

N -complexes et algèbres de Hopf

Julien Bichon

Laboratoire de mathématiques appliquées. Université de Pau et des pays de l'Adour. Avenue de l'université, 64000 Pau. E-mail : Julien.Bichon@univ-pau.fr

Résumé. On montre que la catégorie des N -complexes est monoïdalement équivalente à la catégorie des comodules sur une certaine algèbre de Hopf. Cela généralise un résultat précédent de Pareigis dans le cas $N = 2$.

N -complexes and Hopf algebras

Abstract. We show that the category of N -complexes is monoidally equivalent to the category of comodules over a well chosen Hopf algebra. This generalizes Pareigis' previous result for $N = 2$.

1. Introduction

Un N -complexe est un module \mathbb{Z} -gradué muni d'un endomorphisme d de degré -1 tel que $d^N = 0$, le cas $N = 2$ correspondant au cas des complexes usuels. De tels objets ont été abondamment utilisés dans les travaux de Dubois-Violette [3, 4], Dubois-Violette et Kerner [6], et Kapranov [7] sur le calcul différentiel quantique. Ils ont également été exploités par Berger, Dubois-Violette et Wambst [1] dans leurs travaux sur les algèbres N -homogènes. L'algèbre homologique des N -complexes a été développée par Kapranov [7] puis Kassel et Wambst [9]. On consultera [1, 5] pour une bibliographie plus complète.

Un résultat de Pareigis [11], antérieur à l'ère des groupes quantiques, assure que la catégorie des complexes est monoïdalement équivalente à la catégorie des comodules d'une algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative. Dans cette note on généralise le résultat de Pareigis au cas des N -complexes, avec N un entier supérieur ou égal à 2. L'algèbre de Hopf obtenue possède des relations étroites avec les algèbres quantiques associées à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ (voir [8]).

Un résultat relativement proche est énoncé par Dubois-Violette dans [5] (appendice A) : la catégorie des \mathbb{Z}_N -complexes, qui peut être vue comme une sous-catégorie de celle des N -complexes, est monoïdalement équivalente à la catégories des modules sur une algèbre de Hopf (en fait une algèbre de Taft, donc un quotient de l'algèbre de Hopf que nous considérons ici). Pour la catégorie entière des N -complexes, l'usage des comodules est nécessaire pour reconstruire la \mathbb{Z} -graduation.

2. Notations et conventions

Soit K un anneau commutatif et soit q un inversible de K . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les q -nombres

$$(n)_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} \quad \text{et} \quad n!_q = (n)_q \dots (1)_q \quad (0!_q = 1).$$

On fixe un entier $N \geq 2$ et un anneau commutatif K contenant un élément inversible q tel que $(N)_q = 0$ et tel que pour tout entier $0 < n < N$, le q -nombre $(n)_q$ soit inversible dans K . On peut alors considérer, pour $0 \leq k \leq n \leq N$, les q -coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k}_q = \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q}.$$

Ces hypothèses sont vérifiées en particulier si K est un corps et si $q \in K^*$ est une racine primitive N -ième de l'unité.

3. N -complexes et leur q -produit tensoriel

Rappelons tout d'abord qu'un N -complexe est un K -module \mathbb{Z} -gradué $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ muni d'un endomorphisme d de degré -1 (appelé différentielle) tel que $d^N = 0$. La catégorie des N -complexes est notée $\mathbf{Comp}_N(K)$: les morphismes sont les morphismes de K -modules \mathbb{Z} -gradés commutant aux différentielles.

Le produit tensoriel de N -complexes a été défini par Kapranov [7]. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux N -complexes. Leur q -produit tensoriel $(M \otimes_q N, d_{M \otimes_q N})$ est défini de la manière suivante. En tant que K -module \mathbb{Z} -gradué, on a

$$M \otimes_q N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{k+j=i} M_k \otimes M_j \right),$$

et la différentielle est donnée par

$$d_{M \otimes_q N}(m \otimes n) = d_M(m) \otimes n + q^{-i} m \otimes d_N(n), \quad m \in M_i, \quad n \in N_j.$$

L'identité $d_{M \otimes_q N}^N = 0$ provient du lemme suivant, qui sera utile par la suite.

Lemme 1 ([7]) *Pour $m \in M_i$, $n \in N_j$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$d_{M \otimes_q N}^p(m \otimes n) = \sum_{k=0}^p q^{-(p-k)i} \binom{p}{k}_q d_M^k(m) \otimes d_N^{p-k}(n).$$

Notons que l'on a changé la convention de [7] en remplaçant q par q^{-1} , cela permet d'utiliser des q -coefficients binomiaux à la place de q^{-1} -coefficients binomiaux. Il est immédiat que $(\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_q)$, muni des contraintes d'unité et d'associativité évidentes, est une catégorie monoïdale (ou tensorielle, voir [8]). Le foncteur oubli $\Omega : (\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_q) \rightarrow \mathbf{Mod}(K)$ est monoïdal strict.

4. L'algèbre de Hopf $A(q)$

L'algèbre $A(q)$ est le quotient de l'algèbre libre $K\{x, t, t^{-1}\}$ par l'idéal bilatère engendré par les relations :

$$tt^{-1} = 1 = t^{-1}t \quad , \quad xt = qtx \quad , \quad x^N = 0.$$

Proposition 2 1) *L'algèbre $A(q)$ est une algèbre de Hopf. Le coproduit Δ est défini par $\Delta(x) = x \otimes 1 + t^{-1} \otimes x$ et $\Delta(t) = t \otimes t$; la co-unité ε est définie par $\varepsilon(x) = 0$ et $\varepsilon(t) = 1$; l'antipode S est défini par $S(x) = -tx$ et $S(t) = t^{-1}$. Pour $0 \leq k \leq N-1$, on a*

$$\Delta(x^k) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l}_q x^l t^{l-k} \otimes x^{k-l}.$$

2) *$A(q)$ est un K -module libre de base $\{x^k t^i, 0 \leq k \leq N-1, i \in \mathbb{Z}\}$.*

3) *Il existe un unique morphisme d'algèbres $\Phi : A(q) \rightarrow K$ tel que $S^2 = \Phi * \text{id} * \Phi^{-1}$, avec $\Phi(x) = 0$ et $\Phi(t) = q$.*

La preuve de l'assertion 1 est classique, voir [8], l'ingrédient essentiel étant la q -formule du binôme. L'assertion 2 se montre par exemple en remarquant que l'algèbre $A(q)$ est isomorphe à un produit croisé $K[x]/(x^N) \rtimes K[\mathbb{Z}]$. La preuve de 3 est immédiate : dans le langage de [2] Φ est un caractère souverain sur $A(q)$.

5. L'équivalence de catégories

On note $\mathbf{Comod}(A(q))$ la catégorie des $A(q)$ -comodules à droite.

Théorème 3 *Le foncteur oubli $\Omega : \mathbf{Comp}_N(K) \longrightarrow \mathbf{Mod}(K)$ induit une équivalence de catégories monoïdales*

$$\tilde{\Omega} : (\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_q) \xrightarrow{\approx \otimes} \mathbf{Comod}(A(q)).$$

Preuve. Soit (M, d) un N -complexe. On définit une application K -linéaire $\alpha_M : M \longrightarrow M \otimes A(q)$ en posant, pour $m \in M_i$:

$$\alpha_M(m) = \sum_{k=0}^{N-1} d^k(m) \otimes \frac{x^k t^i}{k!_q}.$$

On vérifie que $\tilde{\Omega}(M) := (M, \alpha_M)$ est un $A(q)$ -comodule. Si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de N -complexes, il est immédiat que f est un morphisme de $A(q)$ -comodules $\tilde{\Omega}(M) \rightarrow \tilde{\Omega}(N)$. On obtient donc un foncteur $\tilde{\Omega} : (\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_q) \longrightarrow \mathbf{Comod}(A(q))$, qui est pleinement fidèle.

Soit maintenant (M, α) un $A(q)$ -comodule. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose $A(q)_i = \bigoplus_{k=0}^{N-1} Kx^k t^i$, et on a $A(q) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A(q)_i$. Ainsi si on pose $M_i = \{m \in M \mid \alpha(m) \in M \otimes A(q)_i\}$, on a $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ car M est un $A(q)$ -comodule et on obtient une \mathbb{Z} -graduation sur M . Soit $\psi_1 : A(q) \longrightarrow K$ l'unique application K -linéaire telle que $\psi_1(x^k t^i) = \delta_{k,1}$ pour $i \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq k \leq N-1$. Posons alors $d = (\text{id}_M \otimes \psi_1) \circ \alpha : M \longrightarrow M$. La coassociativité de α assure que d est de degré -1 . Posons, pour $p \geq 1$, $\psi_p = \psi_1^{\otimes p} \circ \Delta^{(p-1)}$. On a $d^p = (\text{id}_M \otimes \psi_p) \circ \alpha$ et puisque $\psi_N = 0$, on a $d^N = 0$ et (M, d) est un N -complexe. On vérifie que $\tilde{\Omega}(M, d) = (M, \alpha)$. Par conséquent le foncteur $\tilde{\Omega}$ est essentiellement surjectif, et est une équivalence de catégories.

Il reste à voir que $\tilde{\Omega}$ est un foncteur monoïdal. Soient (M, d_M) et (N, d_N) des N -complexes. La formule pour la coaction de $\tilde{\Omega}(M \otimes_q N)$ est ($m \in M_i, n \in N_j$) :

$$\alpha_{M \otimes_q N}(m \otimes n) = \sum_{k=0}^{N-1} d_{M \otimes_q N}^k(m \otimes n) \otimes \frac{x^k t^{i+j}}{k!_q}.$$

La coaction sur le produit tensoriel de comodules est donnée par :

$$\alpha_M \otimes \alpha_N(m \otimes n) = \sum_{k,l=0}^{N-1} d_M^k(m) \otimes d_N^l(n) \otimes \frac{x^k t^i x^l t^j}{k!_q l!_q}.$$

On voit que ces deux formules coïncident en utilisant la relation $tx = q^{-1}xt$ et le lemme 1. On a donc $\tilde{\Omega}(M \otimes_q N) = \tilde{\Omega}(M) \otimes \tilde{\Omega}(N)$ et par conséquent le foncteur $\tilde{\Omega}$ est une équivalence de catégories monoïdales. \square

6. Dépendance du paramètre q

Il est naturel de se demander dans quelle mesure la catégorie monoïdale $(\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_q)$ dépend du choix du paramètre q . Le résultat qui suit répond à cette question.

Proposition 4 *Supposons que K est un corps et soient $q_1, q_2 \in K^*$ satisfaisant au hypothèses du paragraphe 2. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1) Les catégories $(\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_{q_1})$ et $(\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_{q_2})$ sont monoïdalement équivalentes.
- 2) Les catégories $\mathbf{Comod}(A(q_1))$ et $\mathbf{Comod}(A(q_2))$ sont monoïdalement équivalentes.
- 3) $q_1 = q_2$.

Preuve. Les assertion 1 et 2 sont équivalentes par le théorème 3, et il reste donc à montrer que 2) \Rightarrow 3). Commençons par quelques observations sur la catégorie $\mathbf{Comod}(A(q))$. Les objets simples sont les T^i , $i \in \mathbb{Z}$, correspondant aux “group-like” t^i de $A(q)$, ou encore aux uniques N -complexes de dimension 1 concentrés en degré i . Si X et V sont des objets tels que l’on ait une suite exacte non scindée $0 \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow K \rightarrow 0$ avec X simple, alors nécessairement $X \cong T^{-1}$.

Soit maintenant $F : \mathbf{Comod}(A(q_1)) \rightarrow \mathbf{Comod}(A(q_2))$ une équivalence monoïdale. Nécessairement $F(T) \cong T$ ou $F(T) \cong T^{-1}$ (F est monoïdal et $T^i \cong T^{\otimes i}$). Le foncteur F transforme la suite exacte non scindée $0 \rightarrow T^{-1} \rightarrow V \rightarrow K \rightarrow 0$ en une suite exacte non scindée $0 \rightarrow F(T^{-1}) \rightarrow F(V) \rightarrow K \rightarrow 0$, donc par l’observation précédente $F(T) \cong T$. Le foncteur F induit une équivalence monoïdale F_0 entre les catégories de comodules de dimensions finie. Sur de telles catégories les structures souveraines [10] sont en bijection avec les caractères souverains [2], donc par la proposition 2 le foncteur F_0 préserve les structures souveraines, et en particulier les dimensions souveraines [10], notées \dim_{Φ} . Donc puisque $F(T) \cong T$, on a $q_1 = \dim_{\Phi}(T) = \dim_{\Phi}(F(T)) = q_2$. \square

7. Tressages

La catégorie monoïdale des complexes possède une symétrie naturelle. Ce résultat ne se généralise pas aux N -complexes, même dans le cadre plus général des tressages.

Proposition 5 *Supposons que K est un corps et que q est une racine primitive N -ième de l’unité. Alors pour $N \geq 3$, la catégorie monoïdale $(\mathbf{Comp}_N(K), \otimes_q)$ n’admet pas de tressage.*

Preuve. On sait que la donnée d’un tressage sur $\mathbf{Comod}(A(q))$ est équivalente à la donnée d’une application bilinéaire $r : A(q) \otimes A(q) \rightarrow K$ inversible pour la convolution et satisfaisant à certains axiomes (voir [8], définition VIII.5.1). On vérifie que si une telle forme bilinéaire existe, alors $r(t, t)^{-1} = r(t^{-1}, t) = q^{-1} = r(t, t^{-1}) = q$, ce qui implique que $N = 2$. \square

Références

- [1] R. BERGER, M. DUBOIS-VIOLETTE, M. WAMBST, Homogeneous algebras, J. Algebra 261, 2003, 172-185.
- [2] J. BICHON, Cosovereign Hopf algebras, J. Pure Appl. Algebra 157, No.2-3, 2001, 121-133.
- [3] M. DUBOIS-VIOLETTE, Generalized differential spaces with $d^N = 0$ and the q -differential calculus, Czech J. Phys. 46, 1997, 1227-1233.
- [4] M. DUBOIS-VIOLETTE, $d^N = 0$: generalized homology, K-Theory 14, 1998, 371-404.
- [5] M. DUBOIS-VIOLETTE, Lectures on differentials, generalized differentials and on some examples related to theoretical physics, Contemp. Math. 204, 2002, 59-94.
- [6] M. DUBOIS-VIOLETTE, R. KERNER, Universal q -differential calculus and q -analog of homological algebra, Math. univ. Comemian. 65, 1996, 175-188.
- [7] M.M. KAPRANOV, On the q -analog of homological algebra, preprint q-alg/9609012.
- [8] C. KASSEL, Quantum groups, GTM 155, Springer, 1995.
- [9] C. KASSEL, M. WAMBST, Algèbre homologique des N -complexes et homologie de Hochschild aux racines de l’unité, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto 34, 1998, 91-114.

- [10] G. MALTSINIOTIS, Traces dans les catégories monoïdales, dualité et catégories monoïdales fibrées, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, 1995, 195-288.
- [11] B. PAREIGIS, A non-commutative non-cocommutative Hopf algebra in “nature”, J. Algebra 70, 1981, 356-374.