

Modélisation d'un problème physique

Pour étudier et comprendre un problème physique, il faut commencer par le décrire et déterminer les phénomènes qui le gouvernent. C'est l'**étape de modélisation** :

- Description du **domaine d'étude** (dans l'espace et le temps)
- Détermination des **caractéristiques physiques** du problème
- Choix des grandeurs physiques à étudier : ce sont les **inconnues** du problème
- Etablissement des relations entre ces grandeurs : \Rightarrow **des équations**
 \Rightarrow **Le problème est ainsi "mis en équations"**.

L'étape de modélisation peut être réalisée par le physicien ou l'ingénieur mais aussi par le mathématicien.

Un exemple issu de l'industrie pétrolière

Dans un sous-sol a priori riche en pétrole, on injecte un solvant par un puits dit "d'injection". Le solvant se mélange avec le pétrole et le pousse vers un autre puits, dit "d'extraction".

- **Domaine d'étude** : tranche horizontale de réservoir (carré de 1000 mètres de côté) et temps d'étude de 10 ans \Rightarrow variables x et t .
- **Caractéristiques physiques** : porosité, perméabilité, caractéristiques mécaniques du sous-sol, viscosité du mélange fluide, position et débit des puits.
- **Inconnues du problème** : pression et vitesse du mélange fluide, $p(x, t)$ et $U(x, t)$, concentration du fluide injecté (proportion de solvant), $c(x, t)$.
- Les relations entre p , U et c qui régissent le problème constituent un **système d'équations "aux dérivées partielles"**. Il s'agit d'équations qui font intervenir les dérivées des fonctions inconnues par rapport à l'espace et au temps.

Etude théorique

Voici quelques questions qui peuvent se poser concernant l'équation ou le système d'équations obtenu :

- Qu'est-ce qu'une solution ? Le problème posé admet-il une solution ?
- La solution est-elle unique ? (gage du fait que le problème est bien posé)
- Existe-t-il une formule, une expression qui définit la solution ?
- Si elle existe, la solution vérifie-t-elle certaines propriétés attendues par la physique : positivité, existence d'un maximum, régularité... ($0 \leq c(x, t) \leq 1$)
- Quand il existe plusieurs modèles pour le même problème : quel est le domaine de validité de chaque modèle ? Comment passe-t-on de l'un à l'autre ?

Dans bien des cas, on sait démontrer que la solution existe, qu'elle vérifie de bonnes propriétés, mais on ne sait pas pour autant la calculer de manière exacte ! On cherche alors à déterminer une solution approchée.

Calcul d'une solution approchée : des schémas numériques...

S'il n'est pas possible de calculer une solution exacte, définie en tout point de l'espace et du temps, on va en chercher une approximation en certains points de l'espace et du temps. Pour cela, on se donne une **discrétisation** du domaine :

- Un maillage du domaine spatial \Rightarrow points d'approximation,
- Un pas de temps \Rightarrow instants d'approximation,

Un **schéma numérique** définit un **processus de calcul d'une solution approchée** en certains points du maillage et à certains instants. Une partie du travail consiste à :

- Etablir des schémas numériques
- Démontrer que ces schémas définissent une solution approchée, effectivement proche de la solution exacte!!!
- Evaluer les performances (précision, temps de calcul) de ces schémas

Mise en œuvre informatique des schémas : simulations numériques

Les schémas numériques peuvent être programmés sur l'ordinateur et permettent de réaliser des simulations. On peut alors visualiser le comportement de la solution. Les simulations numériques constituent un outil très important pour la compréhension des problèmes physiques considérés et pour la prédiction.

