1 \otimes i_1 \otimes j_0 \otimes 1_{1^n} \circ (-1)^{j-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \\
&\quad \otimes \ldots u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes u_i \otimes 1_{1^n} \\
&\quad \circ C_{V, V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{1^n} \circ \delta_n \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_j.
\end{aligned}$$

Par définition du produit sur un anneau quotient, on a $m_A \circ p \otimes p = p \circ m_B$, donc

$$\begin{aligned}
&m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j = \\
&= p \otimes 1_{1^n} \circ m_B \otimes 1_{1^n} \circ i_{n-1} \otimes j_1 \otimes i_1 \otimes j_0 \otimes 1_{1^n} \circ \\
&\qquad (-1)^{j-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes u_i \otimes 1_{1^n} \circ C_{V, V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n} \circ \\
&\qquad 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{1^n} \circ \delta_n \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_j
\end{aligned}$$

D'autre part, $m_B \circ i_{n-1} \otimes j_1 \otimes i_1 \otimes j_0 = i_n \otimes j_1 \circ 1_{(V^n)^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V^n}$ (cf. fin du paragraphe 3.13).

Donc

$$m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j =$$
$$p \otimes 1_{1^n} \circ i_n \otimes j_1 \otimes 1_{1^n} \circ (-1)^{j-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes u_i \otimes 1^n_{\Lambda(V^\vee)} \otimes 1_{1^n}$$
$$\circ 1_{V^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V} \otimes 1_{1^n} \circ C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n}$$
$$\circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{1^n} \circ \delta_n \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_j$$

Comme $i_n = i_n \circ C_{(V^n)^{\otimes n-1},V^n}$, on a

$$m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j =$$
$$p \otimes 1_{1^n} \circ i_n \otimes j_1 \otimes 1_{1^n} \circ (-1)^{j-1} u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n}$$
$$\circ C_{V^{\otimes n-1},V} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n} \circ 1_{V^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V} \otimes 1_{1^n}$$
$$\circ C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{1^n} \circ \delta_n \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_j.$$

Or $C_{V^{\otimes n-1},V} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ 1_{V^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V} \circ C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} = 1_{V^{\otimes n}} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}$ donc

$$m \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j =$$
$$p \otimes 1_{1^n} \circ i_n \otimes j_1 \otimes 1_{1^n} \circ (-1)^{j-1} u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{1^n}$$
$$\circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{1^n} \circ \delta_n \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_j. \quad (**)$$

Nous avons maintenant besoin du résultat suivant :

Lemme . On a les formules de Cramer suivantes :
1) pour tout i, avec $1 \leq i \leq n$:

$$i_n \otimes j_1 \circ (-1)^{i-1} u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_i \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n$$
$$= i_n \otimes j_1 \circ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n,$$
$$= D$$

2) si $i \neq j$:

$$i_n \otimes j_1 \circ (-1)^{j-1} \circ u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n = 0.$$

Preuve du lemme.
1) Soit $\sigma_i \in S_n$ la permutation suivante :

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & \ldots & n \\ i-1 & 1 & & i-2 & & n \end{pmatrix}$$

$\sigma_i = s_{i-1} \ldots s_1$ où $s_k = (k, k+1)$. Alors

$i_n = i_n \circ F_{V^n}(\sigma_i)$ et $F_{V^n}(\sigma_i) \circ u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_i \ldots \otimes u_n = u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \circ F_V(\sigma_i)$ donc

$$i_n \otimes j_1 \circ (-1)^{i-1} u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_i \otimes \ldots u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n$$
$$= i_n \otimes j_1 \circ (-1)^{i-1} u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ F_V(\sigma_i) \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n.$$

D'autre part

$$\pi_n^\vee = \pi_n^\vee \circ A_n^\vee \Longrightarrow 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n = 1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ 1_{V^{\otimes n}} \otimes A_n^\vee \circ \delta_n$$
$$= A_n \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n$$

car ${}^t A_n = A_n^\vee$.

Enfin pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a $F_V(\sigma) \circ A_n = \varepsilon(\sigma) A_n$, et comme $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i-1}$, on a prouvé 1).

2)

$$i_n \otimes j_1 \circ u_i \otimes u_1 \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ A_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) i_n \otimes j_1 \circ u_i \otimes u_1 \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \circ F_V(\sigma) \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}$$
$$= \Big(\frac{1}{n} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) i_n \circ u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \circ F_V(\sigma)\Big) \otimes j_1.$$

Fixons $\sigma \in S_n$ et si $i < j$, soit $\alpha_i = (1, i+1)$. A lors $i_n \circ F_{V^n}(\alpha_i) = i_n$ et $F_{V^n}(\alpha_i) \circ u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n = u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \circ F_{V^n}(\alpha_i)$, donc

$$\varepsilon(\sigma) i_n \circ u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \circ F_V(\sigma) = \varepsilon(\sigma) i_n \circ u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \circ F_V(\alpha_i \circ \sigma).$$

A chaque terme x_σ de la somme $\sum_{\sigma \in S_n}$ correspond donc un terme $x_{\sigma'}$ tel que $x_\sigma = -x_{\sigma'}$, ce qui montre que cette somme est nulle.
Si $i > j$, on prend $\alpha_i = (1, i)$ et on obtient le même résultat.

□

Ce lemme et l'expression (**) montrent donc que
1) si $i \neq j$ $m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_j = 0$.
2) $m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes \lambda_i \circ \theta_i = (p \circ D) \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_i = u_A \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_i$

Alors l'expression (*) montre quant à elle que

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Psi &= \sum_i m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes (u_A \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_i) \\ &= \sum_i m_A \otimes 1_{1^n} \circ 1_A \otimes u_A \otimes 1_{1^n} \circ \nu_i \circ \mu_i \\ &= \sum_i 1_A \otimes (\nu_i \circ \mu_i) = 1_A \otimes 1_{1^n}\end{aligned}$$

On finit maintenant la preuve de 5.3 de la même façon que Deligne en ([**5**], 7.17)

$$\Phi \circ \Psi = 1_A \otimes 1_{1^n} \Longrightarrow A \otimes V \xrightarrow{\sim} N \oplus (A \otimes 1^n)$$

où N est un A-module.

Rappelons que A-Mod est une catégorie tensorielle abélienne, et donc le début du paragraphe 3.8 s'applique : pour tout A-module M et tout entier k, on peut considérer $\Lambda^k_A(M)$ et la formule de la somme directe de 3.8 est valable.

On a $\Lambda^k_A(A \otimes V) \simeq A \otimes \Lambda^k(V)$.

N est alors facteur direct de $\Lambda^{n+1}(A \otimes V) \simeq A \otimes \Lambda^{n+1}(V) = 0$ car $\dim V = n$, donc $N = 0$.

5.6 Nous sommes maintenant capables de construire un anneau qui trivialise tous les objets de la catégorie tensorielle complète $\mathcal{V}$.

Soit $A := \bigotimes_{V \in Ob(\mathcal{V})} A_V$ (soit I est l'ensemble des parties finies de $Ob(\mathcal{V})$, et soit $i \in I$, $i = \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_j}\}$, on pose alors

$$A_i = Aw_1 \otimes \ldots \otimes A_{w_k} \quad \text{et} \quad A = \varinjlim_{i \in I} A_i).$$

On vérifie directement que A est un anneau de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ et que pour tout objet V de $\mathcal{V}$, $A \otimes V \tilde{\rightarrow} A \otimes 1^{\dim V}$.

5.7. Soit A l'anneau de 5.6 et soit $\Gamma_A = \mathrm{Hom}(1, A)$. On définit alors un foncteur $\Gamma : \mathcal{V} \longrightarrow \Gamma_A$-Mod, $\Gamma(V) = \mathrm{Hom}_A(A, A \otimes V)$. Il est clair que $\Gamma(1) = \Gamma_A$, et pour tout V, W on a un morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(A, A \otimes V) \otimes_{\Gamma_A} \mathrm{Hom}_A(A, A \otimes W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, A \otimes V \otimes W) \\ f \otimes g &\longrightarrow f \otimes_A g \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme Γ_A-linéaire (provient du fait que A trivialise V et W). $\Gamma : \mathcal{V} \longrightarrow \Gamma_A$-Mod est alors un $\otimes$-foncteur, symétrique et linéaire. Si $\mathcal{V}$ est semi-simple, alors les suites exactes sont scindées et Γ_A est alors exact, et est donc fidèle car si $\Gamma_A(V) = 0$, alors $\dim V = 0 \Longrightarrow V = 0$.

Γ est alors un foncteur fibre : $\mathcal{V} \longrightarrow \Gamma_A$-Mod.

Nous avons alors prouvé qu'une catégorie tensorielle complète semi-simple sur un corps de caractéristique 0 dont la dimension de chaque objet est un entier positif est tannakienne.

Le résultat général est obtenu en construisant un anneau B de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ tel que après extension des scalaires par B, les suites exactes courtes soit scindées (cf. [**5**], 7.14) et, en considérant le foncteur $V \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A \otimes B}(V, A \otimes B \otimes V)$ (où A est l'anneau construit précédemment).

5.8. Un résultat de la théorie générale affirme : “une catégorie tannakienne algébrique sur un corps k admet un foncteur fibre à valeurs sur les espaces vectoriels de dimension finie sur une extension finie de k” ([**21**]). En utilisant les considérations précédentes, nous obtenons une preuve simple de :

Proposition. *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne algébrique semi-simple sur un corps k de caractéristique 0 non dénombrable, alors $\mathcal{V}$ admet un foncteur fibre à valeurs sur les espaces vectoriels de dimension finie sur une extension algébrique de k.*

Preuve. Soit X un $\otimes$-générateur. Quite à prendre $X \oplus X^{\vee}$, on peut supposer que $X \xrightarrow{\sim} X^{\vee}$. Notons $\mathcal{V}_X$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}$ dont les objets sont les $X^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit A_X l'anneau de Trivialisation de X. On a alors un $\otimes$-foncteur Γ_X : $\mathcal{V}_X \longrightarrow \Gamma(A_X)$-mod défini comme en en 5.7. Il s'agit alors, pour montrer que $\Gamma_X : \mathcal{V} \longrightarrow \Gamma(A_X)$-mod est un foncteur fibre, de construire pour tous objets Y et Z de $\mathcal{V}$, des isomorphismes $\Gamma_X(Y) \otimes_{\Gamma_X(A)} \Gamma_X(Z) \xrightarrow{\sim} \Gamma_X(Y \otimes Z)$ satisfaisant les conditions de 3.2.

Soit Y un objet de C. Alors $Y \xrightarrow{\sim} \oplus_i Y_i$ où Y_i est un sous objet de $X^{\otimes s_i}$, pour un entier s_i. On a alors pour tout i des morphismes $u_i^Y : Y \longrightarrow X^{\otimes i}$, $P_i^Y : X^{\otimes i} \longrightarrow Y$ tels que $1_Y = \sum_i P_i^Y \circ u_i^Y$, $u_i^Y \circ P_j^Y = 0$ si $i \neq j$, $u_i^Y \circ P_i^Y \circ u_i^Y = u_i^Y$ $\forall i$. On pose :

$$\widetilde{\Gamma}_{Y,Z} = \sum_{i,j} \Gamma(P_i^Y \otimes P_j^Z) \circ \widetilde{\Gamma}_{s_i,t_j} \circ \Gamma(u_i^Y) \otimes \Gamma(u_j^Z)$$

Un calcul direct montre que ceci définit un foncteur fibre sur les $\Gamma(A_X)$-module.

$\Gamma(A_X)$ est de dimension dénombrable sur k (Lemme 5.2), donc un idéal maximal de $\Gamma(A_X)$ fournit un foncteur fibre sur un corps K de dimension dénombrable sur k.

K est alors algébrique sur k, car k étant non dénombrable, le corps $k(X)$ est de dimension non dénombrable sur k (les $\{\frac{1}{(X-a)}$ $a \in K\}$ forment une famille libre), ce qui montre que K ne contient pas d'élément transcendant. $\square$

Corollaire. *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne algébrique semi-simple sur un corps k de caractéristique nulle, non dénombrable et algébriquement clos. Alors $\mathcal{V}$ est neutre, c'est-à-dire il existe un foncteur fibre $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow Vect_f(k)$.*

5.9. Résultat d'unicité.

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne neutre sur un corps k, et $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow Vect_f(k)$ un foncteur fibre.

On a vu dans la partie 2 que l'on a un isomorphisme $\mathrm{End}(\omega) \longrightarrow (\mathrm{End}^{\vee}(\omega))^*$. Si on note $\mathrm{End}^{\otimes}(\omega)$ l'ensemble des endomorphismes du $\otimes$-foncteur ω, alors $\mathcal{V}$ et $Vect_f(k)$ étant rigides, on a $\mathrm{End}^{\otimes}(\omega) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$. Il est alors de vérification directe que l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme de groupes : $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathrm{End}^{\vee}(\omega))$.

Si ω_1 et ω_2 sont des foncteurs fibres $\mathcal{V} \longrightarrow Vect_f(k)$, on peut construire un espace vectoriel $\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2)$ tel que $\mathrm{Hom}(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2))^*$. On pose :

$$\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2) = \bigoplus_{x \in Ob(\mathcal{V})} \mathrm{Hom}(\omega_2(X), \omega_1(X))/N$$

où N est le sous-espace engendré par les $S \circ \omega_2(f) - \omega_1(f) \circ S$, où $f : X \longrightarrow Y$, et $S : \omega_2(Y) \longrightarrow \omega_1(X)$.

L'isomorphisme est construit de la même façon que dans la partie 2.

Le produit tensoriel sur $\mathcal{V}$ induit une structure d'algèbre sur $\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2)$ et $\mathrm{Hom}^\otimes(\omega_1, \omega_2) = Is^\otimes(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2))$.

Pour prouver que les foncteurs fibres ω_1 et ω_2 sont isomorphes (comme $\otimes$-foncteurs) (et par conséquent que les algèbres de Hopf $\mathrm{End}^\vee(\omega_1)$ et $\mathrm{End}^\vee(\omega_2)$ sont isomorphes) il suffit de montrer que $\mathrm{Spec}(\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2) \neq \emptyset$. C'est le cas si k est algébriquement clos et si $\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2)$ est une k-algèbre de type fini.

Si $\mathcal{V}$ est algébrique, alors $\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2)$ est de type fini. Vérifions le dans le cas où $\mathcal{V}$ est semi-simple.

Proposition. *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne algébrique semi-simple neutre, avec ω_1 et ω_2 deux foncteurs fibre $\mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(k)$. Alors $\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2)$ est de type fini sur k. Si k est algébriquement clos, alors ω_1 et ω_2 sont isomorphes.*

Preuve. Notons tout d'abord que si V, $W \in Ob(\mathcal{V})$, $A \in \mathrm{Hom}(\omega_2(V), \omega_1(V))$, $B \in \mathrm{Hom}(\omega_2(W), \omega_1(W))$, $[V, A] + [W, B] = [V \oplus W, C]$ pour un $C \in \mathrm{Hom}(\omega_2(V \oplus W), \omega_1(V \oplus W))$.

Soit X un $\otimes$-générateur (on peut supposer, quite à prendre $X \oplus X^\vee$, que $X \xrightarrow{\sim} X^\vee$), et soit $[V, A]$ un élément quelconque de $\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2)$.

Soit $k_1, \ldots, k_n$ des entiers tels que $V \overset{i}{\hookrightarrow} X^{\otimes k_1} \oplus \ldots \oplus X^{\otimes k_n} = Z$ et $p : Z \longrightarrow V$ tel que $p \circ i = 1_V$.

Alors $[V, A] = [Z, \omega_1(i) \circ A \circ \omega_2(p)]$ donc $[V, A] = \sum_{i=1}^n [X^{\otimes k_i}, B_i]$.

Si $p = \dim X$, il est immédiat que les $[X, e_s^* \otimes f_t]$ ((e_s) étant une base de $\omega_2(X)$, et (f_t) étant une base de $\omega_1(X)$), forment une famille qui engendre $\mathrm{Hom}^\vee(\omega_1, \omega_2)$. $\square$

5.10. Concluons ce chapitre par quelques considérations sur les catégories tannakiennes semi-simples, qui nous serons utiles dans la prochaine partie pour obtenir une mesure de Haar sur l'algèbre reconstruite.

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne neutre sur k, semi-simple et telle que l'algèbre des endomorphismes de chaque objet irréductible soit réduite à k, et soit $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow Vect_f(k)$ un foncteur fibre. Soit Σ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets irréductibles. Si $\lambda \in \Sigma$, notons V_λ un représentant.

Proposition. *L'application évidente*

$$\bigoplus_{\lambda\in\Sigma} \mathrm{End}(\omega(V_\lambda)) \longrightarrow \mathrm{End}^\vee(\omega)$$

est un isomorphisme de coalgèbres.

Preuve. Il est immédiat que c'est un morphisme de coalgèbres, surjectif car tout objet est somme directe d'objet irréductibles. Il reste à montrer que si $A \in \mathrm{End}(\omega(V_k))$ où $\lambda \in \Sigma$, $[V_\lambda, A] = 0$ dans $\mathrm{End}^\vee(\omega) \Longrightarrow A = 0$. Nous y parvenons grâce au lemme suivant, de vérification immédiate : (où intervient l'hypothèse $\mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda) = k$).

Lemme. *Soit $\lambda \in \Sigma$, V_λ un représentant $B \in \mathrm{End}(\omega(V_\lambda))$. Alors il existe un élément $u_B \in \mathrm{End}(\omega)$ tel que $u_{V_\lambda} = A$ et $u_{V_\delta} = 0$ si $\lambda \neq \delta$.*

Associons à u_B, pour $B \in \mathrm{End}(\omega(V_\lambda))$, la forme linéaire sur $\mathrm{End}^\vee(w)$: $\sum_\mu [V_\mu, B_\mu] \longmapsto \sum_\mu Tr[B \circ B_\mu]$ (partie 2). Comme $[V_\lambda, A] = 0$, on a $\forall\ B \in \mathrm{End}(\omega(V_\lambda))$, $Tr(B \circ A) = 0$ ce qui montre que $A = 0$.

$\square$

On peut alors définir une forme linéaire $J : \mathrm{End}^\vee(\omega) \longrightarrow k$ telle que $J \otimes 1 \circ \Delta = u \circ J = 1 \otimes J \circ \Delta$, $J \circ u = 1$ (J est construite à partir de l'élément u_{id_1} du lemme). C'est une mesure de Haar.

6. Cas des groupes compacts

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$, et $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(\mathbb{C})$ un foncteur fibre. Nous savons que ω induit une $\otimes$- équivalence

$$\overline{\omega} : \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}omod_f(\mathrm{End}^\vee(w))$$

Pour reconnaître la catégorie des représentations d'un groupe compact, nous devons avoir au moins une involution semi-linéaire sur $\mathrm{End}^\vee(\omega)$, et donc une notion de conjugaison dans $\mathcal{V}$.

En fait, les axiomes de Doplicher et Roberts [**5**] assurent (pour une catégorie non supposée tannakienne) que les objets sont de dimension finie (on peut alors appliquer les résultats précédents) et fournissent une notion correcte de conjugaison.

Nous nous contenterons ici de la caractérisation des catégories de représentations de groupe de Lie compacts, le cas général étant alors donné par les résultats du paragraphe 6 de [**5**] (le groupe compact alors obtenu est limite projective de groupes de Lie).

6.1. $*$-catégories.

La notion suivante permet de généraliser les catégories d'espaces de Hilbert (cf [**10**]).

Définition. Une catégorie $\mathcal{V}$ est une $*$-catégorie si
1) pour tous objets X, Y de $\mathcal{V}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$ est un espace vectoriel complexe, la composition des flèches étant bilinéaire.
2) il existe un foncteur contravariant $* : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, antilinéaire, qui préserve les objets et involutif. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$, nous noterons f^* son image par $*$.
3) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$, il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, X)$ tel que $g^* \circ g = f^* \circ f$.
4) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$, $f^* \circ f = 0 \Longrightarrow f = 0$.

Exemples. Soit $\mathcal{H}_f$ la catégorie des espaces de Hilbert de dimension finie. $\mathcal{H}_f$ est une $*$-catégorie, avec la définition usuelle de $*$.
De même si G est un groupe compact, $U(\mathrm{Rep}(G))$, la catégorie des représentations unitaires de G, est une $*$-catégorie.

Définition. Soit $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ des $*$-catégories. Un foncteur $F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ est un $*$-foncteur si F est linéaire et $F(f^*) = F(f)^*$, $\forall\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$.

Définitions. Soit $\mathcal{V}$ une $*$-catégorie. On dira que $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$ est une isométrie si $u^* \circ u = 1_X$. Si de plus $u \circ u^* = 1_Y$, on dira que u est unitaire. Un élément $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, X)$ sera dit auto-adjoint si $p^* = p$.

Définition. Une $*$-catégorie abélienne $\mathcal{V}$ est une $*$-catégorie $\mathcal{V}$, abélienne et soumise aux conditions suivantes :
1) (Sommes directes orthogonales) : soit $X, Y \in Ob(\mathcal{V})$, il existe $i_X : X \longrightarrow X \oplus Y$, $i_Y : Y \longrightarrow X \oplus Y$ des isométries telles que $1_{X \oplus Y} = i_X \circ i_X^* + i_Y \circ i_Y^*$.
2) (sous-objets) : soit $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, X)$ une projection auto-adjointe. Il existe $u : \mathrm{Im}(p) \longrightarrow X$ une isométrie telle que $p = u \circ u^*$.

6.2. $*$-catégories et structures monoidales.

Définition. Une catégorie monoidale $\mathcal{V}$ est une $*$-catégorie monoidale si
1) $\mathcal{V}$ est une $*$-catégorie
2) $\mathcal{V}$ est une catégorie monoidale sur $\mathbb{C}$.
3) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, X')$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(Y, Y')$, $(f \otimes g)^* = f^* \otimes g^*$.

Exemple. $\mathcal{H}_f$ est une $*$-catégorie monoidale : si H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert de dimension finie, le produit scalaire sur $H_1 \otimes H_2$ est défini par

$$\langle h_1' \otimes h_2', h_1 \otimes h_2 \rangle = \langle h_1', h_1 \rangle \langle h_2', h_2 \rangle.$$

Définition. $\mathcal{V}$ est dite une $*$-catégorie monoidale symétrique si :
1) $\mathcal{V}$ est une $*$-catégorie monoidale
2) $\mathcal{V}$ est symétrique et pour tous objets X, Y de $\mathcal{V}$, $C_{X,Y}$ est unitaire.

$\mathcal{H}_f$ est une *-catégorie monoidale symétrique.

Si $\mathcal{V}$ est une *-catégorie monoidale symétrique, pour tout objet X, on peut imposer au foncteur $F_X : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{V}$ de la partie 3.6, d'être à valeurs dans les opérateurs unitaires de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{V}}(X^{\otimes n})$, pour tout n. La projection totalement antisymétrique A_n est alors une projection auto-adjointe.

6.3. Conjugués.

Définition. Soit $\mathcal{V}$ une $*$-catégorie monoidale symétrique, X un objet de $\mathcal{V}$. Un conjugué pour X est la donnée d'un couple $(\overline{X}, \phi_X)$ où $\overline{X} \in Ob(\mathcal{V})$ et $\phi_X : \overline{X} \otimes X \longrightarrow 1$ vérifiant

$$1_X \otimes \phi_X \circ \kappa_X \otimes 1_X = 1_X$$

$$\phi_X \otimes 1_{\overline{X}} \circ 1_{\overline{X}} \otimes \kappa_X = 1_{\overline{X}}$$

où $\kappa_X = C_{\overline{X},X} \circ \phi_X^*$.

On reconnaît donc un type particulier du dualité.

Le résultat d'unicité spécifique affirme que deux conjugués pour un même objet sont *unitairement* isomorphes ([**5**]), 2.2), ce qui est important ici.

Exemple. $\mathcal{H}_f$ admet des conjugués. Si H est un espace de Hilbert de dimension finie, soit $\psi_H : \overline{H} \otimes H \longrightarrow \mathbb{C}$ le produit scalaire ($\overline{H}$ est l'espace conjugué de H), alors $(\overline{H}, \psi_X)$ définit un conjugué pour H. Dans $\mathcal{H}_f$, on identifie H et $\overline{\overline{H}}$.

6.4. Le théorème de Dophicher-Roberts

Définition. Soit $\mathcal{V}$ une $*$-catégorie monoidale symétrique. Si $\mathcal{V}$ est une $*$-catégorie abélienne, admet des conjugués et vérifie $\mathrm{End}(1) = \mathbb{C}$, on dit que $\mathcal{V}$ est une $*$-catégorie tensorielle complète.

Théorème. *Soit $\mathcal{V}$ une $*$-catégorie tensorielle complète algébrique. Il existe un groupe de Lie compact G, unique à isomorphisme près, et une $\otimes$-équivalence $\varpi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}ep(G)$.*

Notre objectif est maintenant de prouver ce théorème.

6.5. Soit $\mathcal{V}$ une $*$-catégorie tensorielle complète. Nous établissons dans cette partie que la dimension de chaque objet est un entier positif, et que $\mathcal{V}$ est semi-simple.

Lemme. *Soit* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X,Y)$. *Si* $f \neq 0$, *alors* $Tr(f^* \circ f) > 0$.

Preuve. $Tr(f^* \circ f) = \phi_X \circ 1_{\overline{X}} \otimes (f^* \circ f) \circ C_{X,\overline{X}} \circ \kappa_X = \phi_X \circ 1_{\overline{X}} \otimes f^* \circ 1_{\overline{X}} \otimes f \circ \phi_X^* = (1_{\overline{X}} \otimes f \circ \phi_X^*)^* \circ (1_{\overline{X}} \otimes f \circ \phi_X^*)$.
D'après la définiton 6.1, il existe $g \in \mathrm{End}(1)$ tel que $g^* \circ g = Tr(f^* \circ f)$. Mais g est un scalaire, et donc $Tr(f^* \circ f) \geq 0$.
Si $Tr(f^* \circ f) = 0$, on a, toujours d'après 6.1, $\phi_X \circ 1_{\overline{X}} \otimes f^* = 0$ et les équations de conjugaison impliquent que $f = 0$, d'où $Tr(f^* \circ f) > 0$.

Corollaire. *Pour tout objet* X *de* $\mathcal{V}$, *dim*(X) *est un entier positif.*

Preuve. Pour tout entier n, soit A_n la projection totalement anti-symétrique de $X^{\otimes n}$. Comme A_n est une projection auto-adjointe, $Tr(A_n) \geq 0$, $\forall n$. Le théorème (3.8) assure alors que $\dim(X)$ est un entier positif.

□

Un objet X de $\mathcal{V}$ est dit quasi-simple si l'$*$-algèbre $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ n'admet pas de projection auto-adjointe non triviale.

Un objet simple est de façon évidente quasi-simple.

Lemme. *Tout objet* X *est somme directe (orthogonale) d'objets quasi-simples.*

Preuve. Si X est quasi-simple, il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $p \in \mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ une projection auto-adjointe non triviale, ie $p \neq 1_X$ et $p \neq 0$. Soit $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}(1-p)$ les espaces associés : $X = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}(1-p)$. On a alors $\dim(\mathrm{Im})p < \dim(X)$ et $\dim(\mathrm{Im}1-p) < \dim(X)$. Une récurrence sur la dimension de X permet de conclure.

□

Il s'agit maintenant de prouver qu'un objet est simple si et seulement si il est quasi-simple.

Lemme. *Pour tout objet* X *de* $\mathcal{V}$, $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ *est une* C^**-algèbre de dimension finie.*

Preuve. Le fait que $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ est de dimensin finie est vrai dans un cadre plus général, mais vérifions le ici. Tout d'abord notons que si X est quasi-simple $\mathrm{Hom}(1,X) \simeq \mathbb{C}$ si $X \simeq 1$ et $\mathrm{Hom}(1,X) = 0$ sinon.

En effet, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(1,X)$, $f^* \circ f \in \mathrm{End}(1) \Longrightarrow f^* \circ f = \lambda_{1_1}$ où $\lambda \geq 0 \Longrightarrow f$ admet une rétraction $\Longrightarrow f$ est un isomorphisme si $f \neq 0$ (X est quasi-simple).

Alors, pour tout objet X, $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(1, \overline{X} \otimes X)$ et $X \otimes \overline{X}$ étant somme directe d'objets quasi-simples, $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ est de dimension finie.

On peut munir $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ d'un produit scalaire : $\langle f, g \rangle = Tr\ (f^* \circ g)$. En considérant la représentation régulière de cette $*$-algèbre de dimensin finie, on obtient une C^*-norme.

□

Corollaire. *Soit X un objet quasi-simple de $\mathcal{V}$. Alors* $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X) = \mathbb{C}$ *et X est simple.*

Preuve. $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ est une C^*-algèbre de dimension finie donc il existe des espaces de Hilbert de dimension finie $V_1, \ldots, V_n$ tels que $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$ est isomorphe comme C^*-algèbre à $\prod_{i=1}^n \mathrm{End}(V_i)$. Si $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{V}}(X)$, le projecteur orthogonal associé à une valeur propre λ de l'image de f dans $\prod_{i=1}^n \mathrm{End}(V_i)$ est l'identité, donc $f = \lambda 1_X$.
□

Nous avons donc montré que $\mathcal{V}$ est semi-simple.

6.6. Fixons maintenant une $*$-catégorie tensorielle complète algébrique $\mathcal{V}$. Les résultats de 6.5 nous autorisent à considérer un foncteur fibre $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow Vect_f(\mathbb{C})$ (que l'on fixe également) qui induit une $\otimes$-équivalence $\varpi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}omod_f(\mathrm{End}^{\vee}(\omega))$. Nous savons des deux premiers chapitres les structures que doit posséder $\mathrm{End}^{\vee}(\omega)$ pour reconnaître la catégorie des représentations d'un groupe compact.

6.7. Commençons par définir une $*$-involution sur $\mathrm{End}^{\vee}(\omega)$.

Pour chaque objet X de $\mathcal{V}$, fixons $\phi_X : \overline{X} \otimes X \to \underline{1}$ une forme de conjugaison.

On a un foncteur semi-linéaire $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, $X \mapsto \overline{X}$, qui à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$ associe $\overline{f} :=^t (f^*) = (^t f)^*$.

Ce foncteur conjugaison est un $\otimes$-foncteur, et on a un isomorphisme de $\otimes$-foncteurs $\mu_X : X \longrightarrow \overline{\overline{X}}$ tel que $\mu_{\overline{X}} = \overline{\mu_X}$ (cf. [**4**], partie 4).

On définit alors un foncteur fibre $\overline{\omega}$ sur $\mathcal{V}$: $\overline{\omega}(X) = \overline{\omega(\overline{X})}$ (conjugaison usuelle dans $\mathbb{C}$).

Soit alors $\rho \in \mathrm{Is}^{\otimes}(\omega, \overline{\omega})$. Posons pour chaque objet X de $\mathcal{V}$, $\lambda_X = \overline{\rho_X}$, $\overline{\omega(X)} \to \omega(\overline{X})$.

Ceci permet de définir un automorphisme semi-linéaire de $\mathrm{End}^{\vee}(\omega)$:

$$\theta([X, A]) = [\overline{X}, \lambda_X \circ \overline{A} \circ \lambda_X^{-1}]$$

Les résultats de [**4**], partie 4, et plus particulièrement 4.15 et 4.16 nous autorisent à considèrer un élément η de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) = \mathrm{Spec}(\mathrm{End}^{\vee}(\omega))$ tel que pour tout objet simple X,

$$\psi_{\omega(X)} = \omega(\phi_X) \circ \widetilde{\omega}_{\overline{X}, X} \circ (\lambda_X \circ \overline{\eta}_X) \otimes 1_{\omega(X)}$$

est un produit scalaire sur $\omega(X)$

On peut donc supposer que l'on a un élément ρ de $\mathrm{Is}^{\otimes}(\omega, \overline{\omega})$ tel que pour tout objet simple X, $\lambda_X = \overline{\rho}_X$ est tel que

$$\psi_{\omega(X)} = \omega(\phi_X) \circ \widetilde{\omega}_{\overline{X}, X} \circ \lambda_X \otimes 1_{\omega(X)}$$

est un produit scalaire.

Si maintenant $X = \oplus_i X_i$ où les X_i sont des objets simples, en definissant $\psi_{\omega(X)}$ de la même façon que plus haut, la fonctorialité de λ et $\widetilde{\omega}$ implique que $\psi_{\omega(X)}$ est un produit scalaire sur $\omega(X)$ rendant les espaces $\omega(X_i)$ deux à deux orthogonaux.

Le foncteur ω se factorise donc en un $*$-fonteur (toujours noté ω) $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{H}_f$, où les $\omega(X)$ sont munis du produit scalaire $\psi_{\omega(X)}$.

D'autre part, pour tous objets X et Y, $\widetilde{\omega}_{X,Y} : \omega(X) \otimes \omega(Y) \longrightarrow \omega(X \otimes Y)$ est unitaire, c'est à dire

$$\psi_{\omega(\overline{X} \otimes X)} \circ \overline{\widetilde{\omega}_{\overline{X},X}} \otimes \widetilde{\omega}_{\overline{X},X} = \psi_{\omega(\overline{X}) \otimes \omega(X)}$$

La vérification est fastidieuse mais directe.

Ceci montre que $\omega(\phi_X) \circ \widetilde{\omega}_{\overline{X},X}$ est une forme de conjugaison pour $\omega(X)$, et donc que λ_X est unitaire, pour tout objet X.

Lemme. $\theta^2 = 1$

Preuve. $\theta^2([X, A]) = [\overline{\overline{X}}, \lambda_{\overline{X}} \circ \overline{\lambda_X} \circ A \circ \overline{\lambda_X}^{-1} \circ \lambda_{\overline{X}}^{-1}]$
$= [X, \mu_X^{-1} \circ \lambda_{\overline{X}} \circ \overline{\lambda_X} \circ A \circ \overline{\lambda_X}^{-1} \circ \lambda_{\overline{X}}^{-1} \circ \mu_X]$.
Or $\mu_X \circ^t \lambda_X = \lambda_{\overline{X}}$ (vérification directe), et donc
$\mu_X = \lambda_{\overline{X}} \circ^t \lambda_X^{-1} = \lambda_{\overline{X}} \circ \overline{\lambda_X} \Rightarrow \theta^2 = 1$

Munie de θ, $\mathrm{End}^\vee(\omega)$ est une $*$-algèbre de Hopf.

6.8. Mesure de Haar sur $\mathrm{End}^\vee(\omega)$

Lemme. $\mathrm{End}^\vee(\omega)$ est munie d'une mesure de Haar.

Preuve. J est défini en 5.10.
Si $a = [X, A]$, avec X objet irréductible,
$J(a^* a) = J([\overline{X} \otimes X, \widetilde{\omega}_{\overline{X},X} \circ (\lambda_X \circ \overline{A} \circ \lambda_X^{-1}) \otimes A \circ \widetilde{\omega}_{\overline{X},X}^{-1}]$.
Si $n = \dim(X)$, on a $\phi_X \circ \phi_X^* = n$, et $p = \frac{\phi_X^*}{n} \circ \phi_X$ est une projection de $\overline{X} \otimes X$,donc
$a^* a = [\overline{X} \otimes X, \omega(p) \circ \ldots] + [\overline{X} \otimes X, \omega(1-p) \circ \ldots]$
Le deuxième terme de la somme est nul sous J (1 n'apparait qu'une fois dans $\overline{X} \otimes X$) et d'autre part, $[\overline{X} \otimes X, \omega(p) \circ \ldots] =$

$$\frac{1}{n}[1, \omega(\phi_X) \circ \widetilde{\omega}_{\overline{X},X} \circ \lambda_X \otimes 1_{\omega(X)} \circ \overline{A} \otimes A \circ \lambda_X^{-1} \otimes 1_{\omega(X)} \circ \widetilde{\omega}_{\overline{X},X} \circ \omega(\phi_X^*)]$$

$$= \frac{1}{n}[1, \psi_{\omega(X)} \circ \overline{A} \otimes A \circ \psi_{\omega(X)}^*]$$

$$= \frac{1}{n}[1, \psi_{\omega(X)} \circ 1_{\omega(X)} \otimes (A^* \circ A) \circ \psi^*_{\omega(X)}]$$

$= \frac{1}{n} Tr(A^* \circ A) > 0$, si $A \neq 0$ (A^* est l'adjoint de A relativement à $\psi_{\omega(X)}$).

Si maintenant $a = \sum_{\sigma \in \Sigma} [X_\sigma, A_\sigma]$ où Σ est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples,

$J(a^*a) = \sum J([X_\sigma, A_\sigma]^*[X_\sigma, A_\sigma])$ car si $\sigma \neq \tau$, 1 n'apparait pas dans $\overline{X}_\sigma \otimes X_\tau$. On en déduit que $J(a^*a) > 0$ si $a \neq 0$.

□

6.9. Le théorème de dualité de Tannaka-Krein assure maintenant que $\mathrm{End}^\vee(\omega) \xrightarrow{\sim} R(G)$, où $G = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(\mathrm{End}^\vee(\omega))$ est un groupe compact. La partie existence de 6.4 est alors prouvée.

Unicité. Soit G_1 et G_2 deux groupes compacts, ω_1 et $\omega_2 : \mathcal{V} \longrightarrow Vect_f(\mathbb{C})$ deux foncteurs fibre induisant des $\otimes$-équivalences $\omega_1 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}omod_f(\mathrm{End}^\vee(\omega_1))$, $\omega_2 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}omod_f(\mathrm{End}^\vee(\omega_2))$.

Les algèbres de Hopf $\mathrm{End}^\vee(\omega_1)$ et $\mathrm{End}^\vee(\omega_2)$ sont isomorphes car ω_1 et ω_2 le sont.

$G_i = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(\mathrm{End}^\vee(\omega_i))$, $i = 1, 2$, est un sous groupe compact maximal ([**2**]) du groupe de Lie complexe $H_i = \mathrm{Aut}^\otimes(\omega_i) = \mathrm{Spec}(\mathrm{End}^\vee(\omega_i))$ ($H_1 \xrightarrow{\sim} H_2$). Or tous les sous-groupes compacts maximaux de tels groupes de Lie sont conjugués, donc $G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$.

Références

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, *Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas*, Lect. Notes in Math. 269, Springer Verlag, 1972.

[2] J. Bichon, *Théorème de Tannaka-Krein fonctionnel*, en préparation.

[3] T. Brocker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, GTM 98, Springer Verlag, 1985.

[4] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, 1994.

[5] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, Grothendieck Feschrift, vol. II, Birkhaüser, 1990, 111–195.

[6] P. Deligne, J.S. Milne, *Tannakian categories*, Lect. Notes in Math. 900, Springer Verlag, 1982, 101–128.

[7] S. Doplicher, J.E. Roberts, *A new duality theory for compact groups*, Invent. Math. 98, 1989, 157–218.

[8] R.S. Doran, V.A. Belfi, *Characterizations of C^*-algebras*, Marcel Dekker, 1986.

[9] R. et A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, vol. II, Cedic Fernand Nathan, 1979.

[10] W.P. French, J. Luukainen, J.F. Price, *The Tannaka-Krein duality principle*, Adv. in Math. 43, 1982, 230–249.

[11] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 1962, 323–448.

[12] P. Ghez, R. Lima, J.E. Roberts, *W^*-catégories*, Pac. J. Math. 120, 1985, 79–109.

[13] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, vol. II, Springer Verlag, 1970.

[14] G. Hochshild, *The structure of Lie groups*, Holden Day, 1965.

[15] K.H. Hofmann, *The duality of compact semi-groups and C^*-bigebras*, Lect. Notes Math. 129, Springer-Verlag, 1969.

[16] A. Joyal, R. Street, *An introduction to Tannaka duality and quantum groups*, Lect. Notes Math. 1488, Springer Verlag, 1991.

[17] A. Joyal, R. Street, *Braided tensor categories*, Adv. in Math. 102, 1993, 20–78.

[18] N. Katz, *Exponential sums and differential equations*, Ann. of Math. Studies 124, Princeton University Press, 1990.

[19] A.A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer Verlag, 1976.

[20] O. Leroy, *Théorème de Van-Kampen en théorie des topos*, Cahiers mathématiques Montpellier 17, 1979.

[21] N. Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes in Math. 265, Springer Verlag, 1972.

[22] K.H. Ulbrich, *On Hopf algebras and rigid monoidal categories*, Israel J. Math. 72, 1990, 252-256.

bichon@math.univ-montp2.fr

Laboratoire AGATA
Département de mathématiques
Case 051
Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5

Septembre 1996.