Topologie et géométrie

Notes de cours
Master 1 Mathématiques

Julien Bichon
Département de Mathématiques
Université Blaise Pascal

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce cours est de fournir les bases de topologie nécessaires en analyse fonctionnelle et géométrie différentielle. Un grand nombres des notions qui vont être étudiées ont déjà été introduites dans un cours de topologie des espaces métriques en licence. Ce cours doit permettre d'approfondir ces notions et de les comprendre dans un cadre un peu plus général. En effet, si la a plupart des espaces topologiques que l'on rencontre en pratique ont leur topologie induite par une distance, on a néanmoins de bonnes raisons de travailler dans le cadre plus général des espaces topologiques.

1. Dans les espaces métriques, beaucoup de résultats ne dépendent que de la topologie et pas de la distance, et les preuves de ces résultats sont souvent plus simples et plus élégantes en n'utilisant que des arguments topologiques.
2. Il existe tout de même des exemples importants d'espaces topologiques dont la topologie ne provient pas d'une distance (de tels espaces sont dits non métrisables), notamment en analyse fonctionnelle. Il est donc important de pouvoir sortir du cadre purement métrique.

Par ailleurs, le cours a pour autre objectif d'introduire un assez vaste catalogue d'espaces topologiques "usuels" de nature géométrique, qui sont les outils premiers d'expérimentation en géométrie différentielle.

La référence bibliographique principale utilisée pour ce cours est le livre

◇ G. Skandalis, Topologie et analyse 3e année, Dunod, 2001.

Voici quelques autres références, utilisées de manière plus sporadique.

◇ H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1983. (pour le chapitre II).
◇ C. Godbillon, Topologie algébrique, Hermann, 1971.
◇ J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Grenoble Sciences, 2010.

Merci de me signaler les nombreuses coquilles ou erreurs qui n'auront pas manqué de se glisser dans le texte !

I Espaces topologiques

Dans ce chapitre on rappelle et précise le langage des espaces topologiques, l'essentiel des notions et résultats ayant déjà été rencontrés dans le cadre métrique.

A Espaces topologiques : généralités

A.1 Définitions et premiers exemples, ouverts

Définition A.1. *Une **topologie** sur un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}(X)$ satisfaisant les trois axiomes suivants :*

1. *$\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$;*
2. *la réunion $\cup_{i\in I} U_i$ de toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$;*
3. *L'intersection $U \cap U'$ de deux éléments U et U' de $\mathcal{O}$ est encore un élément de $\mathcal{O}$.*

*Un **espace topologique** est un ensemble muni d'une topologie. Les éléments d'une topologie $\mathcal{O}$ sur X s'appellent les **ouverts** pour la topologie $\mathcal{O}$.*

Formellement, un espace topologique est donc une paire $(X, \mathcal{O})$ où X est un ensemble et $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ satisfaisant aux axiomes précédents. Souvent, lorsque la topologie est sous-entendue, on note simplement $X = (X, \mathcal{O})$ et on dit "soit X un espace topologique". De même l'expression "soient X un espace topologique et U un ouvert de X" signifie que X est muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et que U est ouvert pour cette topologie.

Remarque A.2. On peut remplacer l'axiome 3 par l'axiome équivalent suivant : l'intersection de toute famille finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore un élément de $\mathcal{O}$ (le vérifier par récurrence).

Exemple A.3. (**Topologie d'un espace métrique**) Rappelons qu'un espace métrique est une paire (X, d) où X est un ensemble et $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une application, appelée distance, telle que $\forall x, y, z \in X$, on ait

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Si $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, la boule ouverte de centre x est de rayon ε est l'ensemble

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

On définit alors

$$\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in U, \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \varepsilon) \subset U\}$$

Alors $\mathcal{O}$ est une topologie sur X (le vérifier !), appelée la topologie induite par la distance d. **Tout espace métrique (X, d) est donc muni d'une topologie, appelée la topologie associée à la distance d, et dont les ouverts sont les réunions de boules ouvertes** (vérifier).

Remarque A.4. Soit X un ensemble. On dit que **deux distances d et d' sur X sont équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x, y \in X$

$$\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$$

Si les distances d et d' sont équivalentes, alors les topologies sur X définies par d et d' sont les mêmes.

En effet : Pour $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, notons

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}, \quad \text{et} \quad B'(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d'(x,y) < \varepsilon\}$$

Soient $\alpha, \beta > 0$ vérifiant les relations précédentes. On a alors

$$B(x,\varepsilon) \subset B'(x,\beta\varepsilon) \quad \text{et} \quad B'(x,\varepsilon) \subset B(x,\alpha^{-1}\varepsilon)$$

Soit U un ouvert pour la topologie définie par d et $x \in U$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$ et donc, par les la deuxième inclusion précédente, on a $B'(x,\alpha\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon) \subset U$; ce qui montre que U est ouvert par la topologie associée à la distance d'. De même on montre qu'un ouvert pour la topologie associée à la distance d' est ouvert pour la topologie associée à la distance d. $\square$

Exemple A.5. (**Topologie d'un espace vectoriel normé**) Rappelons qu'un **espace vectoriel normé** (evn) est une paire $(E, ||\cdot||)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une application, appelée **norme**, telle que $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on ait

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si $E = (E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, la formule $d(x,y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E, et ainsi une topologie sur E, appelée la topologie induite par la norme de E. Par exemple, les formules suivantes définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$ ($x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) :

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|), \quad \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E$

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$$

Il est immediat que les distances associées à des normes équivalentes sont équivalentes, et ainsi les topologies associées à des normes équivalentes sont équivalentes.

On peut vérifier que les normes précédentes définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Plus généralement, on a le théorème suivant, démontré en L3.

Théorème A.6. Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Sauf mention du contraire, un espace vectoriel de dimension finie est muni de la topologie définie par n'importe quelle norme.

Remarque A.7. On peut bien sur formuler les mêmes définitions pour les espaces vectoriels complexes.

La plupart des espaces topologiques que l'on rencontre en pratique ont leur topologie induite par une distance. Néanmoins on a de bonnes raisons de travailler dans le cadre des espaces topologiques.

1. Dans les espaces métriques, beaucoup de résultats ne dépendent que de la topologie et pas de la distance, et les preuves de ces résultats sont souvent plus simples et plus élégantes en n'utilisant que des arguments topologiques.
2. Il existe tout de même des exemples importants d'espaces topologiques dont la topologie ne provient pas d'une distance (de tels espaces sont dits non métrisables), notamment en analyse fonctionnelle. Il est donc important de pouvoir sortir du cadre purement métrique.

Exemple A.8. (**Topologie discrète**) Soit X un ensemble et $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$. Alors $\mathcal{O}$ est une topologie sur X, appelée la topologie discrète sur X (pour laquelle donc toute partie de X est ouverte). On peut montrer que cette topologie provient d'une distance.

Exemple A.9. (**Topologie grossière**) Soit X un ensemble et $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. Alors X est une topologie, appelée la topologie grossière sur X (et ne provient pas d'une distance sauf si X a moins d'un élément).

Pour montrer que la topologie grossière ne provient pas d'une distance, on peut utiliser le concept suivant.

Définition A.10. *Un espace topologique X est dit **séparé** si pout tous $x, y \in X$, avec $x \neq y$, il existe un ouvert U contenant x et un ouvert V contenant y tels que $U \cap V = \emptyset$.*

Proposition A.11. Un espace métrique est séparé.

Preuve. Soit (X, d) un espace métrique et soient $x, y \in X$, avec $x \neq y$. Soit $\varepsilon = d(x, y)/3 > 0$. On vérifie que $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. □

Il suit qu'un espace topologique grossier ayant au moins deux éléments n'est pas métrisable.

A.2 Fermés, intérieur et adhérence

Définition A.12. *Soit X un espace topologique. Une partie F de X est dite **fermée** si son complémentaire est ouvert.*

Exemple A.13. Si (X, d) est un espace métrique, alors pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

est un fermé de X. On dit que $\overline{B}(x,\varepsilon)$ est la boule fermée de centre x et de rayon ε.

En effet : Soit $y \in X \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)$: $d(x,y) > \varepsilon$. Soit $\alpha = (d(x,y) - \varepsilon)/2$. Soit $z \in B(y,\alpha)$: $d(y,z) < \alpha$. On a

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \alpha = (d(x,y) + \varepsilon)/2 > \varepsilon,$$

donc $z \in X \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)$ et $B(y,\alpha) \subset X \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)$. Cela montre que $\overline{B}(x,\varepsilon)$ est fermé. □

Exemple A.14. Si X est un espace topologique séparé, les points sont des fermés de X.

En effet : Soit $x \in X$ et $y \in X \setminus \{x\}$, c'est-à-dire $y \neq x$. Soient U_y, V_y des ouverts de X tels que $x \in U_y$, $y \in V_y$ et $U_y \cap V_y = \emptyset$. Alors $y \in V_y \subset X \setminus U_y \subset X \setminus \{x\}$. Donc $X \setminus \{x\} = \cup_{y \neq x} V_y$ est un ouvert de X, et $\{x\}$ est un fermé de X. □

La preuve du résultat suivant est un exercice immédiat.

Proposition A.15. Soit X un espace topologique. Alors $\emptyset$ et X sont des fermés de X. Une réunion finie et une intersection quelconque de fermés est fermée.

Si l'on connait tous les fermés d'une topologie, on connait les ouverts et donc on connait la topologie de l'espace.

Exemple A.16. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$, auquel on adjoint $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur $\mathbb{R}$, que l'on appelle la topologie de Zariski sur $\mathbb{R}$. Muni de la topologie de Zariski, $\mathbb{R}$ est un espace topologique non séparé, mais dans lequel les points sont fermés.

Proposition-Définition A.17. Soient X un espace topologique et A une partie de X.

1. Il existe un plus grand sous-ensemble ouvert de X contenu dans A, que l'on appelle **intérieur** de A, et que l'on note $\overset{\circ}{A}$.
2. Il existe un plus petit sous-ensemble fermé de X contenant A, que l'on note $\overline{A}$, et que l'on appelle **adhérence** de A dans X. Un point de X est dit adhérent à A s'il appartient à l'adhérence de A.

Preuve. Soit $\overset{\circ}{A}$ la réunion de tous les ouverts de X contenus dans A, c'est un ouvert de X, contenu dans A, et contenant tous les ouverts contenus dans A, c'est donc le plus grand ouvert de X contenu dans A.

Soit $\overline{A}$ l'intersection de tous les fermés de X contenant A : c'est un fermé de X contenant A, et il est contenu dans tous les fermés de X contenant A, c'est donc le plus petit fermé de X contenant A. □

Remarque A.18. A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$, A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exemple A.19. Soient (X, d) est un espace métrique, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors on a

$$\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \overline{B}(x,\varepsilon)$$

et cette inclusion est stricte en général.

En effet : On a $B(x,\varepsilon) \subset \overline{B}(x,\varepsilon)$ et $\overline{B}(x,\varepsilon)$ est fermé, donc $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \overline{B}(x,\varepsilon)$.

Soit maintenant X un ensemble muni de la distance définie par $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$, 0 sinon. Alors pour tout x on a $\overline{B}(x, \frac{1}{2}) = \{x\} = B(x,1)$, $\quad \overline{B}(x,1) = X$ ce qui montre que $\overline{B(x,1)} = \{x\} \subsetneqq \overline{B}(x,1) = X$ si X a au moins deux éléments. □

Proposition A.20. Soient X un espace topologique et A une partie de X. On a

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}, \quad X \overset{\circ}{\setminus} A = X \setminus \overline{A}$$

Preuve. On a $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc $X \setminus A \subset X \setminus \overset{\circ}{A}$, qui est fermé, donc $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus \overset{\circ}{A}$. Si F est un fermé tel que $X \setminus A \subset F$, alors $X \setminus F \subset A$ avec $X \setminus F$ ouvert, d'où $X \setminus F \subset \overset{\circ}{A}$ et $X \setminus \overset{\circ}{A} \subset F$. Pour $F = \overline{X \setminus A}$, on obtient donc $X \setminus \overset{\circ}{A} \subset \overline{X \setminus A}$, et on a l'égalité voulue.

Posons $B = X \setminus A$. On a $\overline{X \setminus B} = X \setminus \overset{\circ}{B}$, d'où $X \setminus (\overline{X \setminus B}) = \overset{\circ}{B}$, c'est-à-dire $X \setminus \overline{A} = X \overset{\circ}{\setminus} A$. □

A.3 Voisinages

Définition A.21. *Soient X un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un* ***voisinage*** *de X s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $U \subset V$.*

Proposition A.22. Soient X un espace topologique et A une partie de X.

1. Soit $x \in X$. Alors A est un voisinage de x si et seulement si $x \in \overset{\circ}{A}$.
2. A est ouvert si est seulement si A est voisinage de chacun de ses points.
3. Soit $x \in X$. Alors $x \in \overline{A} \iff$ [pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$] $\iff$ [pour tout ouvert U de X contenant x, on a $U \cap A \neq \emptyset$].

Preuve. 1. Supposons que A est un voisinage de x. Soit alors U un ouvert tel que $x \in U \subset A$. On a alors $U \subset \overset{\circ}{A}$, d'où $x \in \overset{\circ}{A}$. Réciproquement, si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenant x et contenu dans A.
2. Si A est ouvert, on a $\overset{\circ}{A} = A$ et donc pour tout $x \in A$, A est un voisinage de x par (1). Réciproquement, si A est voisinage de chacun de ses points, on a $x \in \overset{\circ}{A}$ pour tout $x \in A$ (par (1)) donc $A = \overset{\circ}{A}$ est ouvert.
3. Soit $x \in \overline{A}$, et soit V un voisinage de x. Soit U un ouvert de X tel que $x \in U \subset V$. Supposons que $A \cap U = \emptyset$. Alors $A \subset (X \setminus U)$ et comme $X \setminus U$ est fermé, on a $\overline{A} \subset (X \setminus U)$, donc $\overline{A} \cap U = \emptyset$, ce qui contredit que $x \in \overline{A} \cap U$. Donc comme $A \cap U \subset A \cap V$, on a $A \cap V \neq \emptyset$. Réciproquement, supposons que $x \notin \overline{A}$: $x \in X \setminus \overline{A}$, qui est un ouvert de X et donc un voisinage ouvert de x, et on a $(X \setminus \overline{A}) \cap A \subset (X \setminus A) \cap A = \emptyset$. On a donc l'équivalence des deux première assertions, et on voit facilement que la troisième est équivalente à la deuxième. □

Exemple A.23. Soit E un espace vectoriel normé. Alors pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon >$, on a $\overline{B(x,\varepsilon)} = \overline{B}(x,\varepsilon)$.

En effet : On a déjà vu l'inclusion $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \overline{B}(x,\varepsilon)$. Soit $y \in \overline{B}(x,\varepsilon)$. Si $d(x,y) < \varepsilon$ alors $y \in B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,\varepsilon)}$. Supposons que $d(x,y) = \varepsilon$, et montrons que pour tout $\alpha > 0$, on a $B(y,\alpha) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$. Comme tout voisinage de y contient une boule ouverte centrée en y, la proposition précédente montrera que $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$ et on pourra conclure.

Posons $\lambda = \min(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2\varepsilon})$ et soit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $\| x - z \| = (1-\lambda) \| x - y \| = (1-\lambda)\varepsilon < \varepsilon$ et $\| y - z \| = \lambda \| x - y \| = \lambda\varepsilon < \alpha$, ce qui assure que $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\alpha)$. $\square$

Exemple A.24. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A est majorée alors $\sup(A) \in \overline{A}$, et si A est minorée, alors $\inf(A) \in A$ (exercice, vérifier).

Définition A.25. *Soient X un espace topologique et A une partie de X. On dit que A est* ***dense dans*** *X lorsque $\overline{A} = X$.*

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la première proposition du paragraphe.

Proposition A.26. Soient X un espace topologique et A une partie de X. Alors A est dense dans X si et seulement si pour tout ouvert non vide U de X, on a $U \cap A \neq \emptyset$.

Exemple A.27. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

B Topologie induite, sous-espaces topologiques

Proposition-Définition B.1. Soient $X = (X, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de X. Les ensemble de la forme $U \cap A$, $U \in \mathcal{O}$, forment une topologie sur A, appelée la **topologie induite** sur A (par X).
Un **sous-espace topologique** de X est un sous-ensemble de X, muni de la topologie induite

Preuve. On a $X \cap A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$. De plus si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X, on a

$$\cup_{i\in I}(U_i \cap A) = (\cup_{i\in I} U_i) \cap A \quad \text{et} \quad \cap_{i\in I}(U_i \cap A) = (\cap_{i\in I} U_i) \cap A$$

ce qui montre que l'on a bien défini une topologie sur A. $\square$

Exemple B.2. Si X est un partie de $\mathbb{R}^n$, on munit toujours X, sauf mention du contraire, de la topologie induite par n'importe quelle norme de $\mathbb{R}^n$.

Proposition B.3. Soient X un espace topologique et A un sous-espace (topologique). Les fermés de A sont les ensembles $F \cap A$ avec F fermé dans X.

Preuve. Soit F un fermé de X : $X \setminus F$ est ouvert dans X, donc $(X \setminus F) \cap A$ est ouvert dans A, donc $A \setminus ((X \setminus F) \cap A) = F \cap A$ est fermé dans A. Réciproquement, soit K un fermé de A : $A \setminus K$ est ouvert dans A donc il existe un ouvert U de X tel que $A \setminus K = U \cap A$. Mais alors $K = A \setminus (U \cap A) = (X \setminus U) \cap A$ avec $F = X \setminus U$ fermé de X. □

Remarque B.4. Si A est un ouvert de l'espace topologique X, les ouverts de A pour la topologie induite sont les ouverts de X contenus dans A. De même si A est un fermé de X, les fermés de A (pour la topologie induite) sont les fermés de X contenus dans A.

Proposition B.5. Soient X un espace topologique, A un sous-espace et $a \in A$. Les voisinages de a dans A sont les $V \cap A$, où V parcourt l'ensemble des voisinages de a (dans X).

Preuve. Soit V est un voisinage de a dans X : il existe un ouvert U de X tel que $a \in U \subset V$. Alors $U \cap A$ est un ouvert de A tel que $a \in U \cap A \subset V \cap A$ et donc $V \cap A$ est un voisinage de a dans A. Réciproquement soit W un voisinage de a dans A, et soit U un ouvert de A tel que $a \in U \subset W$. On a $U = U' \cap A$ pour un ouvert U' de X. Posons $V = U' \cup W$, c'est un voisinage de a dans X car il contient U' et on a $V \cap A = W$. □

Proposition B.6. Si X est un espace topologique séparé, tout sous-espace $A \subset X$ est séparé.

Preuve. Soient $a, a' \in A$, $a \neq a'$ et soient U, U' des ouverts de X tels que $a \in U$, $a' \in U'$ et $U \cap U' = \emptyset$. On a $a \in U \cap A$, $a' \in U' \cap A$ et $(U \cap A) \cap (U' \cap A) = \emptyset$. □

C Applications continues

Les applications continues sont les outils qui permettent de comparer les espaces topologiques.

C.1 Continuité

Définition C.1. *Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.*

1. *On dit que f est **continue** si pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.*
2. *On dit que f est **continue en** $x \in X$ si pour tout voisinage V de $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.*

Exemples C.2. L'application identité $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ d'un espace topologique est continue. Toute application constante est continue.

Exemple C.3. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espace métriques et $f : X \to Y$. Soit $x \in X$. Alors f est continue en x si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $f(B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

La continuité en un point peut aussi s'exprimer de la manière suivante.

Proposition C.4. Soient X et Y des espace topologiques et $f : X \to Y$. Soit $x \in X$. Alors f est continue en x si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$.

Preuve. Supposons f continue en x et soit V un voisinage de $f(x)$. Comme $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x, il existe un ouvert de X tel que $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Comme U est ouvert c'est un voisinage de x et $f(U) \subset V$.

Réciproquement, supposons la propriété indiquée vraie et soit V un voisinage de $f(x)$. Il existe alors un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$, d'où $U \subset f^{-1}(V)$ avec U voisinage de x, et $f^{-1}(V)$ est donc un voisinage de x. $\square$

Proposition C.5. Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est continue.
2. f est continue en tout point $x \in X$.
3. Pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons f continue. Soit V un voisinage de $f(x)$: il existe U ouvert de Y tel que $f(x) \in U \subset V$. Comme f est continue, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X avec $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$, donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x et f est continue en x.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supposons f continue en chaque point. Soit U un ouvert de Y et soit $x \in f^{-1}(U)$. Alors $f(x) \in U$ et U est un voisinage de $f(x)$, donc par continuité en x, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x. Donc $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points, et est un ouvert de X. Ainsi f est continue.

L'équivalence entre (1) et (3) provient du fait que pour toute partie A de Y, on a $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. $\square$

Exemple C.6. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espace métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que $\forall x, y \in X$, on a $d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$. Une application lipschitzienne est continue car $\forall x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $f(B(x, k^{-1}\varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ (pour le k précédent).

On rappelle le résultat important suivant, qui caractérise la continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés.

Théorème C.7. Soient E, F des espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est continue si et seulement si il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \ \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

Si f est continue, on pose alors

$$\|f\| = \sup\left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\}\right) = \sup\left(\|f(x)\|, x \in E, \ \|x\| \leq 1\right)$$

Cette formule définit un norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des applications linéaire continues de E dans F.
Si E est de dimension finie, toute application linéaire $E \to F$ est continue.

Proposition C.8. Soient X, Y et Z des espaces topologiques, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications.

1. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.
2. Pour tout $x \in X$, si f est continue en x et g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x.

Preuve. Si W est un ouvert de Z, on a $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ ce qui montre que $g \circ f$ est continue si g et f le sont. Si W est un voisinage de $g(f(x))$, alors si g est continue en $f(x)$, $g^{-1}(W)$ est un voisinage de $f(x)$ et si de plus f est continue en x alors $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ est un voisinage de x. □

C.2 Continuité et sous-espaces topologiques

Proposition C.9. Soient X un espace topologique et A une partie de X, que l'on munit de la topologie induite de X.

1. L'injection canonique $i : A \hookrightarrow X$ est continue.
   Soit $f : X \to Y$, où Y est un espace topologique, et soit $a \in A$.
2. Si f est continue, alors $f_{|A} : A \to Y$ est continue.
3. Si f est continue en a, alors $f_{|A}$ est continue en a.
4. Si A est un voisinage de a, alors f est continue en a si et seulement si $f_{|A}$ est continue en a.

Preuve. 1. Si U est un ouvert de X, on a $i^{-1}(U) = U \cap A$ qui est un ouvert de X, donc f est continue. 2. On a $f_{|A} = f \circ i$, donc $f_{|A}$ est continue si f l'est. La preuve de l'assertion 3 est identique. 4. Supposons $f_{|A} : A \to Y$ continue en a et soit V un voisinage de $f(a)$. Il existe alors U un voisinage de a dans A tel que $f(U) \subset V$. Mais alors $U = U' \cap A$ pour U' voisinage de a dans X. A étant un voisinage de a dans X, $U' \cap A$ est un voisinage de a dans X avec $f(U' \cap A) = f(U) \subset V$, donc f est continue en a.
□

La continuité en un point est donc une propriété locale.

Corollaire C.10. Soient X, Y des espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application. Soit (U_i) une famille d'ouverts de X tels que $X = \cup_{i \in I} U_i$. Alors f est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_{|U_i}$ est continue.

Proposition C.11. Soient X, Y des espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue. On munit $f(X)$ de la topologie induite par celle de Y. Alors l'application induite $f : X \to f(X)$ est continue.

Preuve. Soit U un ouvert de $f(X)$: il existe un ouvert V de Y tel que $U = V \cap f(X)$. Alors $f^{-1}(U) = f^{-1}(f(X) \cap V) = f^{-1}(V)$ est ouvert dans X, d'où le résultat. □

Le résultat suivant est souvent utile pour montrer que deux applications continues coïncident.

Proposition C.12. (Prolongement des identités). Soient X, Y des espaces topologiques avec Y séparé et $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Soit $A \subset X$. Si $f_{|A} = g_{|A}$, alors $f_{|\overline{A}} = g_{|\overline{A}}$.

Preuve. Soit $x \in \overline{A}$. Supposons que $f(x) \neq g(x)$. Soient U, V des ouverts de Y avec $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ et $U \cap V = \emptyset$ (Y est séparé). Alors $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$, qui est un ouvert. Comme $x \in \overline{A}$, on a $A \cap f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \neq \emptyset$. Soit $a \in A \cap f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. On a $f(a) = g(a) \in U \cap V$: contradiction. Donc $f(x) = g(x), \forall x \in \overline{A}$. □

C.3 Homéomorphismes

Définition C.13. *Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est un **homéomorphisme** si f est bijective, continue et si la bijection inverse $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ est continue. On dit que les espaces topologiques X et Y sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de X dans Y.*

Définition C.14. *Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est **ouverte** (respectivement **fermée**) si pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert de Y (respectivement pour tout fermé F de X, $f(F)$ est un fermé de Y).*

La caractérisation suivante des homéomorphismes est un exercice immédiat.

Proposition C.15. Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. f est un homéomorphisme.
2. f est bijective, continue et ouverte.
3. f est bijective, continue et fermée.

Le résultat suivant est lui-aussi de démonstration immédiate.

Proposition C.16. L'identité d'un espace topologique est un homéomorphisme, la composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme, et la bijection inverse d'un homéomorphisme est un homéomorphisme.

En particulier, si X est un espace topologique, l'ensemble des homéomorphismes des X, noté $\mathrm{Homeo}(X)$, est un sous-groupe du groupe des bijections de X dans lui-même.

Remarque C.17. Une bijection continue n'est pas nécessairement un homéomorphisme. Par exemple, soit X un ensemble et notons X_d l'ensemble X muni de la topologie discrète et X_g l'ensemble X muni de la topologie grossière. Alors $\mathrm{id}_X : X_d \to X_g$ est continue, mais $\mathrm{id}_X : X_g \to X_d$ n'est pas continue si X a au moins deux éléments.

Exemple C.18. Tout espace vectoriel normé E de dimension finie est (linéairement) homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim(E)$). Cela provient du théorème d'équivalence des normes pour les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Exemple C.19. Si E est un espace vectoriel normé, pour tout $x \in E$, l'application $E \to E$, $y \mapsto y + x$, est un homémorphisme. De même pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'application $E \to E$, $y \mapsto \lambda y$ est un homéomorphisme. Ainsi, toutes les boules ouvertes de E sont homéomorphes.

Exemple C.20. L'application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $s \mapsto \frac{s}{1-|s|}$, est un homéomorphisme, l'homéomorphisme inverse étant donné par $g : \mathbb{R} \to]-1,1[$, $t \mapsto \frac{t}{1+|t|}$.

Exemple C.21. Soient $X = [0,1]$ et $Y = [0,1[\cup \{2\}$ munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Soit $f : Y \to X$ définie par $f(t) = t$ si $t \in [0,1[$ et $f(2) = 1$. Alors f est continue est bijective (vérifier). Mais la bijection réciproque $f^{-1} : X \to Y$ n'est pas continue car elle n'est pas continue en 1, vu que $\{2\} =]1,3[\cap Y$ est ouvert dans Y alors que $f(\{2\}) = \{1\}$ n'est pas ouvert dans X.

En fait les espaces X et Y ne sont pas homéomorphes, le plus simple pour le montrer étant un argument de connexité (ou encore le théorème des valeurs intermédiaires).

Le but principal de la topologie est de classifier les espaces topologiques à homéomorphisme près. C'est une tâche extrèmement ardue, qui n'est pas considérée comme réellement réalisable. On cherche plutôt à classifier certaines classes d'espaces topologiques "raisonnables" (comme les variétés topologiques). Il y a bien sûr deux aspects de la question.

• Montrer que divers espaces sont homéomorphes. Pour cela les espaces topologiques quotients, que nous étudierons au chapitre 6, seront très utiles.

• Montrer que des espaces ne sont pas homéomorphes. Pour cela on doit mettre en évidence des "propriétés topologiques" (c'est-à-dire des propriétés $\mathcal{P}$ telles que si X et Y sont des espaces topologiques homéomorphes et si X a la propriété $\mathcal{P}$, alors Y a aussi la propriété $\mathcal{P}$). C'est le cas par exemple de la propriété d'être séparé, ou encore de la connexité (voir le chapitre 5).

D Suites

Définition D.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace topologique X. On dit que (x_n)* ***converge vers*** *$x \in X$ si pour tout ouvert U de X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on a $x_n \in U$. On dit alors que x est une limite de la suite (x_n).*

Exemple D.2. Dans un espace métrique (X, d), une suite (x_n) converge vers $x \in X$ si et seulement si la suite $(d(x, x_n))$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition D.3. Dans un espace topologique séparé, toute suite admet au plus une limite.

Preuve. Soit (x_n) une suite d'un espace topologique séparé X. Supposons que $l, l' \in X$ sont des limites de (x_n) avec $l \neq l'$. Soient U, U' des ouverts de X tels que $l \in U$, $l' \in U'$ et $U \cap U' = \emptyset$. Il existe N_1, N_2 tels que $n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in U$ et $n \geq N_2 \Rightarrow x_n \in U'$. Donc pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$, on a $u_n \in U \cap U'$, ce qui contredit $U \cap U' = \emptyset$, donc $l = l'$. □

Les suites déterminent essentiellement la topologie dans le cas des espaces métriques. Ce n'est plus le cas dans les espaces topologiques généraux, mais elles jouent tout de même un rôle important.

Proposition D.4. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Si f est continue en $x \in X$, alors pour toute suite (x_n) de points de X qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Preuve. Soit U un ouvert contenant $f(x)$: $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x. Soit donc V un ouvert de X tel que $x \in V \subset f^{-1}(U)$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in V$. Alors si $n \geq N$ on a $f(x_n) \in f(V) \subset U$. Donc $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. $\square$

Proposition D.5. Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Pour $x \in X$, on a $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe un suite de points de A qui converge vers x

Preuve. Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, soit donc $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. On a $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$, donc (a_n) converge vers x. Réciproquement supposons qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x. Soit U un ouvert de X contenant x. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N \in U$, donc $U \cap A \neq \emptyset$ et finalement $x \in \overline{A}$. $\square$

Proposition D.6. Soient X, Y des espaces topologiques avec X espace métrique, $f : X \to Y$ une application et $x \in X$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est continue en x.
2. Pour toute suite (x_n) de points de X qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$ a été vu dans le cadre général des espaces topologiques. Supposons que f n'est pas continue en x, il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x, c'est-à-dire $x \in X \setminus \overset{\circ}{f^{-1}(V)} = \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$. Soit donc (x_n) une suite de points de $X \setminus f^{-1}(V)$ qui converge vers x. On a donc $f(x_n) \notin V$ pour tout n, et donc $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$. $\square$

II Le théorème de Hahn-Banach

Dans ce chapitre on montre un résultat important : le théorème de Hahn-Banach, qui assure qu'un espace vectoriel normé possède "suffisament de formes linéaires continues".

Rappelons que si E et F sont des espaces normés, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues est naturellement un espace normé, pour la norme

$$\|f\| = \sup\left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\}\right) = \sup\left(\|f(x)\|, x \in E,\ \|x\| \leq 1\right)$$

En particulier, $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé, appelé le dual topologique de E, et noté E'.

A Forme analytique du théorème de Hahn-Banach : énoncé et conséquences.

L'énoncé le plus connu et le plus utile du théorème de Hahn-Banach est le suivant.

Théorème A.1. (Théorème de Hahn-Banach) Soit E un espace vectoriel normé, soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors pour toute forme linéaire continue $g \in G'$, il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\|f\| = \|g\|$.

Le théorème de Hahn-Banach est donc un théorème de prolongement. Voici quelques conséquences directes.

Corollaire A.2. Soit E un espace vectoriel normé et $x \in E$. Il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| \leq 1$.

Preuve. Soit $G = \mathbb{R}x$ et soit $g \in G'$ la forme linéaire définie par $g(\lambda x) = \lambda\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $y = \lambda x$ de G, on a $|g(y)| = \|y\|$ donc $\|g\| \leq 1$. Soit $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\|f\| = \|g\|$ (théorème de Hahn-Banach) : f vérifie les conditions demandées. □

Corollaire A.3. Soit E un espace vectoriel normé. Alors l'application

$$\begin{aligned} i : E &\longrightarrow E'' = (E')' \\ x &\longmapsto e_x,\ e_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

est une isométrie.

Preuve. Tout d'abord notons que pour tout $x \in E$, on a $e_x \in (E')'$ car $|e_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ pour tout $f \in E'$, et de plus $\|e_x\| \leq \|x\|$. Soit $x \in E$ et soit $f_0 \in E'$ telle que $f_0(x) = \|x\|$ et $\|f_0\| \leq 1$ (corollaire précédent). Alors $e_x(f_0) = \|x\|$, ce qui montre que $\|e_x\| \geq \|x\|$ et donc $\|e_x\| = \|x\|$. □

Remarque A.4. Il existe des énoncés similaires pour les espaces vectoriels normés complexes.

Le théorème de Hahn-Banach est en fait conséquence d'un énoncé plus général et un peu plus technique aussi appelé théorème de Hahn-Banach, qui présente l'avantage de ne pas utiliser de norme sur l'espace vectoriel.

Théorème A.5. (Théorème de Hahn-Banach, énoncé technique). Soit E un espace vectoriel, soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Supposons donnée une application $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda > 0,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad g(x) \leq p(x)$$

Alors il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g et telle que $\forall x \in E$, $f(x) \leq p(x)$.

Le premier énoncé est une conséquence directe de celui-ci.

Preuve du premier énoncé du théorème de Hahh-Banach à partir de l'énoncé technique. Soit G un sev d'un evn E et soit $g \in G'$. Soit p définie par $p(x) = \|g\|\|x\|$. Les conditions du théorème technique sont satisfaites : soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire qui prolonge g et telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$. Comme ici $p(x) = p(-x) \geq 0$ pour tout x, on a $|f(x)| \leq p(x) = \|g\|\|x\|$, on a $f \in E'$ avec $\|f\| \leq \|g\|$, et comme f prolonge g, on a aussi $\|g\| \leq \|f\|$, d'où le résultat. □

B Démonstration du théorème de Hahn-Banach

B.1 Le lemme de Zorn

Rappelons qu'un **ensemble ordonné** est une paire $(E, \leq)$ où E est un ensemble et où $\leq$ est une relation sur E vérifiant, $\forall x, y, z \in E$,

1. $x \leq x$ (réflexivité)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$ (symétrie)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitivité)

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit **totalement ordonné** si $\forall x, y \in E$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Un **élément maximal** d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est un élément $x \in E$ tel que $\forall y \in E$, $x \leq y \Rightarrow x = y$.

Une partie A d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dite **majorée** s'il existe $x \in E$ tel que $a \leq x, \forall a \in A$.

Définition B.1. *Un **ensemble ordonné inductif** est un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide totalement ordonnée a un majorant.*

Le résultat suivant est fondamental pour démontrer des résultats d'existence, dans toutes les branches des mathématiques. Il est admis.

Théorème B.2. Lemme de Zorn. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné inductif non vide. Il existe un élément maximal dans E.

B.2 Preuve du théorème de Hahn-Banach

Soit donc E un espace vectoriel, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel, $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant les hypothèses du théorème.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (H, h) où H est un sev de E contenant G et h est une forme linéaire qui prolonge g et telle que $h(x) \leq p(x)$, $\forall x \in H$. On munit $\mathcal{E}$ de la relation définie par $(H, h) \leq (H', h') \iff H \subset H'$ et $h'_{|H} = h$. C'est une relation d'ordre et ainsi $(\mathcal{E}, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Vérifions que $(\mathcal{E}, \leq)$ est un ensemble ordonné inductif non vide. On a $(g, G) \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est non vide. Soit $(H_i, h_i)_{i \in I}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$. Posons alors $H = \cup_{i \in I} H_i$: c'est un sev de E car la partie est totalement ordonnée. De plus on peut définir une application $h : H \to \mathbb{R}$ par $h(x) = h_i(x)$ si $x \in H_i$ (l'application est bien définie car notre partie est totalement ordonnée), qui est linéaire et telle que $\forall x \in H$, $h(x) \leq p(x)$. Alors $(H, h) \in \mathcal{E}$ et il est clair que (H, h) est un majorant de $(H_i, h_i)_{i \in I}$, et donc $(\mathcal{E}, \leq)$ est un ensemble ordonné inductif non vide. Il existe donc par le lemme de Zorn il un élément maximal que l'on note (D, f).

Montrons que $D = E$, ce qui montrera le théorème. Supposons au contraire que $D \subsetneqq E$ et soit $x_0 \in E \setminus D$. Soit $H = D + \mathbb{R}x_0$. On a $D \cap \mathbb{R}x_0 = \{0\}$, donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut définir une forme linéaire $h_\alpha : H \to \mathbb{R}$ par $h_\alpha(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$, $\forall x \in D$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $(H, h_\alpha) \in \mathcal{E}$, on doit donc choisir α de telle sorte que

$$\forall x \in D, \forall t \in \mathbb{R},\ h_\alpha(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$$

Grâce à la propriété $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$, on voit (en divisant par $|t|$ si $t \neq 0$) qu'il suffit de trouver α tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \text{ et } f(x) - \alpha \leq p(x - x_0)$$

et donc il faut choisir α tel que

$$\sup_{y \in D} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D} (p(x + x_0) - f(x))\ (\star)$$

Pour $x, y \in D$ on a

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

d'où

$$\forall x, y \in D,\ f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x)$$

On peut donc trouver α vérifiant $(\star)$, et pour un tel α, (H, h_α) est un élément de $\mathcal{E}$ qui majore strictement l'élément maximal (D, f). Contradiction. $\square$

C Formes géométriques du théorème de Hahn-Banach

C.1 Vocabulaire

Dans la suite E est un espace vectoriel normé.

Définition C.1. *Un* ***hyperplan (affine)*** *de E est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$$

pour une forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition C.2. Un hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé dans E si et seulement si la forme linéaire f est continue.

Preuve. On a $[f = \alpha] = f^{-1}(\{\alpha\})$, donc l'hyperplan est fermé si f est continue. La réciproque est un peu moins immédiate, nous ne l'utiliserons pas dans la suite et nous ne la démontrons pas. □

Définition C.3. *Soit $H = [f = \alpha]$ un hyperplan. Les* ***demi-espaces*** *associés à H sont*

$$[f \leq \alpha] = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad [f \geq \alpha] = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$$

On a $E = [f \leq \alpha] \cup [f \geq \alpha]$ et $H = [f \leq \alpha] \cap [f \geq \alpha]$.

Définition C.4. *Soient A et B des parties de E. On dit qu'un hyperplan $H = [f = \alpha]$* ***sépare*** *A* ***et*** *B* ***au sens large*** *si on a*

$$A \subset [f \leq \alpha] \quad \text{et} \quad B \subset [f \geq \alpha]$$

On dit que $H = [f = \alpha]$ ***sépare*** *A* ***et*** *B* ***au sens strict*** *s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$A \subset [f \leq \alpha - \varepsilon] \quad \text{et} \quad B \subset [f \geq \alpha + \varepsilon]$$

Définition C.5. *Une partie C de E est dite* ***convexe*** *si $\forall x, y \in C$, on a $[x, y] \subset C$, c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in C,\ \forall t \in [0, 1],\ tx + (1 - t)y \in C$$

Proposition C.6. Soit C une partie convexe de E.

1. $\overline{C}$ est convexe.
2. Pour $a \in \overset{\circ}{C}$ et $b \in \overline{C}$, on a $[a, b[= \{ta + (1 - t)b,\ t \in [0, 1[\} \subset \overset{\circ}{C}$.

Preuve. Le premier point est laissé en exercice. Soient $a \in \overset{\circ}{C}$, $b \in \overline{C}$, $t \in]0, 1[$ et $c = tb + (1 - t)a$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a + B(0, \varepsilon) = B(a, \varepsilon) \subset C$. Par convexité de C, pour tout $d \in C$, on a

$$\begin{aligned} C &\supset td + (1 - t)(a + B(0, \varepsilon)) \\ &= t(d - b) + tb + (1 - t)(a + B(0, \varepsilon)) \\ &= [t(d - b) + (1 - t)B(0, \varepsilon)] + c \end{aligned}$$

Posons $\eta = t^{-1}(1 - t)\varepsilon$. Comme $b \in \overline{C}$, il existe $d \in C \cap B(b, \eta)$. On a donc $0 \in B(d - b, \eta) = B(d - b, t^{-1}(1 - t)\varepsilon)$ donc $0 \in B(t(d - b), (1 - t)\varepsilon) = t(d - b) + (1 - t)B(0, \varepsilon)$. Soit maintenant $\alpha > 0$ tel que $B(0, \alpha) \subset B(t(d - b), (1 - t)\varepsilon)$. On a $B(c, \alpha) = c + B(0, \alpha) \subset c + B(t(d - b), (1 - t)\varepsilon) \subset C$, donc $c \in \overset{\circ}{C}$. □

C.2 Enoncés

Les versions géométriques du théorème de Hahn-Banach sont des résultats de séparation de parties convexes disjointes.

Théorème C.7. (**Hahn-Banach, première forme géométrique**) Soit E un espace vectoriel normé et soient $A, B \subset E$ des parties convexes non vides et disjointes. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Pour la deuxième forme, rappelons qu'un espace métrique X est dit compact si toute suite de points de X admet une valeur d'adhérence (cela peut s'exprimer en termes de recouvrements par des ouverts, on reviendra sur la compacité au chapitre 4).

Théorème C.8. (**Hahn-Banach, deuxième forme géométrique**) Soit E un espace vectoriel normé et soient $A, B \subset E$ des parties convexes non vides, et disjointes. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Un corollaire très utile est le résultat suivant.

Corollaire C.9. Soit $F \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé E. Alors il existe $f \in E'$ non nulle telle que $f_{|F} = 0$.

Remarque C.10. On peut aussi montrer ce corollaire à partir de la version analytique du théorème de Hahn-Banach, en utilisant la notion d'espace vectoriel normé quotient.

C.3 Démonstrations

On commence par démontrer deux lemmes.

Lemme C.11. Soit C un convexe de E avec $0 \in \overset{\circ}{C}$. Pour $x \in E$, on pose

$$p(x) = \inf\Big(\alpha > 0,\ \alpha^{-1}x \in C\Big)$$

Alors on a

1. $\forall x, y \in E, \forall \lambda > 0,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$,
2. $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in E,\ p(x) \leq M\|x\|$,
3. $\overset{\circ}{C} = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ et si de plus $\overline{C}$ est compact , $\overline{C} = \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$

De plus $p : E \to \mathbb{R}$ est continue. On dit que p est la **jauge du convexe** C.

Preuve. Soit $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. On a $(\frac{2}{r}\|x\|)^{-1}x \in C$ car $\|(\frac{2}{r}\|x\|)^{-1}x\| = r/2 < r$ d'où $p(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|$, ce qui montre (2).

Il est clair que $C \subset \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$. Montrons la première égalité dans (3). Soit $x \in \overset{\circ}{C}$. Si $x = 0$ on a $p(0) = 0$, supposons donc $x \neq 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset C$ et pour ε tel que $\varepsilon < \frac{\alpha}{\|x\|}$, on a $x+\varepsilon x \in B(x,\alpha) \subset C$. Donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Réciproquement si $p(x) < 1$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\alpha^{-1}x \in C$, et on a $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in [0, \alpha^{-1}x[\subset \overset{\circ}{C}$ (proposition C.6).

Montrons (1). La deuxième propriété est immédiate. Soient $x, y \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $p(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}) = \frac{1}{p(x)+\varepsilon}p(x) < 1$ donc $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in \overset{\circ}{C}$ et $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in \overset{\circ}{C}$ par (3). Ainsi pour tout $t \in [0,1]$ on a $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Cela s'applique à $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ et on obtient $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$. Donc $p(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}) = \frac{1}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}p(x+y) \leq 1$ et $p(x+y) \leq p(x)+p(y)+2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

On en déduit donc que p est continue car $p(x) - p(y) \leq p(x-y) \leq M\|x-y\|$ $\forall x, y \in E$.

On a $C \subset \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$, et cet ensemble est fermé par continuité de p, donc $\overline{C} \subset \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$. Supposons maintenant $\overline{C}$ compact. Si $x \in E$ vérifie $p(x) = 1$, il existe une suite de réels $\alpha_n > 0$ qui converge vers 1 et tels que $\forall n$, $\alpha_n^{-1}x \in C$. Par compacité de $\overline{C}$, il existe une suite extraite de $(\alpha_n^{-1}x)$ qui converge dans $\overline{C}$, nécessairement vers x, d'où $x \in \overline{C}$ et $\{x \in E \mid p(x) \leq 1\} \subset \overline{C}$. On obtient donc l'égalité voulue. □

Lemme C.12. Soit C un convexe ouvert non vide de E et soit $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $\forall x \in C$, $f(x) < f(x_0)$. En particulier l'hyperplan (fermé) d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Preuve. Supposons dans premier temps que $0 \in C$, et soit p l'application précédente. Soit $g : G = \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $g(tx_0) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ($x_0 \neq 0$ car $x_0 \notin C$). Comme $x_0 \notin C$, on a $p(x_0) \geq 1$ (lemme précédent) donc pour $t > 0$ on a $g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$, et on en déduit que $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. Le lemme précédent nous autorise à appliquer l'énoncé technique du théorème de Hahn-Banach : il existe f une forme linéaire sur E qui prolonge g et telle que $\forall x \in E$, $f(x) \leq p(x)$. En particulier $f(x_0) = 1$ et f est continue grâce au (2) du lemme précédent. Enfin $f(x) < 1 = f(x_0)$ pour tout $x \in C$, toujours par le lemme précédent. Donc $C \subset [f \leq 1 = f(x_0)]$ et $\{x_0\} \subset [f \geq 1 = f(x_0)]$.

Si $0 \notin C$, on prend $y \in E$ tel que $0 \in C + y$, on applique le résultat précédent au convexe ouvert $C + y$ et à $x_0 + y$: il existe $f \in E'$ telle que $f(x+y) < f(x_0+y)$ pour tout $x \in C$, d'où $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$. □

Preuve de la première forme géométrique du théorème de Hahn-Banach. Soit E un espace vectoriel normé et soient $A, B \subset E$ des parties convexes non vides et disjointes, avec A ouvert. On pose $C = A - B = \{a - b,\ a \in A,\ b \in B\}$. On voit facilement que C est convexe. De plus pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto y - x$ est un homéomorphisme de E dans E, donc chaque $A - x$ est ouvert et puisque $C = A - B = \cup_{b \in B}(A - b)$, C est un ouvert de E. On a $0 \notin C$ car $A \cap B = \emptyset$. Par le lemme précédent il existe $f \in E'$ tel que $\forall x \in C$, $f(x) < f(0) = 0$, c'est-à-dire que $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, on a $f(a) < f(b)$. On prend maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{a \in A}(f(a)) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B}(f(b))$, et on a $A \subset [f \leq \alpha]$ et $B \subset [f \geq \alpha]$. □

Preuve de la deuxième forme géométrique du théorème de Hahn-Banach. Soit E un espace vectoriel normé et soient $A, B \subset E$ des parties convexes non vides et disjointes, avec A est fermé et B compact. Posons, pour tout $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$. Alors A_ε et B_ε sont non vides, convexes (vérification facile) et ouverts ($A_\varepsilon = \cup_{a \in A}(a + B(0,\varepsilon))$, et $x \mapsto a + x$ est un homéomorphisme). Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Sinon pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$, $b_n \in B$, $x_n, y_n \in B(0, \frac{1}{n})$ tels que $a_n + x_n = b_n + y_n$. On a $\|a_n - b_n\| = \|x_n - y_n\| \leq \frac{2}{n}$. Soit $(b_{\varphi(n)})$ une suite extraite qui converge vers $b \in B$ (B compact). Alors la suite $(a_{\varphi(n)}) = (a_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)})$ converge vers b, et comme A est fermé on a $b \in A \cap B$: contradiction.

Soit donc $\varepsilon > 0$ tel que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. La première forme géométrique du théorème assure l'existence de $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $A_\varepsilon \subset [f \leq \alpha]$ et $B_\varepsilon \subset [f \geq \alpha]$. On a donc

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \forall z \in B(0,1),\ f(a+\varepsilon z) \leq \alpha,\ f(b+\varepsilon z) \geq \alpha$$

et on en déduit que

$$\forall a \in A, \forall b \in B,\ f(a) \leq \alpha - \varepsilon\|f\|,\ f(b) \geq \alpha + \varepsilon\|f\|$$

avec $\|f\| \neq 0$, ce qui assure que $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict. $\square$

Preuve du corollaire. Soit $F \subsetneq E$ avec F fermé. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin F$. Alors F et $\{x_0\}$ sont des convexes non vides avec F fermé et $\{x_0\}$ compact. Il existe donc $f \in E'$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall x \in F,\ f(x) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha,\ f(x_0) \geq \alpha + \varepsilon > \alpha$$

d'où $\forall x \in F$, $f(x) < \alpha < f(x_0)$, et $f_{|F} = 0$. $\square$

III Topologie engendrée, produits d'espaces topologiques

Dans ce chapitre on décrit une méthode importante pour construire des topologies sur un ensemble. Comme exemple de motivation, on a le produit de deux espaces topologiques. Si X, Y sont des espaces topologiques, on veut construire une topologie sur $X \times Y$ à partir de celles de X et de Y. Une idée naturelle est que les ensembles de la forme $U \times V$ avec U ouvert de X et V ouvert de Y doivent être ouverts dans $X \times Y$. Néanmoins les réunions d'ensemble de ce type ne sont plus de ce type en général (voir dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Il faudra donc considérer la topologie engendrée par cette famille de sous-ensembles...

A Comparaison de topologies

Définition A.1. *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ des topologies sur un ensemble X. On dit que $\mathcal{O}$ est* **moins fine** *que $\mathcal{O}'$ si $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$, c'est-à-dire si tout ouvert pour $\mathcal{O}$ est un ouvert pour $\mathcal{O}'$.*

On dit que $\mathcal{O}$ est **plus fine** *que $\mathcal{O}'$ si $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, c'est-à-dire si $\mathcal{O}'$ est moins fine que $\mathcal{O}$.*

Exemple A.2. La topologie discrète est plus fine que n'importe quelle autre topologie, la topologie grossière est moins fine que toute autre topologie.

Remarque A.3. Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ des topologies sur X. L'application identité $(X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}')$ est continue si et seulement si la topologie $\mathcal{O}'$ est moins fine que la topologie $\mathcal{O}$.

Proposition A.4. Soit X un ensemble et $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille de topologies sur X. Alors l'intersection $\mathcal{O} = \cap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ est une topologie sur X, qui est moins fine que chacune des topologie $\mathcal{O}_i$. De plus toute topologie $\mathcal{T}$ sur X qui est moins fine que toute les topologies $\mathcal{O}_i$ est moins fine que $\mathcal{O}$.

Preuve. Exercice □

Corollaire A.5. Soit X un ensemble et $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. Il existe une topologie $\mathcal{O}$ sur X pour laquelle tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont ouverts et qui est la moins fine parmi les topologies possédant cette propriété. Cette topologie est appelée la **topologie engendrée par** $\mathcal{S}$.

Preuve. Soit T l'ensemble des topologies sur X pour lesquelles les éléments de $\mathcal{S}$ sont ouverts. T est non vide car la topologie discrète vérifie cette condition. Soit alors $\mathcal{O} = \cap_{\mathcal{U} \in T} \mathcal{U}$: c'est une topologie sur X par la proposition précédente, et si $\mathcal{U} \in T$, on a $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$, ce qui montre bien que $\mathcal{O}$ est la topologie la moins fine pour laquelle les éléments de $\mathcal{S}$ sont ouverts. □

Proposition A.6. Soit X un ensemble et $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. Posons

$$\mathcal{B} = \{\text{intersections finies d'elements de } \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{O} = \{\text{reunions d'elements de } \mathcal{B}\} \cup \{\emptyset,\ X\}$$

Alors $\mathcal{O}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{S}$.

Preuve. Montrons que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X. Déjà $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ par définition. Il est clair qu'une réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore un élément de $\mathcal{O}$. Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$: on a $U_1 = \cup_{i\in I} V_i$ et $U_2 = \cup_{j\in J} W_j$ pour des éléments V_i, $i \in I$, W_j, $j \in J$, de $\mathcal{B}$. Alors

$$U_1 \cap U_2 = (\cup_{i\in I} V_i) \cap (\cup_{j\in J} W_j) = \cup_{i\in I, j\in J} V_i \cap W_j \in \mathcal{O}$$

car c'est une réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$, qui est stable par intersections finies par construction. Ainsi $\mathcal{O}$ est une topologie.

Si $\mathcal{O}'$ est une topologie sur X telle que $\forall U \in \mathcal{S}$, $U \in \mathcal{O}'$, alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}'$ (stabilité par intersection finies), et $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ (stabilité par réunions finies). $\square$

Exemples A.7.

1. Si X est un ensemble et $U \subset X$, la topologie sur X engendrée par $\{U\}$ est $\{\emptyset, U, X\}$.
2. Si (X, d) est un espace métrique, la topologie induite par la distance d sur X est la topologie engendrée par les boules ouvertes.

Proposition A.8. Soient X, Y des espace topologiques et $f : X \to Y$ une application. Supposons que la topologie de Y est engendrée par $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$. Alors f est continue si et seulement si $\forall U \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

Preuve. Supposons que $\forall U \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X. Soit $\mathcal{B} = \{\text{intersections finies d'elements de } \mathcal{S}\}$. Pour $U \in \mathcal{B}$, on a $U = \cap_{i=1}^n U_i$ pour $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{S}$. On a $f^{-1}(U) = f^{-1}(\cap_{i=1}^n U_i) = \cap_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$, qui est ouvert dans X (intersection finie d'ouverts). Si maintenant U est ouvert dans Y, on a $U = \cup_{i\in I} U_i$ pour des éléments U_i, $i \in I$ de $\mathcal{B}$. Alors $f^{-1}(U) = f^{-1}(\cup_{i=\in I} U_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ qui est ouvert dans X (réunion d'ouverts). Donc f est continue. L'implication inverse est immédiate. $\square$

B Produit d'espaces topologiques

La construction du paragraphe précédent nous permet de définir le produit de deux espaces topologiques.

Définition-Proposition B.1. Soient $X = (X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques. La **topologie produit sur** $X \times Y$ est la topologie engendrée par les sous-ensembles

$$U \times V, \quad U \in \mathcal{O}_X,\ V \in \mathcal{O}_Y$$

appelés ouverts élémentaires. Muni de cette topologie, on dit $X \times Y$ est **l'espace topologique produit** de X et Y. Une partie de $X \times Y$ est ouverte si et seulement si elle est réunion d'ouverts élémentaires.

Preuve. Soient $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}_X$, $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{O}_Y$. Alors

$$\cap_{i=1}^{n}(U_i \times V_i) = (\cap_{i=1}^{n} U_i) \times (\cap_{i=1}^{n} V_i)$$

Donc une intersection finie d'ouverts élémentaires est encore un ouvert élémentaire. On en déduit (voir l'avant-dernière proposition du paragraphe précédent) que les ouverts de la topologie engendrée par les ouverts élémentaires sont les réunions d'ouverts élémentaires. □

Exemple B.2. (Produit d'espaces métriques et d'espaces normés). Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) des espaces métriques. On définit une distance sur $X_1 \times X_2$ en posant

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2, \quad d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

Alors la topologie induite par la distance d_∞ sur $X_1 \times X_2$ est égale à la topologie produit.

De même, si $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ sont des espaces normés, On définit une norme sur $E_1 \times E_2$ en posant

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad \|((x_1, x_2)\|_\infty = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$$

Alors la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $E_1 \times E_2$ est égale à la topologie produit. Si $E_1 = \mathbb{R} = E_2$, la topologie produit sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est donc la topologie associée à n'importe qu'elle norme sur $\mathbb{R}^2$.

En effet : vérifions que la topologie induite par la distance d_∞ coïncide avec la topologie produit. Soit $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ et $\varepsilon > 0$. On a $B((x_1, x_2), \varepsilon) = B(x_1, \varepsilon) \times B(x_2, \varepsilon)$, ce qui montre qu'une boule ouverte pour la distance d_∞ est un ouvert élémentaire de la topologie produit. Donc si A est un ouvert pour la distance d_∞, alors comme A est une réunion de boules ouvertes, c'est une réunion d'ouverts élémentaires de la topologie produit et c'est donc un ouvert de la topologie produit.

Soit maintenant A un ouvert pour la topologie produit et $(x_1, x_2) \in A$. Il existe alors U_1 un ouvert de X_1 et U_2 un ouvert de X_2 tels que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $B(x_1, \varepsilon_1) \subset U_1$ et $B(x_2, \varepsilon_2) \subset U_2$. On pose $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On a $B((x_1, x_2), \varepsilon) \subset B(x_1, \varepsilon_1) \times B(x_2, \varepsilon_2)$, et ainsi $(x_1, x_2) \in B((x_1, x_2), \varepsilon) \subset U_1 \times U_2 \subset A$. Donc A est ouvert pour la topologie induite par d_∞. □

Exemple B.3. Soit E un espace vectoriel normé. L'application linéaire

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

est continue

Exemple B.4. (**Applications bilinéaires**). Soient E, F, G des espaces normés et $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Alors b est continue si et seulement si il existe $k \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \|b(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$$

Par exemple l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

est continue, ainsi que l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

On étudie maintenant quelques propriétés des espaces topologiques produits.

Proposition B.5. Soient X, Y des espaces topologiques. Les projections

$$\begin{aligned} p_X : X \times Y &\longrightarrow X \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_Y : X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x,y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

sont continues.

Preuve. Si U est un ouvert de X, on a $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, qui est un ouvert de $X \times Y$, donc p_X est continue. Même chose pour p_Y. □

Proposition B.6. Soient X, Y, Z des espaces topologiques et $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ des applications. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application

   $$\begin{aligned} (f,g) : Z &\longrightarrow X \times Y \\ z &\longmapsto (f(z), g(z)) \end{aligned}$$

   est continue.
2. f et g sont continues.

Preuve. Si (f,g) est continue, alors $f = p_X \circ (f,g)$ et $g = p_Y \circ (f,g)$ sont continues par la proposition précédente. Réciproquement, supposons f et g continues. Soient U un ouvert de X et V un ouvert de Y. Alors $(f,g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ est ouvert dans Z. Un ouvert quelconque de $X \times Y$ étant réunion d'ouverts élémentaires, on en déduit bien que (f,g) est continue. □

Corollaire B.7. Soit X une espace topologique, soit $f, g \in C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les applications

$$\begin{aligned} f + g : X &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) + g(x), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f \cdot g : X &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x)g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

sont continues.

Preuve. Par exemple, $f + g$ est continue car composée de $X \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$. □

Corollaire B.8. Soient X, Y des espaces topologiques. Alors pour tout $(a, b) \in X \times Y$, les applications partielles

$$\begin{aligned} i_a : Y &\to X \times Y, \\ y &\mapsto (a, y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_b : X &\to X \times Y \\ x &\mapsto (x, b) \end{aligned}$$

sont continues.

Proposition B.9. Soient X, Y des espaces topologiques et $A \subset X$, $B \subset Y$.

1. Si A et B sont fermés, alors $A \times B$ est fermé dans $X \times Y$.
2. $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$.
3. $\overset{\circ}{\overbrace{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.
4. La topologie produit sur $A \times B$ coïncide avec la topologie induite par $X \times Y$.

Preuve. Exercice. $\square$

On définit le produit d'un nombre fini d'espaces topologiques de manière analogue au produit de deux espaces topologiques.

Définition-Proposition B.10. Soient $X_1 = (X_1, \mathcal{O}_{X_1}), \ldots, X_n = (X_n, \mathcal{O}_{X_n})$ des espaces topologiques. La **topologie produit sur** $X_1 \times \cdots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i$ est la topologie engendrée par les sous-ensembles

$$U_1 \times \cdots \times U_n, \quad U_1 \in \mathcal{O}_{X_1}, \ldots, U_n \in \mathcal{O}_{X_n}$$

appelés ouverts élémentaires. Muni de cette topologie, on dit $\prod_{i=1}^n X_i$ est **l'espace topologique produit** des X_i, $1 \leq i \leq n$. Une partie de $\prod_{i=1}^n X_i$ est ouverte si et seulement si elle est réunion d'ouverts élémentaires.

Exemple B.11. La topologie produit sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie induite par $\| \cdot \|_\infty$ et donc avec la topologie induite par n'importe quelle norme.

Remarque B.12. Soient X, Y, Z des espaces topologiques. Les espaces topologiques $(X \times Y) \times Z$, $X \times (Y \times Z)$ et $X \times Y \times Z$ sont homéomorphes (vérifier, les homéomorphismes sont les homéomorphismes évidents). Cela permet de raisonner par récurrence pour montrer des propriétés de produits finis d'espaces topologiques.

Les résultats précédents se généralisent sans problème au cas du produit de n espaces topologiques.

Exemple B.13. Un polynôme

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{m} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

est une application continue. En particulier le déterminant

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (a_{ij}) &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

est une application continue. Ainsi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

C Topologie initiale associée à une famille d'applications

Proposition-Définition C.1. Soient X un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ une famille d'applications.
Il existe une topologie $\mathcal{O}$ sur X pour laquelle les applications f_i sont continues, et qui est la moins fine parmi les topologies ayant cette propriété. Cette topologie s'appelle **la topologie initiale associée à la famille d'applications** $(f_i)_{i\in I}$, ou encore **la topologie la moins fine rendant continues les applications** $f_i, i \in I$.
Si g est une application d'un espace topologique Z dans X, alors g est continue pour la topologie initiale associée aux applications $(f_i)_{i\in I}$ si et seulement si les applications $f_i \circ g$ sont continues, $\forall i \in I$.

Preuve. Soit
$$\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(U_i),\ i \in I,\ U_i \text{ ouvert de } Y_i\}$$
et soit $\mathcal{O}$ la topologie engendrée par $\mathcal{S}$. Il est clair que les applications f_i sont continues pour cette topologie. Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur X pour laquelle les applications f_i sont continues, on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, donc $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$, et donc $\mathcal{O}$ est bien la topologie la moins fine pour laquelle les applications f_i sont continues.

Soit $g : Z \longrightarrow X$ une application. Si g est continue, les composées $f_i \circ g$, $i \in I$, sont continues. Réciproquement, supposons que les composées $f_i \circ g$, $i \in I$, sont continues. Soit $i \in I$ et U_i un ouvert de Y_i. Alors $g^{-1}(f_i^{-1}(U_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(U_i)$ est ouvert dans Z, et la dernière proposition du premier paragraphe assure donc que g est continue. $\square$

Exemple C.2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des espaces topologiques. La topologie produit sur $\prod_{i=1}^n X_n$ est la topologie la moins fine rendant continues les projections $p_i : \prod_{i=1}^n X_i \to X_i$, $1 \leq i \leq n$.

En effet : Soient $\mathcal{O}$ la topologie produit et $\mathcal{O}'$ la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections. Pour tout i tout ouvert U_i de X_i,
$$p_i^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots X_n$$
est un ouvert de $\mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. Pour $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts respectifs de $X_1, \ldots X_n$ on a
$$U_1 \times \cdots \times U_n = \cap_{i=1}^n p_i^{-1}(U_i)$$
et donc $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. $\square$

On définit donc le produit d'une famille quelconque d'espaces topologiques de la manière suivante.

Définition-Proposition C.3. Soit $(X_i)_{i\in I}$ un famille d'espaces topologiques. La **topologie produit sur** $\prod_{i\in I} X_i$ est la topologie est la topologie la moins fine rendant continues les projections $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$, $i \in I$. Muni de cette topologie, on dit que $\prod_{i\in I} X_i$ est **l'espace topologique produit** des X_i, $i \in I$.
Soit Z un espace topologique et et $f_i : Z \longrightarrow X_i$, $i \in I$, une famille d'applications. Alors l'application

$$\begin{aligned}(f_i)_{i\in I} : Z &\longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \\ z &\longmapsto (f_i(z))_{i\in I}\end{aligned}$$

est continue si et seulement si les applications $p_i \circ f$, $i \in I$, sont continues.

Proposition C.4. Un produit d'espaces topologiques séparés est séparé.

Preuve. Soit $(X_i)_{i\in I}$ un famille d'espaces topologiques, et soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux éléments distincts : il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Comme X_{i_0} est séparé, il existe U et V des ouverts de X_{i_0} tels que $x_{i_0} \in U$, $y_{i_O} \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Alors $p_{i_0}^{-1}(U)$ et $p_{i_0}^{-1}(V)$ sont des ouverts de $\prod_{i\in I} X_i$ avec $(x_i)_{i\in I} \in p_{i_0}^{-1}(U)$, $(y_i)_{i\in I} \in p_{i_0}^{-1}(V)$ et $p_{i_0}^{-1}(U) \cap p_{i_0}^{-1}(V) = \emptyset$. Donc l'espace topologique $\prod_{i\in I} X_i$ est séparé. □

On termine le paragraphe par des exemples importants de topologies sur un espace vectoriel normé, qui seront étudiées plus en détails dans des cours ultérieurs.

Exemples C.5. (Topologies faibles) Soit E un espace vectoriel normé. La **topologie faible sur** E est la topologie la moins fine rendant continues les applications $f \in E'$. La topologie faible est moins fine que la topologie de la norme sur E (elles coïncident quand E est de dimension finie). La topologie faible sur E est séparée.

La **topologie $*$-faible sur** E' est la topologie la moins fine rendant continues les évaluations

$$\begin{aligned}e_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

La topologie $*$-faible sur E' est séparée.

En effet : Vérifions que la topologie faible sur E est séparée (l'affirmation sur la topologie $*$-faible sur E' est laissée en exercice). Soient $x, y \in E$, $x \neq y$. Soit $f \in E'$ tel que $f(x) \neq f(y)$ (théorème de Hahn-Banach), et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \cap B(f(y), \varepsilon) = \emptyset$. Alors on a

$$x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)),\ y \in f^{-1}(B(f(y), \varepsilon)),\ f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \cap f^{-1}(B(f(y), \varepsilon)) = \emptyset$$

avec $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ et $f^{-1}(B(f(y), \varepsilon))$ ouverts pour la topologie faible. □

IV Espaces topologiques compacts

Dans ce chapitre on s'intéresse à des espaces topologiques particulièrement agréables : les espaces compacts. La notion est déjà connue du lecteur, et on présente quelques nouveaux développements, comme la construction du compactifié d'Alexandroff et le théorème de Tychonoff.

A Compacité

A.1 Définitions et exemples

On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble X est un **recouvrement de** X si $X = \cup_{i\in I} A_i$. Si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X et $J \subset I$, on dit que $(A_i)_{i\in J}$ est un **sous-recouvrement** de $(A_i)_{i\in I}$ si $X = \cup_{i\in J} A_i$. Si de plus J est fini, on dit que $(A_i)_{i\in J}$ est un **sous-recouvrement fini**.

Définition A.1. *On dit qu'un espace topologique X est **quasi-compact** si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. On dit que X est **compact** s'il est quasi-compact et séparé.*

Exemples A.2. a) Un espace topologique fini est quasi-compact.
b) Un espace topologique discret est compact si et seulement si il est fini.
c) $\mathbb{R}$, muni de la topologie de Zariski (voir chap. 1), est quasi-compact.
d) Un espace topologique homéomorphe à un espace (quasi-)compact est (quasi-)compact.

Remarque A.3. Une partie A d'un espace topologique X est dite quasi-compacte si elle est quasi-compacte pour la topologie induite par celle de X. On remarque que A est quasi-compacte si seulement si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X tels que $A \subset \cup_{i\in I} U_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \cup_{i\in J} U_i$.

Remarque A.4. Soit X un espace topologique et $A \subset Y \subset X$ des sous-espaces. Alors A est quasi-compact pour la topologie induite par celle de $Y \iff A$ est quasi-compact pour la topologie induite par celle de X. Cela provient de la remarque précédente.

Le résultat important suivant a déjà été vu dans des cours précédents.

Théorème A.5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. L'intervalle $[a, b]$ est compact.

La quasi-compacité peut aussi s'exprimer grâce aux fermés, en passant au complémentaire. La preuve du résultat suivant est laissée en exercice.

Proposition A.6. Soit X un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. X est quasi-compact.
2. Pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X, si $\cap_{i\in I}F_i = \emptyset$, alors il existe $J \subset I$ fini tel que $\cap_{i\in J}F_i = \emptyset$.
3. Pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X, si $\cap_{i\in J}F_i \neq \emptyset$ pour tout sous-ensemble $J \subset I$ fini, alors $\cap_{i\in I}F_i \neq \emptyset$.

A.2 Sous-espaces

Proposition A.7. Soit X un espace topologique. Une réunion finie de parties quasi-compactes de X est quasi-compacte.

Preuve. Par récurrence on se ramène à montrer que la réunion de deux parties quasi-compactes est quasi-compacte. La preuve est laissée en exercice. □

Proposition A.8. Si X est un espace topologique quasi-compact, tout sous-espace fermé de X est quasi-compact.

Preuve. Soit F un fermé de X quasi-compact. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de F tels que $\cap_{i\in I}F_i = \emptyset$. Comme F est fermé dans X, ce sont des fermés de X : il existe $J \subset I$ fini tel que $\cap_{i\in J}F_i = \emptyset$. Donc F est quasi-compact. □

Proposition A.9. Soit X un espace topologique séparé et soit $A \subset X$ un sous-espace compact. Soit $x \in X \setminus A$. Il existe des ouverts disjoints U, V de X tels que $x \in U$ et $A \subset V$.

Preuve. Comme X est séparé, il existe pour tout $b \in A$, U_b et V_b des ouverts disjoints de X tels que $x \in U_b$ et $b \in V_b$. Les ouverts $(V_b)_{b\in B}$ recouvrent l'espace compact A : il existe donc $b_1, \ldots, b_m$ tels que $A \subset V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_m} := V$, et alors si on prend $U = \cap_{i=1}^m U_{b_i}$, on a bien $x \in U$, $A \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$, avec U, V ouverts. □

Corollaire A.10. Si X est un espace topologique séparé, tout sous-espace compact $A \subset X$ est fermé dans X.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du résultat précédent. □

En combinant les résultats précédents, on obtient :

Corollaire A.11. Soit X est un espace topologique compact et $A \subset X$. Alors A est compact si et seulement si A est fermé dans X.

Corollaire A.12. Soit X un espace topologique séparé et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces compacts. Alors $\cap_{i\in I}X_i$ est compact.

Preuve. Comme X est séparé, les X_i, $i \in I$ sont fermés dans X et donc $\cap_{i\in I}X_i$ est un fermé de X. Pour $i_0 \in I$, c'est aussi un fermé du compact X_{i_0}, c'est donc un compact. □

A.3 Le cas des espaces métriques

Dans un espace métrique, la compacité peut être caractérisée en termes de suites. Dans ce paragraphe on rappelle brièvement les principaux résultats dans ce cadre.

Théorème A.13. (Bolzano-Weierstrass) Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si et seulement si toute suite de points de X admet une valeur d'adhérence.

Corollaire A.14. Un produit fini d'espaces métriques compacts est compact.

Plus généralement un produit fini d'espaces compacts est compact, et encore plus généralement un produit quelconque d'espaces compacts est compact (c'est le théorème de Tychonoff, voir plus loin).

Corollaire A.15. Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.

Exemple A.16. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Les boules fermées et les sphères de E sont compactes. C'est-à-dire, pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{x \in E \mid \|x\| \leq \varepsilon\} \quad \text{et} \quad S(x, \varepsilon) = \{x \in E \mid \|x\| = \varepsilon\}$$

sont compacts. En particulier les sphères unité euclidiennes

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

sont compactes.

Exemple A.17. (Groupe orthogonal) Le groupe orthogonal

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I_n = A^tA\} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I_n\}$$

(où $M_n(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-ev des matrices $n \times n$ à coefficients réels muni de sa topologie naturelle, et A^t est la matrice transposée de la matrice A) est compact.

En effet : On peut vérifier que l'application

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \mathrm{tr}(AB^t) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, et induit donc une norme. Donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, qui est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$, est une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto AA^t \end{aligned}$$

est continue car elle la composée des applications continues

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto (A, A) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto (A, B^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\mu} M_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

(la multiplication est continue car bilinéaire et la transposée est continue car linéaire). On a $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$, donc est fermé. Ainsi $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$, car c'est un fermé borné. □

A.4 Continuité et compacité

Théorème A.18. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors si X est quasi-compact, $f(X)$ est quasi compact.

Preuve. Soit $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts de Y tels que $f(X) \subset \cup_{i\in I} U_i$. On a $X = f^{-1}(f(X)) = \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$. Comme f est continue, les $f^{-1}(U_i)$ sont ouverts dans X et comme X compact il existe $J \subset I$ fini tel que $X = \cup_{j\in J} f^{-1}(U_i)$. Donc $f(X) = \cup_{i\in J} f(f^{-1}(U_i)) \subset \cup_{j\in J} U_j$, et $f(X)$ est quasi-compact. □

Le résultat suivant est très utile pour assurer qu'une bijection continue est un homéomorphisme.

Théorème A.19. Soient X, Y des espaces topologiques avec X quasi-compact, Y séparé et soit $f : X \to Y$ une application continue et injective. Alors f induit un homéomorphisme entre X et $f(X)$.

Preuve. f étant injective et continue, elle induit une bijection continue entre X et $f(X)$, et il suffit donc de montrer que si F est un fermé de X, alors $f(F)$ est un fermé de $f(X)$. Soit donc F un fermé de X. Comme X est quasi-compact, F est quasi-compact, donc $f(F)$ est quasi-compact. Comme Y est séparé, les sous-espaces $f(X)$ et $f(F)$ le sont aussi, $f(F)$ est compact et est donc un fermé de Y, et aussi de $f(X)$. □

On utilise par exemple ce résultat pour montrer le théorème suivant.

Théorème A.20. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $C \subset E$ un convexe borné d'intérieur non vide.

1. $\overline{C}$ est homéomorphe à $\overline{B}(0,1)$.
2. $\overset{\circ}{C}$ est homéomorphe à $B(0,1)$.
3. $\overline{C} \setminus \overset{\circ}{C}$ est homéomorphe à $S(0,1)$.

Preuve. En appliquant une translation convenable (qui est un homéomorphisme), on peut supposer que $0 \in \overset{\circ}{C}$. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ la jauge du convexe C (voir chapitre II) :

$$p(x) = \inf\left(\alpha > 0,\ \alpha^{-1}x \in C\right)$$

On sait que p est continue, qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in E$, $p(x) \leq M\|x\|$, et comme $\overline{C}$ est compact (il est fermé borné dans E de dimension finie),

$$\overset{\circ}{C} = \{x \in E \mid p(x) < 1\}, \quad \overline{C} = \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$$

Considérons l'application $f : E \to E$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{p(x)}{\|x\|}x$ si $x \neq 0$. On va montrer que f induit les homéomorphismes annoncés.

Comme p est continue, f est continue sur $E \setminus \{0\}$ et la continuité en 0 provient de $p(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$. Donc f est continue sur E. Montrons que f est une bijection. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Supposons $p(x) = 0$: il existe une suite (α_n) de réels > 0 tels que (α_n) converge vers 0 et $\alpha_n^{-1}x \in C$. Mais ceci contredit alors le fait que C est borné. Donc $p(x) \neq 0$. Ce ci nous permet de définir $g : E \to E$ par $g(0) = 0$ et $g(x) = \frac{\|x\|}{p(x)}x$ si $x \neq 0$. On voit facilement que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$, donc f est une bijection. Il est alors clair, à partir des descriptions précédentes de $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$ grâce à p, que f induit des bijections entre $\overset{\circ}{C}$ et $B(0,1)$, et $\overline{C}$ et $\overline{B}(0,1)$. $\overline{C}$ est compact, donc $f_{|\overline{C}}$ est un homéomorphisme entre $\overline{C}$ et $\overline{B}(0,1)$ et les autres homéomorphismes sont obtenus par restriction. □

Exemple A.21. Le cylindre $C = D^2 \times [0,1]$ (où $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$) est homéomorphe à la boule fermée euclidienne $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^3$, et le bord de C est homéomorphe à la sphère euclidienne $\mathbb{S}^2$.

B Espaces normaux

Définition B.1. *Un espace topologique X est dit* ***normal*** *s'il est séparé et si pour tous fermés disjoints F_1, F_2 de X il existe des ouverts disjoints U_1, U_2 de X tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$*

Théorème B.2. Un espace topologique compact est normal.

Preuve. Soit X un espace topologique compact et soient F_1, F_2 des fermés disjoints de X. Pour tout $x \in F_1$, on sait qu'il existe U_x et V_x des ouverts disjoints de X tels que $x \in U_x$ et $F_2 \subset V_x$. Les ouverts U_x recouvrent F_1, qui est compact, donc il existe $x_1, \dots, x_m \in F_2$ tels que $F_1 \subset U_1 := \cup_{i=1}^m U_{x_i}$. On prend $U_2 = \cap_{i=1}^m V_{x_i}$, et on a bien $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$ avec U_1, U_2 ouverts disjoints de X. □

On peut également démontrer que les espaces métriques sont normaux. L'intérêt de cette notion provient du résultat suivant, qui assure qu'un espace normal possède "suffisament" de fonctions continues.

Théorème B.3. (**Lemme d'Uryshon**) Soient X un espace topologique normal et soient F_0, F_1 des fermés disjoints de X. Il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f_{|F_0} = 0$ et $f_{|F_1} = 1$.

On commence la preuve par un lemme.

Lemme B.4. Soit X un espace topologique normal. Si F est un fermé de X et V est un ouvert de X tels que $F \subset V$, alors il existe un ouvert U de X tel que $F \subset U \subset \overline{U} \subset V$.

Preuve. Soient F_0, F_1 des fermés disjoints de X. Montrons qu'il existe un ouvert U de X tel que $F_0 \subset U$ et $\overline{U} \cap F_1 = \emptyset$.

Soient U, V des ouverts de X tels que $F_0 \subset U$, $F_1 \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. Suppsons qu'il existe $x \in \overline{U} \cap F_1$, alors $x \in \overline{U} \cap V$. Comme V est ouvert, V est un voisinage de x, et comme $x \in \overline{U}$, on a donc $V \cap U \neq \emptyset$: contradiction. Donc $\overline{U} \cap F_1 = \emptyset$.

On applique le résultat à $F_0 = F$ et $F_1 = X \setminus V$: il existe donc un ouvert U tel que $F \subset U$ et $\overline{U} \cap (X \setminus V) = \emptyset$, c'est-à-dire $F \subset U \subset \overline{U} \subset V$. □

Preuve du lemme d'Uryshon. Soient F_0, F_1 des fermés disjoints de l'espace normal X. Soit $V_1 = X \setminus F_1$. Par le lemme précédent il existe un ouvert $V_{1/2}$ de X tel que $F_0 \subset V_{1/2} \subset \overline{V_{1/2}} \subset V_1$. De même il existe des ouverts $V_{1/4}$ et $V_{3/4}$ de X tels que

$$F_0 \subset V_{1/4} \subset \overline{V_{1/4}} \subset V_{1/2} \subset \overline{V_{1/2}} \subset V_{3/4} \subset \overline{V_{3/4}} \subset V_1$$

On montre alors que pour tout $r \in D = \{\frac{k}{2^m},\ k, m \in \mathbb{N},\ m > 0, 0 < k < 2^m\}$, il existe un ouvert V_r tel que $F_0 \subset V_r \subset \overline{V_r} \subset V_1$ et si $r < s$, $\overline{V_r} \subset V_s$ (par récurrence sur le dénominateur).

Soit maintenant $f : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \cup_{r \in D} V_r \\ \inf\{r \in D,\ x \in V_r\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $f(x) = 1$ si $x \in F_1$ et $f(x) = 0$ si $x \in F_0$ (car pour $x \in F_0$, on a $\{r \in D, x \in V_r\} \subset \cap_{r \in D}[0, r] = \{0\}$), et $f(X) \subset [0, 1]$. On a aussi, pour tout $r \in D$,

$$x \in \overline{V_r} \Rightarrow f(x) \leq r \quad \text{et} \quad x \notin V_r \Rightarrow f(x) \geq r \ (\star)$$

En effet : si $x \in \overline{V_r}$, $\forall t > r$ on a $x \in V_t$ et donc $f(x) \leq t$, d'où $f(x) \leq r$. Supposons $x \notin V_r$. Alors $r \notin \{s \in D, x \in V_s\} = D_x$. Donc $\forall s \in D_x$, $r \leq s$ (si $r > s$, on a $x \in V_s \subset V_r$), d'où $r \leq \inf D_x = f(x)$.

Soit $x_0 \in X$ et soit $r_0 = f(x_0)$. Montrons que f est continue en x_0. Soit W un voisinage de r_0 dans $[0, 1]$.

Supposons que $r_0 \in]0, 1[$ et soient $a, b \in]0, 1[$ tels que $a < b$ et $r_0 \in]a, b[\subset W$. Soient $r, s \in D$ tels que $a < s < r_0 < r < b$. Soit $U = V_r \setminus \overline{V_s}$. Les implications $(\star)$ assurent que $f(U) \subset [s, r] \subset]a, b[\subset W$ et que $x_0 \in U$, ce qui montre que f est continue en x_0 car U est un voisinage de x_0.

Si $r_0 = 0$, soit $b \in]0, 1[$ tel que $[0, b[\subset W$. Soit $r \in D$ tel que $r_0 = 0 < r < b$. On a $f(V_r) \subset [0, r] \subset [0, b[\subset W$ et $x_0 \in V_r$ (toujours $\star$) avec V_r voisinage (ouvert) de x_0. f est donc continue en x_0.

Si $r_0 = 1$, soit $a \in]0, 1[$ tel que $[a, 1[\subset W$. Soit $s \in D$ tel que $a < s < r_0 = 1$. On a $f(X \setminus \overline{V_s}) \subset [s, 1] \subset]a, 1] \subset W$ et $x_0 \in X \setminus \overline{V_r}$ (toujours $\star$) avec $X \setminus \overline{V_r}$ voisinage (ouvert) de x_0. f est donc continue en x_0. □

C Espaces localements compacts

De nombreux espaces usuels et importants ne sont pas compacts. Ils sont néanmoins "localement compacts", au sens suivant.

Définition C.1. *Un espace topologique est dit* ***localement compact*** *s'il est séparé et si chacun de ses points admet un voisinage compact.*

Exemples C.2. 1. $\mathbb{R}^n$ est un espace topologique localement compact. En effet pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, la boule fermée $\overline{B}(x, \varepsilon)$ (pour n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$) est un voisinage compact de x.

2. Un espace topologique compact est localement compact.
3. Un espace topologique discret est localement compact.

Proposition C.3. Un fermé d'un espace topologique localement compact est localement compact.

Preuve. Soit F un fermé de X localement compact et soit $x \in F$. Soit V un voisinage compact de x dans X. Alors $F \cap V$ est un fermé de V qui est compact, donc $F \cap V$ est compact, et est un voisinage de x dans F. $\square$

Pour montrer qu'un ouvert d'un espace topologique localement compact est localement compact, on aura besoin du résultat suivant.

Proposition C.4. Soient X un espace topologique localement compact, $x \in X$ et U un voisinage de x dans X. Alors il existe un voisinage compact V de x qui est contenu dans U.

Preuve. Soit V un voisinage compact de x dans X. Soit $K = V \cap \overline{X \setminus U}$. Comme $\overline{X \setminus U}$ est fermé dans X, K est un fermé du compact V, il est donc compact. On a $x \notin \overline{X \setminus U}$ car $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$, donc $x \notin K$. On sait alors qu'il existe des ouverts A et B de X tels que $x \in A$, $K \subset B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Posons $V' = V \cap \overline{A}$ et montrons que c'est un voisinage compact de x contenu dans U. Tout d'abord V et A étant des voisinages de x, V' est bien un voisinage de x. Ensuite V' est un fermé du compact V, c'est donc un compact. Finalement soit $y \in V'$. Comme B est ouvert, on a $B \cap A = \emptyset \Rightarrow B \cap \overline{A} = \emptyset$, donc $y \notin B$ et $y \notin K$. Comme $y \in V$, on a $y \notin \overline{X \setminus U}$ et $y \in U$, d'où $V' \subset U$. $\square$

Proposition C.5. Un ouvert d'un espace topologique localement compact est localement compact.

Preuve. Soit U un ouvert de X localement compact et soit $x \in U$. Soit V un voisinage compact de x inclus dans U : V est bien un voisinage compact de x dans U. $\square$

D Compactification

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \setminus \{i\} \\ t &\mapsto \frac{t-i}{1-it} = \frac{2t}{t^2+1} + i\frac{t^2-1}{t^2+1} \end{aligned}$$

où l'on identifie la sphère euclidienne $\mathbb{S}^1$ à l'ensemble des nombres complexes de module 1. Géométriquement, f associe au point de coordonnées $(t, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ l'unique point d'intersection de $\mathbb{S}^1$ avec la droite passant par $(t, 0)$ et le pôle nord N de $\mathbb{S}^1$ (coordonnées $(0, 1)$). Alors f est une bijection, de bijection réciproque

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 \setminus \{i\} &\to \mathbb{R} \\ z = a + ib &\mapsto \frac{a}{1-b} \end{aligned}$$

g est la projection stéréographique de la sphère $\mathbb{S}^1$ sur la droite d'équation $y = 0$.

Il est facile de voir que f et g sont continues, donc sont des homéomorphismes réciproques. Ainsi $\mathbb{R}$ est homéomorphe à un espace compact privé d'un point. Cela se généralise en fait pour n'importe quel espace topologique localement compact.

Théorème-Définition D.1. Soit X un espace topologique localement compact. Notons $\widehat{X}$ l'ensemble X auquel on a ajouté un point noté ∞ : $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$. Il existe une topologie sur X dont les ouverts sont

1. Les ouverts U de X ;
2. Les ensemble de la forme $O \cup \{\infty\}$, où O est un ouvert de X dont le complémentaire est compact.

Muni de cette topologie, $\widehat{X}$ est un espace topologique compact, appelé le **compactifié d'Alexandroff** de X. De plus X est homéomorphe à $\widehat{X} \setminus \{\infty\}$.

Preuve. Notons $\mathcal{O}$ les parties de $\widehat{X}$ du type précédent. Il est clair que $\emptyset, \widehat{X} \in \mathcal{O}$ et qu'une réunion ou une intersection finie de parties du type (1) est encore une partie du type (1). Soit $(O_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts de X dont le complémentaire est compact : on a $\cup_{j\in J} O_j$ ouvert et $X \setminus (\cup_{j\in J} O_j) = \cap_{j\in J}(X \setminus O_j)$ qui est une intersection de compacts dans l'espace séparé X, donc est compact. Donc une réunion quelconque de parties du type (2) est encore une partie du type (2). De même on vérifie que l'intersection de parties du type (2) est encore une partie du type (2) (car une réunion finie de compacts est encore compacte).

Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X et $(O_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts dont le complémentaire est compact. Pour $i \in I$ et $j \in J$, $U_i \cup O_j$ est un ouvert de X, avec $X \setminus (U_i \cup O_j) = (X \setminus U_i) \cap (X \setminus O_j)$ compact car fermé dans le compact $X \setminus O_j$. Donc $\cup_{i\in I, j\in J} U_i \cup O_j \cup \{\infty\} \in \mathcal{O}$. Pour U, O ouverts de X, on a $U \cap (O \cup \{\infty\}) = U \cap O$, c'est un ouvert de X. On a donc bien montré que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\widehat{X}$.

Vérifions que l'espace topologique $\widehat{X}$ est séparé. Soient $x, y \in \widehat{X}$ avec $x \neq y$. Si $x, y \in X$, il existe U, V des ouverts de X, et donc de $\widehat{X}$, tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Si $y = \infty$ (par exemple), soit K un voisinage compact de x dans X (qui existe car X est localement compact). Alors $\overset{\circ}{K}$, $\widehat{X} \setminus K$ sont des ouverts disjoints de $\widehat{X}$, contenant x et ∞ respectivement.

Vérifions que $\widehat{X}$ est quasi-compact. Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X et $(O_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts dont le complémentaire est compact tels que

$$\widehat{X} = (\cup_{i\in I} U_i) \cup (\cup_{j\in J} O_j) \cup \{\infty\}$$

($J \neq \emptyset$ car sinon on n'a pas ∞ dans le recouvrement). Soit $j_0 \in J$. On a

$$X = (\cup_{i\in I} U_i) \cup (\cup_{j\in J} O_j) = (\cup_{i\in I} U_i) \cup (\cup_{j\neq j_0} O_j) \cup O_{j_0}$$

avec $(\cup_{i\in I} U_i) \cup (\cup_{j\neq j_0} O_j) = X \setminus O_{j_0}$ compact. Il existe donc $I' \subset I$ fini et $J' \subset (J \setminus \{j_0\})$ fini tels que $X \setminus O_{j_0} = (\cup_{i\in I'} U_i) \cup (\cup_{j\in J'} O_j)$ et finalement $X = (\cup_{i\in I'} U_i) \cup (\cup_{j\in J'} O_j) \cup O_{j_0}$.

La dernière assertion est immédiate car les ouverts de $\widehat{X} \setminus \{\infty\}$ sont les ouverts de X. $\square$

On veut maintenant établir un résultat d'unicité pour le compactifié d'Alexandroff, qui sera une conséquence du résultat suivant.

Proposition D.2. Soient Y et Z des espaces compacts, $y \in Y$ et $z \in Z$ et $f : Y \setminus \{y\} \to Z \setminus \{z\}$ un homéomorphisme. Alors f se prolonge en un homéomorphisme $\tilde{f} : Y \to Z$ tel que $\tilde{f}(y) = z$.

Preuve. L'existence de la bijection $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f}(y) = z$ est claire. Soit F un fermé de Z. Montrons que $\tilde{f}^{-1}(F)$ est un fermé de Y. Si $z \in F$, alors $Z \setminus F$ est un ouvert de $Z \setminus \{z\}$, donc $\tilde{f}^{-1}(Z \setminus F) = f^{-1}(Z \setminus F)$ est un ouvert de l'ouvert $Y \setminus \{y\}$ (continuité de f), donc un ouvert de Y. Si $z \notin F$, alors $\tilde{f}^{-1}(F) = f^{-1}(F)$. Comme F est fermé il est compact, et f^{-1} étant continue, $f^{-1}(F)$ est compact donc fermé dans Y. Ainsi $\tilde{f}$ est continue, et c'est un homéomorphisme car Y est compact et Z est séparé. □

Corollaire D.3. Soit X un espace localement compact et soit Y un espace compact tel que X soit homémorphe à $Y \setminus \{y\}$ pour un certain $y \in Y$. Alors Y est homémorphe à $\widehat{X}$.

Preuve. Comme X et $\widehat{X} \setminus \{\infty\}$ sont homéomorphes, le résultat est une conséquence du précédent. □

Exemple D.4. Le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ (voir le début du paragraphe). Plus généralement, le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère euclidienne $\mathbb{S}^n$. En effet, munissons $\mathbb{R}^n$de la norme euclidienne. On a $\mathbb{S}^n = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\|^2 + t^2 = 1\}$. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{S}^n \setminus \{N = (0,\dots,0,1)\} \\ x &\mapsto \left(\frac{2x}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, d'homéomorphisme inverse la projection stéréographique p_N de $\mathbb{S}^n$ sur l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$:

$$\begin{aligned} p_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N = (0,\dots,0,1)\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\mapsto \frac{x}{1-t} \end{aligned}$$

Voici un exemple d'utilisation du compactifié d'Alexandroff.

Théorème D.5. Soit X un espace localement compact et soient $C \subset U \subset X$ avec C compact et U ouvert. Il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ telle que

$$f_{|C} = 1, \quad \mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \subset U$$

Preuve. Supposons X compact dans un premier temps. Comme X est normal, il existe un ouvert V de X tel que $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Soit $f : X \to [0,1]$ continue telle que $f_{|C} = 1$ et $f_{|X\setminus V} = 0$ (lemme d'Uryshon). On a $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset V$, d'où $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{V} \subset U$.

On revient au cas général. C est compact dans X, il est donc compact dans $\widehat{X}$, et U est ouvert dans $\widehat{X}$. On applique le résultat précédent : il existe $f : \widehat{X} \to [0,1]$ continue telle que

$$f_{|C} = 1, \quad \overline{\{x \in \widehat{X} \mid f(x) \neq 0\}}^{\widehat{X}} \subset U$$

On a $\{x \in \widehat{X} \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ car $f(\infty) = 0$ (sinon on aurait $\infty \in U$). Si J est une partie de X, on a $\overline{J}^X \subset \overline{J}^{\widehat{X}}$ (voir lemme ci-dessous), d'où le résultat.

Lemme D.6. Si J est une partie de X, on a $\overline{J}^X \subset \overline{J}^{\widehat{X}}$.

Peuve du lemme. Soit $x \in \overline{J}^X$. Alors x appartient à tous les fermés de X contenant J. Montrons que x appartient à tous les fermés de $\widehat{X}$ contenant J, ce qui montrera que $x \in \overline{J}^{\widehat{X}}$.

Soit G un fermé de $\widehat{X}$ contenant J. Alors $G = \widehat{X} \setminus U$ pour U ouvert de X ou $G = X \setminus O$, pour O ouvert de X tel que $X \setminus O$ soit compact.

Supposons $G = \widehat{X} \setminus U$ pour U ouvert de X. Alors $J \subset G \Rightarrow J \subset X \setminus U$, donc $x \in X \setminus U \subset G$. Si $G = X \setminus O$ avec O ouvert de X, on a aussi $x \in G$, d'où le résultat. $\square$

E Théorème de Tychonoff

Théorème E.1. Un produit d'espaces topologiques compact est compact.

Preuve. On sait déjà qu'un produit d'espaces séparés est séparé, il faut donc étudier la quasi-compacité.

Soit X un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{F}$ a la propriété d'intersection finie si l'intersection de toute famille finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est non vide. On commence par un lemme.

Lemme E.2. Soit X un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ayant la propriété d'intersection finie. Il existe $\mathcal{F}_0$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ et maximale pour la propriété d'intersection finie.

La preuve du lemme est omise, c'est une application, un peu fastidieuse mais sans difficulté, du lemme de Zorn. La maximalité de $\mathcal{F}_0$ implique que $\mathcal{F}_0$ est stable par intersections finies, et si S est une partie de X dont l'intersection avec chaque élément de $\mathcal{F}_0$ est non vide, alors $S \in \mathcal{F}_0$.

Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques compacts, et $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés de X ayant la propriété d'intersection finie. On doit montrer que $\cap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, ce qui assurera que X est quasi-compact.

Par le lemme il existe $\mathcal{F}_0$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ maximale pour la propriété d'intersection finie (les éléments de $\mathcal{F}_0$ ne sont pas nécessairement des fermés). On note $p_\alpha : X \to X_\alpha$ les projections respectives. Pour $\alpha \in A$, posons

$$\mathcal{F}_0^\alpha = \{p_\alpha(F), F \in \mathcal{F}_0\} \subset \mathcal{P}(X_\alpha)$$

Si $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_0$, il existe $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in F_1 \cap \cdots \cap F_n$, d'où, pour chaque α et i, $x_\alpha \in p_\alpha(F_i)$ et chaque $\mathcal{F}_0^\alpha$ a la propriété d'intersection finie. Comme X_α est compact, il existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tel que

$$x_\alpha \in \cap_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{p_\alpha(F)}$$

Soit $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$. On va montrer que $x \in \cap_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{F}$, qui est contenu dans $\cap_{F \in \mathcal{F}} F$, et on aura donc le résultat.

Soit U un ouvert de X tel que $x \in U$. Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ et $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ des ouverts respectifs de $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n}$ tels que

$$x \in \cap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset U$$

En particulier, pour chaque i, $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$, et donc comme $x_\alpha \in \cap_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{p_\alpha(F)}$, U_{α_i} a une intersection non vide avec chaque ensemble de $\mathcal{F}_0^{\alpha_i}$. Ainsi $p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ a une intersection non vide avec chaque élément de $\mathcal{F}_0$, et appartient donc à $\mathcal{F}_0$ par maximalité de $\mathcal{F}_0$. Mais alors $\cap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \mathcal{F}_0$ (même raison), et U a une intersection non vide avec chaque élément de $\mathcal{F}_0$. On a donc bien $x \in \cap_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{F} \subset \cap_{F \in \mathcal{F}} F$, qui est donc non vide. $\square$

V Espaces topologiques connexes

Dans ce chapitre, on étudie la notion de connexité pour les espaces topologiques. Le chapitre ne contient que peu de résultats nouveaux, mais fournit, à notre niveau, l'outil le plus pertinent pour montrer que des espaces topologiques ne sont pas homéomorphes.

A Connexité

A.1 Définitions et exemples

Définition-Proposition A.1. Un espace topologique X est dit **connexe** s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes.

1. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.
2. Si $X = A \cup B$ avec A, B ouverts disjoints de X, alors $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.
3. Tout application continue de X dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$. Si $X = A \cup B$ avec A, B ouverts disjoints de X, alors A et B sont à la fois ouverts et fermés, donc l'un ou l'autre est vide. $(2) \Rightarrow (3)$ Soit $f : X \to \{0, 1\}$ une application continue. Posons $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$. On a $X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Comme $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts et f est continue, on a $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, donc f est constante. $(3) \Rightarrow (1)$ Soit U une partie ouverte et fermée de X, et soit $f : X \to \{0, 1\}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in U$ et $f(x) = 0$ si $x \notin U$. f est continue car U est à la fois ouvert et fermé. f étant constante, on a soit $U = X$, soit $U = \emptyset$. □

Exemples A.2.
1. Un espace topologique grossier est connexe.
2. Un espace topologique discret est connexe si et seulement si il a moins d'un point.
3. Un espace topologique homéomorphe à un espace connexe est connexe.
4. Le compactifié d'Alexandroff d'un espace compact (non vide) n'est pas connexe ($\{\infty\}$ est à la fois ouvert et fermé). En particulier le compactifié d'Alexandroff d'un espace compact (non vide) et connexe X n'est pas homéomorphe à X.

Une importante classe d'exemples d'espaces topologiques connexes est fournie par le résultat suivant. La démonstration a été vue en licence, et est donc omise.

Théorème A.3. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition A.4. Soit X un espace topologique.

1. Soit A une partie connexe de X. Alors toute partie Y de X telle que $A \subset Y \subset \overline{A}$ est connexe.
2. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.
3. Si $X = \cup_{i \in I} A_i$ où les A_i sont des parties connexes telles que $\forall i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors X est connexe.

Preuve. 1. Soit $f : Y \to \{0,1\}$ continue. Comme A est connexe, $f_{|A}$ est constante, et comme $A \subset Y \subset \overline{A}$ et f continue, f doit être être constante sur Y. Donc Y est connexe.

2. Soit $g : f(X) \to \{0,1\}$ une application continue. Alors $g \circ f : X \to \{0,1\}$ est continue, donc constante si X est connexe, et ainsi g est constante. $f(X)$ est donc connexe.

3. Soit $f : X \to \{0,1\}$ une application continue. Soient $x, y \in X$ et i, j tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$. A_i et A_j sont connexes, il existe donc $t_i, t_j \in \{0,1\}$ tels que $f_{|A_i} = t_i$ et $f_{|A_j} = t_j$. Soit $z \in A_i \cap A_j$: on a $t_i = f(z) = t_j$, d'où $f(x) = f(y)$. f est donc constante et X est connexe. $\square$

Proposition A.5. Un produit d'espaces topologiques connexes est connexe.

Preuve. Soit X, Y des espaces topologique connexes, et soit $f : X \times Y \to \{0,1\}$ une application continue. Soit $(a,b) \in X \times Y$. Les espaces $X \times \{b\}$ et $\{a\} \times Y$ sont homéomorphes à X et Y respectivement, donc sont connexes et la restriction de f à ces sous-espaces doit être constante. Ainsi, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, on a $f(x,b) = f(a,b) = f(a,y)$. Pour un autre $(a',b') \in X \times Y$, on a donc $f(a',b) = f(a,b) = f(a,b')$. Si maintenant on applique le premier raisonnement à (a',b'), on a $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, $f(x,b') = f(a',b') = f(a,y')$, et en particulier $f(a,b') = f(a',b') = f(a',b)$, d'où $f(a,b) = f(a',b')$. Ainsi f est constante, et $X \times Y$ est connexe. On en déduit par récurrence qu'un produit fini d'espaces connexes est connexe. Le cas général est un peu plus délicat, nous ne le montrons pas. $\square$

Exemples A.6.

1. Un espace vectoriel normé de dimension finie est connexe, car homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
2. Le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est connexe, car l'application continue $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{it}$, est surjective.
3. Les espaces $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas connexes, car $\det(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$ et $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$, qui ne sont pas connexes.

Proposition A.7. Soit X un espace topologique localement compact, non compact, et connexe. Alors $\widehat{X}$ (le compactifié d'Alexandroff de X) est connexe.

Preuve. Soit $f : \widehat{X} \to \{0,1\}$ une application continue. Comme X est connexe, $f_{|X}$ est constante, par exemple $f(x) = 0$, $\forall x \in X$. Si $f(\infty) = 1$ alors $\{\infty\} = f^{-1}(\{1\})$ est ouvert. Mais les ouverts de $\widehat{X}$ contenant ∞ sont de la forme $O \cup \{\infty\}$, avec O ouvert de X dont le complémentaire est compact. Donc ici O doit être vide, donc X doit être compact : contradiction. Donc $f(\infty) = 0$ et f est constante. $\square$

Exemple A.8. La shère unité $\mathbb{S}^n$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ est connexe, car est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de l'espace connexe $\mathbb{R}^n$ (on peut évidemment trouver une preuve plus directe).

La connexité est souvent utile pour montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes.

Exemple A.9. Le cercle unité $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$.

En effet : Supposons au contraire qu'il existe un homéomorphisme $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1$. Il induit un homéomorphisme $[0,1] \setminus \{1/2\} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{f(1/2)\}$, le premier de ces espace étant non connexe (ce n'est pas un intervalle), le deuxième étant connexe (facile à vérifier). □

Exemple A.10. $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$. (plus généralement, un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$ n'est homéomorphe à aucun ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour $m \neq n$: c'est le théorème d'invariance du domaine, un résultat beaucoup plus dur à montrer que le cas particulier que nous avons énoncé).

En effet : Supposons qu'il existe une homéomorphisme f entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$. Si $t \in \mathbb{R}$, alors f induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R} \setminus \{t\}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{f(t)\}$. Mais $\mathbb{R} \setminus \{t\}$ n'est pas connexe (ce n'est pas un intervalle) alors que $\mathbb{R}^n \setminus \{t\}$ est connexe si $n \geq 2$ (comme on le voit facilement en utilisant la notion de connexité par arcs du paragraphe suivant). □

A.2 Composantes connexes

Dans ce sous-paragraphe on voit qu'un espace topologique se décompose naturellement en une réunion de sous-espaces connexes.

Définition A.11. *Soit X un espace topologique. Une* ***composante connexe de*** *X est une partie connexe maximale de X.*

Une partie C est de X est donc une composante connexe de X si C est connexe et si pour toute partie connexe D de X telle que $C \subset D$, on a $C = D$.

Exemple A.12. Les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ (la topologie étant la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) sont réduites à un point.

En effet : Soit C une partie connexe de $\mathbb{Q}$: c'est aussi une partie connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Comme $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, on a aussi $\overset{\circ}{C} = \emptyset$, donc C n'a qu'un seul point. □

Proposition A.13. Soit X un espace topologique. Tout $x \in X$ est contenu dans une unique composante connexe. Les composantes connexes de X forment donc une partition de X.

Preuve. La réunion C des parties connexes de X contenant X est connexe (elles contiennent toutes x) et une partie connexe contenant C contient x, donc doit être contenue dans C, et être égale à C. Donc C est une composante connexe de X, et si C' est une autre composante connexe de X contenant x, alors $C \cup C'$ est une partie connexe de X (car contient x), et comme C et C' sont des composantes connexes, on a $C \cup C' = C = C'$. □

Proposition A.14. Soient X et Y des espaces topologiques. Un homéomorphisme entre X et Y induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de X et de Y.

Le nombre de composantes connexes permet donc, dans certaines situations, de montrer que des espaces ne sont pas homéomorphes.

Exemple A.15. Soient $D_1, \ldots D_n, E_1, \ldots, E_m$ des droites de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall i, j, D_i \cap D_j = \{x\}$ et $\forall i, j, E_i \cap E_j = \{y\}$. Alors si $m \neq n$, les espaces $D = \cup_{i=1}^{n} D_i$ et $E = \cup_{j=1}^{m} E_j$ ne sont pas homéomorphes.

En effet : On peut supposer sans perte de généralité que $n > 1$. Supposons au contraire qu'il existe un homéomorphisme $f : D \to E$. Il induit un homéomorphisme $D \setminus \{x\} \to E \setminus \{f(x)\}$. L'espace $D \setminus \{x\}$ a $2n$ composantes connexes, alors que $E \setminus \{f(x)\}$ a quant à lui soit $2m$ composantes connexes (si $f(x) = y$), soit 2 composantes connexes (si $f(x) \neq f(y)$, donc soit $2n = 2m$, soit $2n = 2$: contradiction. $\square$

Définition A.16. *Un espace topologique X est dit* ***localement connexe*** *si pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe un voisinage U de x connexe et contenu dans V.*

Proposition A.17. Dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont à la fois ouvertes et fermées.

Preuve. Soit C une composante connexe de l'espace localement connexe X. Soit $x \in C$ et U un voisinage connexe de x. Alors $C \cup U$ est connexe, donc $C \cup U = C$ et $U \subset C$. On en déduit que C est ouvert, car si V est un ouvert de X tel que $x \in V \subset U$, On a $V \subset C$. On a $X = \amalg_{i \in I} C_i$ où les C_i sont les composantes connexes, dont chaque composante connexe est fermée (dès qu'elle est ouverte). $\square$

Exemple A.18. $\mathbb{Q}$ (muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) n'est pas localement connexe, sinon ses composantes connexes (ses points) seraient ouvertes et fermées, donc $\mathbb{Q}$ serait discret, ce qui est exclu car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

B Connexité par arcs

Dans ce paragraphe, on introduit une notion un peu plus forte (mais souvent plus naturelle et facile à vérifier quand elle est vraie) que la connexité : la connexité par arcs.

Définition B.1. *Soit X un espace topologique et soient $x, y \in X$. Un* ***chemin continu de*** *x* ***à*** *y est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Définition B.2. *Un espace topologique X est dit* ***connexe par arcs*** *si pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin continu de x à y.*

Exemples B.3. 1. Une partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

2. Si E est un espace vectoriel normé et X une partie finie de E, alors $E \setminus X$ est connexe par arcs.
3. La sphère unité $\mathbb{S}^n$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ est connexe par arcs.
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on pourra considérer le polynôme $P(z) = \det(zA + (1-z)B) \in \mathbb{C}[z]$ pour construire un chemin continu de A à B).

Proposition B.4. Un espace topologique connexe par arcs est connexe.

Preuve. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Fixons $x \in X$, et pour chaque $y \in X$, soit γ_y un chemin continu joignant x à y. On a $X = \cup_{y \in X} \gamma_y([0,1])$ avec chaque $\gamma_y([0,1])$ connexe et $x \in \cap_{y \in X} \gamma_y([0,1])$, donc X est connexe. □

Il existe cependant des espaces connexes non connexes par arcs.

Le lemme suivant est souvent utile.

Lemme B.5. Soit X un espace topologique et soient $x, y, z \in X$.

1. S'il existe un chemin continu de x à y, alors il existe un chemin continu de y à x.
2. S'il existe des chemins continus de x à y et de y à z, alors il existe un chemin continu de x à z.

Preuve. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un chemin continu de x à y. Alors $\gamma' : [0,1] \to X$ défini par $\gamma'(t) = \gamma(1-t)$ est un chemin continu de y à x. Si de plus $\beta : [0,1] \to X$ est un chemin continu de y à z, alors $\alpha : [0,1] \to X$ défini par $\alpha(t) = \gamma(2t)$ pour $0 \leq t \leq 1/2$ et $\alpha(t) = \beta(2t-1)$ pour $1/2 < t \leq 1$ est un chemin continu de x à z car si F est un fermé de Y, on a

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(F) =& \{t \in [0,1/2] \mid \gamma(2t) \in F\} \cup \{t \in [1/2,1] \mid \beta(2t-1) \in F\} \\ =& ([0,1/2] \cap \frac{\gamma^{-1}(F)}{2}) \cup ([1/2,1] \cap \frac{\beta^{-1}(F)+1}{2})\end{aligned}$$

qui est une réunion de deux fermés, donc un fermé. □

Proposition B.6. Soit X un espace topologique avec $X = \cup_{i \in I} A_i$ où les A_i sont des parties connexes par arcs telles que $\forall i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Alors X est connexe par arcs.

Preuve. Soient $x, y \in X$ et i, j tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$. Soit $z \in A_i \cap A_j$. La connexité par arcs de A_i et A_j assure qu'il existe des chemins continus de x à y et de y à z, et le lemme précédent assure qu'il existe un chemin continu de x à z. □

Définition B.7. *Soit X un espace topologique. Une* ***composante connexe par arcs de*** *X est une partie connexe par arcs maximale de X.*

Proposition B.8. Soit X un espace topologique. Tout $x \in X$ est contenu dans une unique composante connexe par arcs. Les composantes connexes par arcs de X forment donc une partition de X.

Preuve. La preuve est la même que pour les composantes connexes, grâce à la proposition précédente. □.

Définition B.9. *Un espace topologique X est dit **localement connexe par arcs** si pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe un voisinage U de x connexe par arcs et contenu dans V.*

Proposition B.10. Dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs sont à la fois ouvertes et fermées.

Preuve. La preuve est la même que pour les composantes connexes. □

On en déduit un cas important où la connexité par arcs est équivalente à la connexité.

Corollaire B.11. Un espace topologique connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

Preuve. Soit C un composante connexe par arcs de l'espace topologique connexe et localement connexe par arcs X. Alors C est un ouvert fermé de X, donc $C = X$ et X est connexe par arcs. □.

VI Quotients d'espaces topologiques

Ce chapitre est consacré à la notion d'espace topologique quotient, très utile à la fois pour construire de nouveaux espaces topologiques et pour obtenir des homéomorphismes.

A Rappels sur les relations d'équivalence et les ensembles quotients

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Rappelons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\forall x, y, z \in E$, on a

1. $x\mathcal{R}x$ (réflexivité).
2. $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ (symétrie).
3. $[x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z] \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (transitivité).

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. **La classe d'équivalence de** x **modulo** $\mathcal{R}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E \,| x\mathcal{R}y\} \subset E.$$

On note $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes modulo $\mathcal{R}$ d'éléments de E : cet ensemble est appelé **l'ensemble quotient de** E **par** $\mathcal{R}$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.

Autres notations : $\mathrm{Cl}(x) = \overline{x}$, $\mathrm{Cl}(x) = \dot{x}$... Ces notations sont interchangeables.

L'application

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow E/\mathcal{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{Cl}(x) \end{aligned}$$

est appelée la **surjection canonique** de E vers $E/\mathcal{R}$.

Les classes déquivalences d'un ensemble E modulo une relation déquivalence forment une partition de E, car pour tout $x \in E$, on a $x \in \mathrm{Cl}(x)$ et pour tous $x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y \iff \mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$.

Réciproquement toute partition détermine une unique relation déquivalence.

Exemple A.1. Relation d'équivalence associée à une application.

Soient E et F des ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $\mathcal{R}_f$ la relation sur E définie par $x\mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y)$. Alors $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence sur E. Pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

Exemple A.2. Espaces homogènes.

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. La relation $\mathcal{R}_H$ sur G définie par

$$x\mathcal{R}_H y \iff x^{-1}y \in H$$

est une relation d'équivalence sur G. On note G/H l'ensemble $G/\mathcal{R}_H$, c'est l'ensemble des classes à gauche de G modulo H. La classe à gauche modulo H de $x \in G$ est l'ensemble $xH = \{xh,\ h \in H\}$.

Exemple A.3. Espace d'orbites.

Soit G un groupe opérant sur un ensemble E. On note E/G l'ensemble des orbites de G : c'est l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \iff \exists g \in G$ tq $y = g.x$ (x et y sont dans la même orbite).

Définition A.4. *Soient E et F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On dit que f est compatible avec $\mathcal{R}$ si*

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Théorème A.5 (Théorème de factorisation ensembliste)**.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Si f est compatible avec $\mathcal{R}$, alors il existe une unique application $\bar{f} : E/\mathcal{R} \longrightarrow F$ telle que $\bar{f} \circ q = f$, où $q : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ est la surjection canonique.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & F \\ & E/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Théorème A.6 (Théorème d'isomorphisme ensembliste)**.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f induit une bijection

$$E/\mathcal{R}_f \simeq f(E).$$

B Topologie quotient

Définition B.1. *Soit E un espace topologique, soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et soit $q : E \to E/\mathcal{R}$ la surjection canonique. Il existe une unique topologie sur $E/\mathcal{R}$ telle que pour toute partie U de $E/\mathcal{R}$, U est ouvert dans $E/\mathcal{R} \iff q^{-1}(U)$ est ouvert dans E. L'espace topologique $E/\mathcal{R}$ est appelé **l'espace topologique quotient de** E **par** $\mathcal{R}$. La surjection canonique $q : E \to E/\mathcal{R}$ est continue.*

On vérifie sans difficulté que cela définit bien une topologie sur $E/\mathcal{R}$. Bien sûr, pour $A \subset E/\mathcal{R}$, on a A fermé $\iff q^{-1}(A)$ fermé dans E.

Les théorème de factorisation et d'isomorphisme ensemblistes ont les analogues topologiques suivants.

Théorème B.2 (Théorème de factorisation topologique)**.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue entre espaces topologiques et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Si f est compatible avec $\mathcal{R}$, alors il existe une unique application continue $\bar{f} : E/\mathcal{R} \longrightarrow F$ telle que $\bar{f} \circ q = f$, où $q : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ est la surjection canonique.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & F \\ & E/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve. L'existence de l'application $\bar{f}$ est assurée par le théorème de factorisation ensembliste. Si U est un ouvert de F, alors $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(U) = (\bar{f} \circ q)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ est ouvert car f est continue, donc $\bar{f}^{-1}(U)$ est ouvert et $\bar{f}$ est continue. $\square$.

Théorème B.3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue entre espaces topologiques. Alors f induit une bijection continue $E/\mathcal{R}_f \to f(E)$, qui est un homéomorphisme si f est ouverte ou fermée.

Preuve. L'application précédente $\bar{f}$ induit une bijection continue $\bar{f} : E/\mathcal{R}_f \to f(E)$. Supposons f ouverte. Si U est un ouvert de $E/\mathcal{R}_f$, $q^{-1}(U)$ est un ouvert de E et donc $f(q^{-1}(U)) = \bar{f}(U)$ est un ouvert de F, donc de $f(E)$. Ainsi $\bar{f}$ est ouverte et est un homéomorphisme. Même preuve si f est fermée. $\square$

Exemple B.4. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $[0,1]$ obtenue en identifiant les points 0 et 1 ($x\mathcal{R}y \iff x = y$ ou $\{x,y\} \subset \{0,1\}$). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $f(t) = e^{2i\pi t}$. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$, donc f induit une bijection continue entre $[0,1]/\mathcal{R}$ et $\mathbb{S}^1$ qui est un homéomorphisme car $[0,1]/\mathcal{R}$ est quasi-compact et $\mathbb{S}^1$ est compact.

Exemple B.5. La bande de Moebius. La bande de Moebius est l'espace topologique obtenu à partir de $[0,1] \times [-1,1]$ en identifiant les points $(0,y)$ et $(1,-y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire que c'est l'espace topologique quotient de $[0,1] \times [-1,1]$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$(t,y)\mathcal{R}(t',y') \iff (t,y) = (t',y') \text{ ou } [\{t,t'\} = \{0,1\} \quad \text{et} \quad y' = -y]$$

Il est clair que la bande de Moebius est un espace quasi-compact, et on verra plus loin que c'est un espace séparé (donc compact).

Exemple B.6. On munit $\mathbb{R}$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. On peut vérifier que l'espace topologique quotient, noté $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, est l'espace topologique grossier.

L'exemple précédent montre qu'un espace topologique quotient n'est pas forcément séparé. Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'un espace topologique quotient soit séparé. Des illustrations seront données dans le paragraphe suivant.

Théorème B.7. Soient E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Supposons les deux conditions suivantes réalisées.

1. La relation $\mathcal{R}$ est ouverte, c'est-à-dire que la surjection canonique $q : E \to E/\mathcal{R}$ est ouverte.
2. Le graphe $\Gamma = \{(x,y) \in E \times E,\ x\mathcal{R}y\}$ de $\mathcal{R}$ est fermé dans $E \times E$.

Alors l'espace topologique quotient $E/\mathcal{R}$ est séparé.

Preuve. Soient $u = q(x)$ et $v = q(y)$ des points distincts de $E/\mathcal{R}$. Alors $(x,y) \notin \Gamma$. Par la deuxième hypothèse il existe un ouvert W de $E \times E$ tel que $(x,y) \in W$ et $W \cap \Gamma = \emptyset$. Donc par définition de la topologie produit il existe U, V des ouverts de E tels que $x \in U$, $y \in V$ et $(x,y) \in U \times V$ et $(U \times V) \cap \Gamma = \emptyset$.

Par la première hypothèse, $q(U)$ et $q(V)$ sont des ouverts de $E/\mathcal{R}$, contenant respectivement $u = q(x)$ et $v = q(y)$. On a $q(U) \cap q(V) = \emptyset$, car si on avait $w = q(a) = q(b)$ avec $a \in U$, $b \in V$, alors on aurait $(a,b) \in \Gamma \cap (U \times V)$. Ainsi $E/\mathcal{R}$ est séparé. □

C Exemples

C.1 Espaces homogènes

Définition C.1. *Un **groupe topologique** est un espace topologique G, muni d'une structure de groupe compatible avec sa topologie, c'est-à-dire que les applications*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (x,y) &\mapsto xy \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sont continues.

Exemples C.2.

1. Un groupe discret est un groupe topologique.
2. Si E est un espace vectoriel normé, $(E,+)$ est un groupe topologique.
3. Un sous-groupe d'un groupe topologique est un groupe topologique (pour la structure de groupe et la topologie induites).
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (ainsi que leurs sous-groupes) sont des groupes topologiques.

En effet : La seule assertion qui n'est pas une vérification immédiate est la dernière. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La multiplication des matrices est continue sur l'espace de dimension finie $M_n(\mathbb{K})$, car bilinéaire, donc continue en restriction au sous-espace $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui a une matrice M associe la matrice des cofacteurs $\tilde{M}$ est continue car polynomiale sur chaque composante, ainsi que l'application transposée, le déterminant est continu (car polynomial) et ne s'annule pas sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc l'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\tilde{M}$ est continue. □

Proposition C.3. Soit G un groupe topologique. Alors pour tout $g \in G$, les applications

$$l_g : G \longrightarrow G, \qquad r_g : G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto gx \qquad x \longmapsto xg$$

sont des homéomorphismes.

Preuve. Soit $g \in G$. L'application l_g est la composée des applications continues

$$G \longrightarrow G \times G \qquad G \times G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto (g, x) \qquad (x, y) \longmapsto xy.$$

Elle est donc continue. D'autre part elle est bijective, d'application réciproque $l_{g^{-1}}$, qui est elle aussi continue : l_g est donc un homéomorphisme. Une preuve similaire assure que r_g est un homéomorphisme. $\square$

Si G est un groupe topologique et H est un sous-groupe de G, on peut donc considérer l'espace topologique quotient G/H, c'est ce que l'on appelle un **espace homogène**.

Exemple C.4. L'espace homogène $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

En effet : L'application $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{2i\pi t}$ induit une bijection continue entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{S}^1$. Comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est quasi-compact ($\mathbb{R}/\mathbb{Z} = q([0,1])$) et $\mathbb{S}^1$ est séparé, on en déduit que c'est un homéomorphisme. $\square$

Il suit que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est séparé. En fait on connait une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace homogène est séparé.

Théorème C.5. Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Alors la surjection canonique $q : G \to G/H$ est ouverte, et G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G.

Preuve. Si U est un ouvert de G, alors $q^{-1}(q(U)) = \cup_{h \in H} Uh$, qui est une réunion d'ouverts (les translations sont des homéomorphismes) donc $q(U)$ est ouvert dans G/H, et la surjection canonique est ouverte.

Si G/H est séparé, ses points sont fermés, et donc $H = q^{-1}(q(H))$ est fermé. Supposons H fermé. On veut appliquer le critère de séparation du paragraphe précédent. On sait déjà que la surjection canonique est ouverte. Considérons l'application continue $\gamma : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x^{-1}y$. Le graphe Γ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_H$ est égal à $\gamma^{-1}(H)$, il est donc fermé si H l'est. On conclut que G/H est séparé. $\square$

Exemple C.6. Pour $n \geq 1$, considérons l'application $i : \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$i(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

i est un morphisme de groupes et induit un homéomorphisme entre $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et son image par i. Ainsi on peut considérer $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ comme un sous-groupe de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$. C'est un sous-groupe fermé (car compact), l'espace homogène $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est donc séparé (et compact). On peut montrer que en fait $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^n$, et en déduire, par récurrence, une preuve de la connexité de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

C.2 Espaces d'orbites

Définition C.7. *Soient E un espace topologique et G un groupe topologique. Une* ***opération continue de** G **sur** E* *est la donnée d'une application continue*

$$\begin{aligned} G \times E &\to E \\ (g,x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

satisfaisant les axiomes usuels d'opération de groupe sur un ensemble : $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall x \in E$, $g_1(g_2.x) = (g_1g_2).x$, $1.x = x$.

La preuve du résultat suivant est laissée en exercice.

Proposition C.8. Soit G un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique E. Alors pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned} l_g : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Remarque C.9. Si le groupe G est discret, la donnée d'une opération continue de G sur E est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Homeo}(E)$.

Si G est un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique E, on munit l'espace des orbites de la topologie quotient.

Proposition C.10. Soit G un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique E. La surjection canonique $q : E \to E/G$ est ouverte.

Preuve. Si U est un ouvert de E, alors $q^{-1}(q(U)) = \cup_{g\in G} gU$, chaque gU étant ouvert par la proposition précédente, donc est ouvert. Donc $q(U)$ est un ouvert de E/G. □

Théorème C.11. Soit G un groupe topologique compact opérant continûment sur un espace topologique compact E. Alors l'espace des orbites E/G est compact (en particulier séparé).

Preuve. Soit $q : E \to E/G$ la sujection canonique. Comme $E/G = q(E)$, on sait que E/G est quasi-compact, et comme q est ouverte, pour montrer que E/G est séparé, il suffit de voir que le graphe Γ de la relation d'équivalence qui définit E/G est fermé dans $E \times E$. Soit $\kappa : G \times E \to E \times E$, $(g,x) \mapsto (g.x, x)$. C'est une application continue avec $\Gamma = \kappa(G \times E)$, donc Γ est un sous-espace compact de l'espace séparé $E \times E$, il est donc fermé dans $E \times E$, et E/G est donc séparé. □

Exemple C.12. Espaces projectifs. Considérons l'opération continue de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (\lambda, (x_1, \dots x_{n+1})) &\longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) \end{aligned}$$

L'espaces des orbites $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ est noté $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, et est appelé l'espace projectif réel de dimension n. Il s'identifie à l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$. C'est un espace topologique compact. En effet soit

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

τ est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^n$, et induit une opération continue du groupe cyclique à deux éléments $\mathbb{Z}_2$ $(= \{\pm 1\})$ sur $\mathbb{S}^n$. L'espace des orbites $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ est un espace topologique compact par le théorème précédent, et on démontre que l'inclusion $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, ce qui montre la compacité de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Définition C.13. *Soit G un groupe toplogique opérant continûment sur un espace topologique E. On dit que G opère **proprement** sur E si pour tout compact K de E, l'ensemble $G_K = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G, c'est-à-dire que $\overline{G_K}$ est compact dans G.*

Exemple C.14. Lorsque G est compact cette condition est toujours vérifiée. Lorsque G est discret cette condition est vérifiée si et seulement si pour tout compact K de E, G_K est fini.

Théorème C.15. Soit G un groupe discret opérant proprement sur un espace localement compact E. Alors E/G est localement compact (en particulier séparé).

Preuve. Comme q est ouverte, pour montrer que E/G est séparé, il suffit de voir que le graphe Γ de la relation d'équivalence qui définit E/G est fermé dans $E \times E$. Soit $(x, y) \in (E \times E) \setminus \Gamma$. Pour montrer que Γ est fermé, il suffit de voir qu'il existe des voisinages V, W de x et y respectivement tels que $\forall g \in G$, $V \cap gW = \emptyset$. Soient K, L des voisinages compacts disjoints de x et y respectivement (E localement compact). Comme $G_{K \cup L}$ est fini (hypothèse de propreté), l'ensemble des $g \in G$ tels que $gL \cap K$ soit non vide est fini, notons $g_1, \dots, g_n$ ces éléments de G. Pour tout i on a $x \neq g_i.y$, donc pour tout i il existe des voisinages compacts A_i et B_i de x et y respectivement tels que $A_i \cap g_i B_i = \emptyset$ (les applications $x \mapsto g_i.x$ sont de homéomorphismes). Soient donc

$$V = K \cap (\cap_{i=1}^n A_i), \quad W = L \cap (\cap_{i=1}^n B_i)$$

On voit facilement que $\forall g \in G$, $V \cap gW = \emptyset$, et donc E/G est séparé. On voit facilement que E/G est localement compact (car q est ouverte). $\square$

Exemple C.16. Le groupe $\mathbb{Z}$ opère sur $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1] \\ (n, (x, y)) &\longmapsto (x + n, (-1)^n y) \end{aligned}$$

On peut vérifier que cette opération est continue et propre. Ainsi l'espace des orbites $(\mathbb{R} \times [-1, 1])/\mathbb{Z}$ est localement compact. On voit par ailleurs que l'application naturelle $[0, 1] \times$

$[-1,1] \to (\mathbb{R} \times [-1,1])/\mathbb{Z}$ induit une bijection continue entre la bande de Moebius M et $(\mathbb{R} \times [-1,1])/\mathbb{Z}$. Ainsi comme M est quasi-compact et que $(\mathbb{R} \times [-1,1])/\mathbb{Z}$ est séparé, on en déduit que M et $(\mathbb{R} \times [-1,1])/\mathbb{Z}$ sont homéomorphes (M étant donc compact).

Il existe des situations intéressantes (voir le chapitre suivant) où la surjection canonique n'est pas seulement ouverte, mais possède la propriété suivante.

Définition C.17. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est un **homéomorphisme local** si pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U de X contenant x et un ouvert V de Y contenant $f(x)$ tel que f induise un homéomorphisme entre U et V.*

Remarque C.18. Un homéomorphisme local est une application ouverte.

Définition C.19. *Soit G un groupe opérant sur un ensemble E. On dit que G opère **librement** sur E si $\forall g \in G, \forall x \in E, g.x = x \Rightarrow g = 1$.*

Théorème C.20. Soit G un groupe discret opérant continûment, proprement et librement sur un espace localement compact E. Alors la surjection canonique $q : E \to E/G$ est un homéomorphisme local.

Preuve. Admettons tout d'abord que pour tout $x \in E$, il existe un ouvert U contenant x tel que $\forall g \in G \setminus \{1\}$, $U \cap gU = \emptyset$ $(\star)$. Alors $q_{|U}$ est injective, et q étant ouverte, elle induit un homéomorphisme entre U et $q(U)$. Ainsi q est un homéomorphisme local. On doit donc montrer cette propriété $(\star)$.

Soit K un voisinage compact de x. L'ensemble $G_K = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini par hypothèse : écrivons $G_K = \{g_0, \dots, g_m\}$ avec les g_i deux à deux distincts et $g_0 = 1$. L'action étant libre, pour tout $i \geq 1$, on a $x \neq g_i.x$, et donc il existe des voisinages U_i, V_i respectifs de x et $g_i.x$ tels que $U_i \cap V_i = \emptyset$. Soit U_i' un voisinage ouvert de x tel que $g_i U_i' \subset V_i$. Posons

$$V = K \cap (\cap_{i=1}^m U_i \cap U_i')$$

C'est un voisinage de x, et pour $g \in G$, on a

$$gV \cap V = (gK \cap K) \cap \left(\cap_{i=1}^m gU_i \cap U_i \cap gU_i' \cap U_i'\right)$$

Si $g \notin G_K$, le premier ensemble est vide, et si $g \in G_K \setminus \{1\}$, le deuxième est vide (car $U_i \cap g_i U_i' \subset U_i \cap V_i$). Dans tous les cas, si $g \neq 1$, $gV \cap V = \emptyset$. On obtient donc facilement l'ouvert U annoncé. □

Exemple C.21. La surjection canonique $q : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme local.

VII Introduction aux variétés topologiques

Les variétés topologiques sont des espaces topologiques qui ont localement les mêmes propriétés que $\mathbb{R}^n$. Ce dernier chapitre est une très brève introduction.

A Définitions

Définition A.1. *Un espace topologique X est dit* ***localement euclidien de dimension*** $n \geq 0$ *si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U de X contenant x qui est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Définition A.2. *Une* ***variété topologique de dimension*** $n \geq 0$ *est un espace topologique M séparé et localement euclidien de dimension $n \geq 0$.*

On ajoute en général d'autres axiomes pour la définition d'une variété topologique, par exemple la séparabilité (existence d'une partie dénombrable dense), qui assurent que la variété n'a "pas trop d'ouverts". Ces propriétés sont toujours vérifiées dans le cas compact.

Exemples A.3.

1. Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n.
2. Un espace topologique discret est une variété topologique de dimension 0.
3. Si M est une variété topologique de dimension n et N est une variété topologique de dimension m, alors $M \times N$ est une variété toplogique de dimension $n + m$.

Définition A.4. *Une* ***carte*** *d'une variété topologique (de dimension n) M est un couple (U, φ) où U est un ouvert de M et φ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un* ***atlas*** *de M est une famille de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telle que les U_i recouvrent X.*

La terminologie est évidente si l'on pense à l'exemple de la sphère $\mathbb{S}^2$ (voir le paragraphe suivant).

Exemple A.5. Si U est un ouvert de M, une variété topologique de dimension n, alors U est une variété topologique de dimension n car si $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est un atlas de M, alors $(U_i \cap U, \varphi_{i_{|U_i \cap U}})_{i \in I}$ est un atlas de U.

Proposition A.6. Une variété topologique est localement compacte.

Preuve. Soit M une variété topologique de dimension n, soit $x \in M$ et soit (U, φ) une carte de M telle que $x \in M$. $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc est localement compact. Si K est un voisinage compact de $\varphi(x)$ contenu dans $\varphi(U)$, alors $\varphi^{-1}(K)$ est un voisinage compact de x. $\square$

B Exemples

Proposition B.1. La sphère euclidienne $\mathbb{S}^n$ est une variété topologique de dimension n.

Preuve. Considérons $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ la projection sur la dernière composante. Alors

$$U = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \geq -\frac{1}{2}\} = p^{-1}(]-\frac{1}{2}, +\infty[)$$

$$V = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \leq \frac{1}{2}\} = p^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$$

sont des ouverts de $\mathbb{S}^n$ tels que $\mathbb{S}^n = U \cup V$. La projection stéréographique de pôle nord N est un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{R}^n$, elle induit donc un homéomorphisme entre V et un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Même chose pour U, en utilisant la projection stéréographique de pôle sud S. On a donc le résultat (on aurait en fait pu prendre $U = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et $V = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$). $\square$

Exemple B.2. Le tore $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^{\times n}$ est une variété topologique de dimension n.

Proposition B.3. Soient M et X des espaces topologiques et $f : M \to X$ un homéomorphisme local surjectif. Si X est séparé et si M est une variété topologique de dimension n, il en est de même de X.

Preuve. Déjà on a supposé X séparé, il reste donc à voir qu'il est localement euclidien de dimension n. Soit $x \in X$. Il existe $m \in M$ tel que $f(m) = x$ et des ouverts U, V de M et X respectivement tels que $m \in U$, $x \in V$, et f induise un homéomorphisme de U dans V. Soit (W, φ) une carte M telle que $m \in W$. $W \cap U$ est un ouvert de U, donc $f(W \cap U)$ est un ouvert de V, donc de X. De plus $\varphi_{|U\cap W}$ est un homéomorphisme entre $W \cap U$ est un ouvert de $\varphi(U)$, donc de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la composée

$$f(W \cap U) \xrightarrow{f^{-1}_{|f(W\cap U)}} W \cap U \xrightarrow{\varphi_{|W\cap U}} \varphi(W \cap U)$$

est un homéomorphisme de $f(W \cap U)$ avec un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $x = f(m) \in f(W \cap U)$. $\square$

Corollaire B.4. Soit G un groupe discret opérant proprement et librement sur M, une variété topologique de dimension n. Alors M/G est une variété topologique de dimension n.

Preuve. M est localement compacte, donc la surjection canonique $q : M \to M/G$ est un homéomorphisme local surjectif et M/G est séparé, et ainsi il suffit d'appliquer la proposition précédente. $\square$

Exemple B.5. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une variété topologique (compacte) de dimension n.

Preuve. On sait que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ pour une opération continue, propre et libre du groupe fini $\mathbb{Z}_2$.

Remarque B.6. Les espaces topologiques $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}^1$ sont homéomorphes, mais $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas homéomorphes (nous n'avons pas les outils pour démontrer cela).

C Quelques résultats marquants

Dans ce dernier paragraphe, on énonce trois résultats marquants sur les variétés topologiques. On ne montrera que le premier.

Théorème C.1. Soit M une variété topologique compacte de dimension n. Alors M se plonge dans $\mathbb{R}^d$ pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'un espace topologique X se plonge dans un espace topologique Y s'il existe une application injective et continue $f : X \to Y$ induisant un homéomorphisme entre X et $f(X)$.

On aura besoin de deux lemmes généraux.

Lemme C.2. Soit X un espace topologique compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X. Il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in I}$ de X tel que $\forall i \in I$, $\overline{V_i} \subset U_i$.

Preuve. Soit $x \in X$. Il existe $i_x \in I$ tel que $x \in U_{i_x}$. Comme X est localement compact, il existe K_x un voisinage compact de x tel que $K_x \subset U_{i_x}$, et si W_x est un ouvert contenant x et contenu dans K_x, on a $\overline{W_x} \subset K_x \subset U_{i_x}$. Les $(W_x)_{x\in X}$ forment un recouvrement ouvert du compact X, on peut donc extraire un sous-recouvrement fini $(W_{x_k})_{1\leq k\leq p}$. Considérons alors, pour tout $i \in I$,

$$V_i = \bigcup_{k, i_{x_k}=i} W_{x_k} \subset U_i$$

Alors $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X et pour tout i on a $\overline{V_i} = \cup_{k,i_{x_k}=i}\overline{W_{x_k}} \subset U_i$ (car la réunion est finie). □

Lemme C.3. Soient X un espace topologique, U un ouvert de X et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue telle que $\overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}} \subset U$. Alors f se prolonge en une application continue sur X (et valant 0 sur $X \setminus U$).

Preuve. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in U$, $g(x) = 0$ si $x \notin U$. Il faut montrer que g est continue. Soit $F = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}$. On a $X = U \cup X \setminus F$, et U et $X \setminus F$ sont des ouverts de X. On a $g_{|U} = f$ continue, et $g_{|X\setminus F} = 0$ continue, donc g est continue sur X. □

Preuve du théorème. Soit $(U_i, \varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ un atlas fini de M (M est compacte). Soit $(V_i)_{1\leq i\leq N}$ un recouvrement ouvert de M tel que $\forall i$, $\overline{V_i} \subset U_i$ (premier lemme). Pour chaque i, soit $f_i : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f_i = 1$ sur le compact $\overline{V_i}$ et $\mathrm{Supp}(f_i) \subset U_i$ (l'existence du f_i est une conséquence du lemme d'Uryshon, voir chapitre IV). Soit $g_i = \varphi_i f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$. C'est une fonction continue avec

$$\overline{\{x \in U_i \mid g_i(x) \neq 0\}} \subset \overline{\{x \in U_i \mid f_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$$

et ainsi le lemme précédent assure que g_i se prolonge en une fonction continue $h_i : X \to \mathbb{R}^n$ valant 0 en dehors de U_i. Soit

$$\begin{aligned} F : M &\to \mathbb{R}^{N(n+1)} \\ x &\mapsto (h_1(x), \ldots, h_N(x), f_1(x), \ldots, f_N(x)) \end{aligned}$$

F est continue car chacune de ses composantes l'est. Montrons que F est injective. Soient $x, y \in M$ tels que $F(x) = F(y)$. Alors pour tout i, $f_i(x) = f_i(y)$. Les V_i recouvrent X, donc il existe i tel que $x \in V_i$, donc $f_i(x) = 1 = f_i(y)$, d'où $y \in U_i$. On a alors $f_i(x)\varphi(x) = h_i(x) = h_i(y) = f_i(y)\varphi_i(y)$ et $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ et finalement, comme φ_i est injective, on a $x = y$. Ainsi F induit une bijection continue $M \to F(M)$, et M étant compact, c'est un homéomorphisme. □

On termine en énonçant, à titre informatif, deux résultats de classification.

Théorème C.4. Une variété topologique compacte et connexe de dimension 1 est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Théorème C.5. Toute variété topologique compacte et connexe de dimension 2 peut s'obtenir grâce à certaines constructions (sommes connexes) à partir de

$$\mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{T}^2$$