UFR MATHÉMATIQUES
Université Clermont Auvergne

Licence de mathématiques

deuxième année

Algèbre euclidienne

Notes de cours de François DUMAS - année 2023-2024

version mise à jour du 12 avril 2024

Ces notes correspondent au programme d'une unité d'enseignement de second semestre de la deuxième année de la licence de mathématiques. Elles s'insèrent entre le contenu d'enseignements préalables, en particulier l'UE d'algèbre linéaire du premier semestre de L2, et d'enseignements ultérieurs en L3.

Le mode de rédaction n'est pas celui d'un manuel, mais de simples notes synthétiques destinées à servir de support au travail personnel des étudiantes et étudiants. Elles seront complétées en cours par des explications supplémentaires, des exemples, des détails sur les démonstrations, et en travaux dirigés par des exercices ou problèmes.

Chacune des sept leçons se termine par une synthèse des compétences minimales qui doivent être acquises ; j'insiste sur le caractère vraiment minimal des points listés.

Il subsiste certainement des coquilles ou des erreurs. Merci de m'en faire part.

Francois.Dumas@uca.fr

0 – Table des matières

1 – Formes bilinéaires et formes quadratiques

1.1 Rappels sur les formes linéaires

Lorsque E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies respectives n et p, on connaît la notion fondamentale d'application linéaire de E dans F ; on sait que les applications linéaires de E dans F forment un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \times p$. La notion de forme linéaire correspond au cas où l'on choisit pour F l'espace vectoriel $\mathbb{K}$ (qui est bien un espace vectoriel sur lui-même, de dimension 1).

1.1.1 Définitions et proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Les formes linéaires sur E forment un $\mathbb{K}$-e.v. appelé *espace dual* de E, noté $E^\star$. Si E est de dimension finie n, on a $\dim E^\star = \dim E = n$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ avec $x_j \in \mathbb{K}$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note alors $e_i^\star$ l'application $E \to \mathbb{K}$ qui à un tel x associe sa i-ième coordonnée x_i. Il est facile de voir que $e_i^\star$ est linéaire, et donc $e_i^\star \in E^\star$. Par définition de $e_i^\star$, on a $e_i^\star(e_j) = 1$ si $j = i$ et $e_i^\star(e_j) = 0$ si $j \neq i$. Il en résulte que, pour toute $\ell \in E^\star$, la forme linéaire $\ell' = \sum_{i=1}^n \ell(e_i) e_i^\star$ vérifie $\ell'(e_j) = \ell(e_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$, et l'on a donc $\ell' = \ell$. Ceci montre que toute $\ell \in E^\star$ s'écrit comme une combinaison linéaire des formes de la famille $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, e_2^\star, \dots, e_n^\star)$. C'est donc une famille génératrice de $E^\star$, et puisqu'elle est formée de n éléments et que $E^\star$ est de dimension n, c'est une base de $E^\star$. On retient que :

1.1.2 Définitions et proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, on note $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, e_2^\star, \dots, e_n^\star)$ où $e_i^\star$ est pour tout $1 \leq i \leq n$ la forme linéaire sur E définie par :

$$e_i^\star\left(\textstyle\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = x_i, \quad \text{ou encore par : } e_i^\star(e_j) = 1 \text{ si } j = i \ \text{ et } \ e_i^\star(e_j) = 0 \text{ si } j \neq i.$$

Alors, la famille $\mathcal{B}^\star$ est une base de $E^\star$, appelée *base duale* de $\mathcal{B}$, qui vérifie :

$$\text{pour toute forme linéaire } \ell \in E^*, \text{ on a } \ \ell = \textstyle\sum_{i=1}^n \ell(e_i) e_i^\star.$$

1.2 Notion de forme bilinéaire

1.2.1 Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune des deux variables, ce qui signifie que, quels que soient $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

(i) $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ et $\varphi(\lambda.x, y) = \lambda\varphi(x, y)$,

(ii) $\varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$ et $\varphi(x, \lambda.y) = \lambda\varphi(x, y)$

On dit que φ est *symétrique* lorsque de plus $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ quels que soient $x, y \in E$.

Remarque pratique. Les deux conditions de (i) peuvent être remplacées par l'unique condition $\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z)$, ou même $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z)$, pour tous $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. De même bien sûr pour les conditions (ii).

Si l'on veut montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique, il est préférable de montrer <u>d'abord</u> qu'elle est symétrique, car il suffit <u>ensuite</u> de vérifier (i) <u>ou</u> (ii).

Remarque sur le vocabulaire. On dit pour désigner la propriété (i) de la définition que φ est linéaire à gauche (ou linéaire par rapport à la première variable). On parle de même de linéarité à droite, ou par rapport à la seconde variable, pour la propriété (ii).

Dire que φ est bilinéaire équivaut à dire que, pour tout $a \in E$ fixé, les applications $x \mapsto \varphi(x, a)$ et $x \mapsto \varphi(a, x)$ sont des formes linéaires sur E.

1.2.2 Exemples.

1. Prenons $E = \mathbb{K}^2$. Utilisons la notations $x = (x_1, x_2)$ pour les vecteurs de E.
   L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$ est une forme bilinéaire symétrique.
   L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ est une forme bilinéaire non symétrique.
   L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x_1^2 + y_2^2$ n'est pas bilinéaire.
2. Prenons $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est une forme bilinéaire symétrique.
3. Prenons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tA \times B)$ est une forme bilinéaire symétrique.
4. Prenons $E = \mathbb{K}^3$. Utilisons la notations $x = (x_1, x_2, x_3)$ pour les vecteurs de E. L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto 2x_1y_1 + \frac{1}{4}x_1y_2 + 4x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 + x_3y_1 + 5x_3y_3$ est une forme bilinéaire non symétrique.
5. *Exemple canonique à connaître* : prenons $E = \mathbb{K}^n$. Soit φ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$. Si pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et tout $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de E, le scalaire $\varphi(x, y)$ est une combinaison linéaire à cœfficient dans $\mathbb{K}$ de produits d'une coordonnée x_i de x par une coordonnée y_j de y, c'est-à-dire si
   $$\varphi(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} x_i y_j, \quad \text{avec } \alpha_{ij} \in \mathbb{K},$$
   alors φ est une forme bilinéaire sur E.

1.3 Matrice d'une forme bilinéaire

1.3.1 Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour toute forme bilinéaire φ sur E, on appelle *matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$* la matrice carrée $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ d'ordre n dont le terme général est défini par $\alpha_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

► Il est clair qu'une forme bilinéaire φ est symétrique si et seulement sa matrice dans toute base de E est une matrice symétrique (ie. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ pour tous $1 \le i, j \le n$, ou encore ${}^tA = A$).

1.3.2 Proposition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient φ une forme bilinéaire sur E et A sa matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$. Soient x et y deux vecteurs quelconques de E. En notant X et Y les matrices colonnes des coordonnées respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$, on a
$$\varphi(x, y) = {}^tXAY.$$
De plus φ est une forme bilinéaire symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) & \ldots & \varphi(e_1, e_n) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) & \ldots & \varphi(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \varphi(e_n, e_2) & \ldots & \varphi(e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Preuve. On calcule : $\varphi(x,y)=\varphi\big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\,,\,y\big)=\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi(e_i,y)$, par linéarité à gauche,

d'où : $\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi\big(e_i\,,\,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\big)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}y_j\varphi(e_i,e_j)$, par linéarité à droite

et finalement : $\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\varphi(e_i,e_j)$ d'après les règles de calcul dans $\mathbb{K}$. □

On peut alors reformuler l'exemple 5 de 1.2.2 sous la forme suivante, très importante puisque toute forme bilinéaire en dimension finie s'y ramène d'après la proposition ci-dessus.

► *Exemple canonique.* Prenons $E=\mathbb{K}^n$. Soit φ une application de $E\times E$ dans $\mathbb{K}$. S'il existe une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ de E, on a :

$$\varphi(x,y)=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

alors φ est une forme bilinéaire sur E.

De plus, φ est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.

1.3.3 Proposition (changement de base)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit φ une forme bilinéaire sur E, de matrice A dans la base $\mathcal{B}$ et A' dans la base $\mathcal{B}'$. Alors on a :

$$A'={}^tPAP.$$

Preuve. Soient x et y deux vecteurs quelconques de E. Soient X et Y les matrices colonnes des coordonnées respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Soient X' et Y' les matrices colonnes des coordonnées respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}'$. On sait qu'alors $X=PX'$ et $Y=PY'$. Il résulte de la proposition précédente que $\varphi(x,y)={}^tXAY={}^t(PX')A(PY')={}^tX'({}^tPAP)Y'$. Mais en exprimant parallèlement $\varphi(x,y)$ dans la base $\mathcal{B}'$, on a aussi $\varphi(x,y)={}^tX'A'Y'$.

On obtient donc ${}^tX'A'Y'={}^tX'({}^tPAP)Y'$, et parce que cette égalité est vraie pour toutes X et Y, elle implique que $A'={}^tPAP$. □

1.4 Forme quadratique

1.4.1 Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. Une *forme quadratique* sur E est une application $q:E\to\mathbb{K}$ telle que, dans n'importe quelle base de E, le scalaire $q(x)$ s'exprime pour tout $x\in E$ comme une fonction polynomiale homogène de degré 2 en les n coordonnées de x.

Concrètement, cette condition se traduit par le fait que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, il existe des scalaires $(\lambda_{ij})_{1\le i\le j\le n}$ tels que, pour tout $x\in E$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ii}x_i^2\;+\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_{ij}x_ix_j.$$

Remarquons que cette définition repose sur le fait (sous-entendu mais évident) que, si la condition de la définition est vraie dans une base, elle l'est dans toute base, ce qui résulte du fait les formules de changements de base sont linéaires. Remarquons aussi que la définition inclut le cas de l'application identiquement égale à $0_{\mathbb{K}}$ sur E.

Le résultat suivant montre qu'il existe une correspondance bijective entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.

1.4.2 Théorème et définitions. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n.

(i) Pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur E, l'application $q : E \to \mathbb{K}$ définie par :

$$q(x) = \varphi(x, x) \quad \text{pour tout } x \in E$$

est une forme quadratique sur E, appelée *la forme quadratique associée à* φ.

(ii) Pour toute forme quadratique q sur E, l'application $E \times E \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\varphi(x, y) = \tfrac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] \quad \text{pour tous } x, y \in E,$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E appelée la *forme polaire associée à* q.

Dans cette correspondance, la matrice A de la forme bilinéaire φ dans une base $\mathcal{B}$ de E est aussi appelée la matrice de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve. Soient φ une forme bilinéaires symétrique et $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Comme on l'a vu, on a $\varphi(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} x_i y_j$ pour tous $x, y \in E$.
En appliquant cette égalité pour $x = y$, on obtient :

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i \ne j \le n} \alpha_{ij} x_i x_j \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Mais $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ parce que φ est supposée symétrique, donc

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2\alpha_{ij} x_i x_j \quad \text{pour tout } x \in E,$$

ce qui est bien l'expression d'une forme quadratique dans la base $\mathcal{B}$.

• Réciproquement soit q une forme quadratique sur E et $(\lambda_{ij})_{1 \le i \le j \le n}$ la famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que l'expression de $q(x)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_{ij} x_i x_j \quad \text{pour tout } x \in E.$$

On calcule pour deux vecteurs x et y :

$$\begin{aligned}
q(x + y) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} (x_i + y_i)^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_{ij} (x_i + y_i)(x_j + y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_{ij} (x_i x_j + y_i y_j + x_i y_j + x_j y_i) \\
&= q(x) + q(y) + 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_{ij} x_i y_j + \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_{ij} x_j y_i.
\end{aligned}$$

Définissons alors une famille $(\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ en posant :

$$\alpha_{ij} = \tfrac{1}{2}\lambda_{ij} \text{ si } 1 \le i < j \le n, \quad \alpha_{ij} = \tfrac{1}{2}\lambda_{ji} \text{ si } 1 \le j < i \le n, \quad \text{et} \quad \alpha_{ii} = \lambda_{ii}.$$

L'égalité précédente se réécrit

$$q(x + y) - q(x) - q(y) = 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \le i \ne j \le n} 2\alpha_{ij} x_i y_j = 2\Big(\sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} x_i y_j\Big),$$

de sorte que $\frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] = \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} x_i y_j$ définit bien une forme bilinéaire symétrique sur E. En résumé :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{\substack{\varphi(x,y) = \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} x_i y_j \\ \text{avec } \alpha_{ij} = \alpha_{ji}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \frac{1}{2}\lambda_{12} & \frac{1}{2}\lambda_{13} & \dots & \frac{1}{2}\lambda_{1n} \\ \frac{1}{2}\lambda_{12} & \lambda_{22} & \frac{1}{2}\lambda_{23} & \dots & \frac{1}{2}\lambda_{2n} \\ \frac{1}{2}\lambda_{13} & \frac{1}{2}\lambda_{23} & \lambda_{33} & \dots & \frac{1}{2}\lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}\lambda_{1n} & \frac{1}{2}\lambda_{2n} & \frac{1}{2}\lambda_{3n} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}}_{q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_{ij} x_i x_j}.$$

□

▶ *Un exemple concret.* Considérons la forme quadratique définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ par :
$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4x_1x_4 + x_2x_3 - 6x_3x_4.$$
Sa matrice est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$
qui est aussi la matrice de la forme polaire associée :
$$\begin{aligned} \varphi(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - \tfrac{3}{2}x_1y_3 + 2x_1y_4 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + \tfrac{1}{2}x_2y_3 \\ -\tfrac{3}{2}x_3y_1 + \tfrac{1}{2}x_3y_2 - 3x_3y_4 + 2x_4y_1 - 3x_4y_3 - x_4y_4. \end{aligned}$$

▶ *Exercice (les trois identités de polarisation).* On se place sous les hypothèses du théorème 1.4.2. Montrer que l'on a pour tous $x, y \in E$:
$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \tfrac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)], \\ \varphi(x,y) &= \tfrac{1}{2}[q(x) + q(y) - q(x-y)], \\ \varphi(x,y) &= \tfrac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]. \end{aligned}$$

▶ *Un exercice pour aller plus loin.* Soit E in $\mathbb{K}$-e.v. Montrer que les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques sur E forment deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Montrer que l'application qui à toute forme bilinéaire symétrique associe sa forme quadratique associée est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v. , et expliciter l'isomorphisme réciproque.

Synthèse sur les compétences minimales requises

comprendre et connaître :

1. la définition des différentes notions de forme linéaire, forme bilinéaire, forme quadratique,
2. la correspondance bijective entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques,

savoir-faire :

4. reconnaître si une forme donnée par une définition explicite est ou n'est pas une forme bilinéaire (éventuellement symétrique), est ou n'est pas une forme quadratique,
5. passer de la forme explicite de φ ou q à la forme matricielle, et réciproquement,
6. passer de la forme explicite de φ à celle de q et réciproquement,
7. changer de base dans l'expression matricielle de φ ou q.

2 – Produit scalaire

2.1 Vecteurs isotropes et positivité d'une forme quadratique

2.1.1 La question des vecteurs isotropes. On se place dans un $\mathbb{K}$-e.v. E. On considère une forme bilinéaire symétrique φ et sa forme quadratique associée q. Il est clair d'après 1.2.1 ou 1.4.1 que l'on a toujours $q(0_E) = \varphi(0_E, 0_E) = 0$. La question que l'on se pose est celle de la réciproque :

existe-t-il des vecteurs non-nuls $x \in E$ tels que $q(x) = \varphi(x, x) = 0$?

Pour certains exemples de φ la réponse est non,
par exemple si $\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ sur $E = \mathbb{R}^2$, avec donc $q(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Pour d'autres exemples, la réponse est oui,
par exemple si $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ sur $E = \mathbb{R}^2$, le vecteur non-nul $x = (1, 1)$ vérifie $q(x) = 0$.

► *Vocabulaire.* Un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) = \varphi(x, x) = 0$ s'appelle un *vecteur isotrope.* L'ensemble des vecteurs isotropes s'appelle le *cône isotrope.* Lorsque le seul vecteur isotrope est le vecteur nul, on dit que q est *anisotrope* ou encore que φ est *définie.*

2.1.2 La question de la positivité des formes réelles. On se place maintenant dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On considère toujours une forme bilinéaire symétrique φ et sa forme quadratique associée q. La question que l'on se pose est celle du signe de q :

peut-on avoir $q(x) = \varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$?

Pour certains exemples de φ la réponse est oui,
par exemple si $\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ sur $\mathbb{R}^2$, avec donc $q(x) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$.

Pour d'autres exemples, la réponse est non,
par exemple si $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ sur $\mathbb{R}^2$, le vecteur non-nul $x = (1, 2)$ vérifie $q(x) = -3 < 0$.

► *Vocabulaire.* Lorsque l'on a $q(x) = \varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, on dit que φ est *positive.*

2.2 Notion de produit scalaire

2.2.1 Remarque sur les notations. Il existe plusieurs notations classiques pour désigner des formes bilinéaires. On a jusqu'à présent utilisé φ, mais dans le cas des formes bilinéaires symétriques, on utilise plus couramment [1] la notation $\boxed{\varphi(x, y) = \langle x \,|\, y \rangle}$, que l'on adopte pour la suite du cours.

2.2.2 Définition. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. On appelle *produit scalaire* sur E une forme bilinéaire symétrique sur E qui est définie positive.
Un produit scalaire est donc une application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions :

1. $\langle x \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$,
2. $\langle x \,|\, y + z \rangle = \langle x \,|\, y \rangle + \langle x \,|\, z \rangle$ et $\langle x \,|\, \lambda y \rangle = \lambda \langle x \,|\, y \rangle$ pour tous $x, y, z \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $\langle x \,|\, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$,
4. le seul vecteur $x \in E$ qui vérifie $\langle x \,|\, x \rangle = 0$ est le vecteur nul 0_E.

1. on utilise aussi parfois les notations $\varphi(x, y) = (x \,|\, y)$ ou $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$

2.2.3 Exemples.

• D'après ce que l'on a vu en 2.1.1 et 2.1.2, la forme bilinéaire symétrique $\langle x \,|\, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, mais pas la forme bilinéaire symétrique $\langle x \,|\, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.

• On a vu en 1.2.2 que $\langle f \,|\, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{C}^0([a,b]\,,\mathbb{R})$. Les propriétés de positivité de l'intégrale vues en analyse assurent que les conditions 3 et 4 de la définition sont aussi vérifiées, et il s'agit donc d'un produit scalaire.

• On a aussi vu en 1.2.2 que $\langle A \,|\, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA \times B)$ définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On vérifie par le calcul que si l'on note $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, on a $\langle A \,|\, A\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$, d'où l'on déduit que les conditions 3 et 4 de la définition sont satisfaites ; on a donc un produit scalaire.

2.2.4 Définition. Un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace préhilbertien réel.* Un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace euclidien.*

2.3 Norme associée et inégalité de Cauchy-Schwarz

2.3.1 Définition. Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ l'application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x\rangle} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Cette définition est valide parce que l'on a $\langle x \,|\, x\rangle \ge 0$ pour tout $x \in E$ par définition d'un produit scalaire. Le fait pour $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ d'être définie positive est de même indispensable pour le lemme suivant.

2.3.2 Lemme. Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|x\| \ge 0, \qquad (\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0_E), \qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $x \in E$ quelconque. Le fait que $\|x\| \ge 0$ provient du fait que la racine carrée d'un réel positif est un réel positif. Si $\|x\| = 0$, alors $\|x\|^2 = 0$, c'est-à-dire $\langle x \,|\, x\rangle = 0$, ce qui implique $x = 0_E$ parce qu'on a un produit scalaire. Il est clair réciproquement que $\|0_E\| = 0$.
Enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\langle \lambda x \,|\, \lambda x\rangle = \lambda^2 \langle x \,|\, x\rangle$. Donc $\sqrt{\langle \lambda x \,|\, \lambda x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x \,|\, x\rangle}$ en prenant la racine carrée de chaque membre, d'où l'égalité voulue. □

► On appelle *vecteur unitaire* de E tout vecteur dont la norme est égal à 1. Il résulte du lemme ci-dessus que, pour tout vecteur $x \in E$ non-nul, le vecteur $x' = \frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire.

2.3.3 Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz). Dans tout espace préhilbertien réel E, on a :

$$|\,\langle x \,|\, y\rangle\,| \le \|x\|\,\|y\| \qquad \text{pour tous } x, y \in E,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. On fixe $x, y \in E$. Le théorème étant trivialement vrai lorsque x ou y est nul, on peut supposer dans la suite que x et y sont non-nuls. On considère alors les vecteurs unitaires $x' = \frac{1}{\|x\|}x$ et $y' = \frac{1}{\|y\|}y$. On calcule :

$$\|x' + y'\|^2 = \langle x' + y' \,|\, x' + y'\rangle = \|x'\|^2 + 2\langle x' \,|\, y'\rangle + \|y'\|^2 = 2 + 2\langle x' \,|\, y'\rangle,$$
$$\|x' - y'\|^2 = \langle x' - y' \,|\, x' - y'\rangle = \|x'\|^2 - 2\langle x' \,|\, y'\rangle + \|y'\|^2 = 2 - 2\langle x' \,|\, y'\rangle.$$

Ces deux réels étant des carrés dans $\mathbb{R}$, ils sont positifs et donc : $-2 \le 2\langle x' \,|\, y'\rangle \le 2$, ou encore $|\,\langle x' \,|\, y'\rangle\,| \le 1$. Cette inégalité peut se réécrire $|\,\langle \frac{1}{\|x\|}x \,|\, \frac{1}{\|y\|}y\rangle\,| \le 1$, et finalement par bilinéarité : $|\,\langle x \,|\, y\rangle\,| \le \|x\|\,\|y\|$.

De plus, $|\langle x \,|\, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si $|\langle x' \,|\, y'\rangle| = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\langle x' \,|\, y'\rangle = 1$ ou $\langle x' \,|\, y'\rangle = -1$. D'après les deux égalités ci-dessus, le premier cas équivaut à $\|x' - y'\| = 0$ et le second à $\|x' + y'\| = 0$. En résumé, $|\langle x \,|\, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si $x' = y'$ ou $x' = -y'$, ce qui équivaut à la colinéarité des deux vecteurs x et y. □

2.3.4 Corollaire (inégalité triangulaire). Dans tout espace préhilbertien réel E, on a :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{pour tous } x, y \in E,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires avec un facteur de colinéarité positif.

Preuve. Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y \,|\, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x \,|\, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x \,|\, y\rangle| + \|y\|^2,$$

d'où en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.$$

On obtient l'inégalité voulue en prenant la racine carrée de chaque membre. L'égalité se produit lorsque $\langle x \,|\, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, et on applique le cas d'égalité du théorème précédent. □

2.3.5 Remarques et commentaires

a) *Notion de norme.* Les trois propriétés du lemme 2.3.2 ci-dessus et l'inégalité triangulaire se traduisent en disant que $\|\cdot\|$ satisfait les axiomes d'une norme sur E (voir cours d'analyse).

b) *Identités de polarisation.* En termes de normes,les formules mentionnées en 1.4.2 deviennent :

$$\boxed{\langle x \,|\, y\rangle = \tfrac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) = \tfrac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big).}$$

c) *Lien entre cosinus et inégalité de Cauchy-Schwarz.* Si $x, y \in E$ sont non-nuls, il résulte de 2.3.3 que $\left|\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\right| \leq 1$; le réel $t = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ vérifie donc $-1 \leq t \leq 1$, d'où l'existence d'un réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $t = \cos\theta$. On obtient ainsi une expression du produit scalaire sous la forme :

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|\,\cos\theta \quad \text{pour } x, y \in E \text{ non-nuls.}}$$

du lemme précédent On dit que le réel θ mesure *l'angle (non orienté)* entre les vecteurs x et y.

SYNTHÈSE SUR LES COMPÉTENCES MINIMALES REQUISES

comprendre et connaître :

1. la définition d'un produit scalaire, et en particulier la signification précise des conditions 3 et 4,
2. l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sans confusion sur les racines et/ou les carrés dans chacun des deux membres, avec le cas d'égalité.

savoir-faire :

4. reconnaître si une forme bilinéaire symétrique donnée est ou n'est pas un produit scalaire,
5. utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ses différentes conséquences dans des contextes variés (voir des exemples en travaux dirigés).

3 – Orthogonalité dans les espaces euclidiens

3.1 Vecteurs orthogonaux

3.1.1 Vocabulaire, notations et propriétés élémentaires. On se place dans un espace préhilbertien réel E. Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* lorsque leur produit scalaire est nul. On note alors $x \perp y$.

$$\boxed{x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \langle x \,|\, y \rangle = 0}.$$

La première identité de polarisation 2.3.5 implique immédiatement le théorème de Pythagore :

$$\boxed{x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$$

D'après la propriété (iv) de 2.2.2, le vecteur nul est le seul vecteur qui est orthogonal à lui-même :

$$\boxed{x \perp x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E}.$$

Deux parties A et B de E sont dites *orthogonales* lorsque tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B. On note alors $A \perp B$.

$$\boxed{A \perp B \quad \Leftrightarrow \quad \langle x \,|\, y \rangle = 0 \ \text{ pour tous } x \in A,\ y \in B}.$$

Pour toute partie non vide A de E, on appelle *orthogonal de A*, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A. Il est facile de vérifier que :

$$\boxed{A^\perp = \{x \in E\,;\ \forall\, y \in A,\ \langle x \,|\, y \rangle = 0\} \ \text{ est sous-espace vectoriel de } E}.$$

Il résulte immédiatement de cette définition que, pour deux parties non-vides A et B de E :

$$\boxed{A \perp B \ \Leftrightarrow\ A \subseteq B^\perp \ \Leftrightarrow\ B \subseteq A^\perp} \qquad \text{et} \qquad \boxed{A \subseteq B \ \Rightarrow\ B^\perp \subseteq A^\perp}.$$

Enfin, on déduit aisément des propriétés (i) à (iv) de 2.2.2 que le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E, et que c'est le seul à avoir cette propriété :

$$\boxed{x \perp 0_E \text{ pour tout } x \in E,} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\{0_E\}^\perp = E \quad \text{et} \quad E^\perp = \{0_E\}}.$$

► On considère dans la suite l'orthogonal de parties de E qui sont des sous-espaces vectoriels, et ceci dans le cadre de la dimension finie, c'est-à-dire lorsque E est un $\mathbb{R}$-e.v. euclidien.

3.1.2 Théorème. Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, le sous-espace vectoriel $F^\perp$ vérifie : $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ et $\boxed{(F^\perp)^\perp = F}$.
Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est alors appelé le *supplémentaire orthogonal* de F.

Preuve. Le résultat étant évident si $F = \{0_E\}$ ou $F = E$, on suppose que F est un sous-espace non-nul et distinct de E. Il est clair que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$; en effet on aurait sinon un élément non-nul de F orthogonal à tous les éléments de F, donc à lui-même, ce qui est impossible.

Considérons une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F. Construisons l'application $f : E \to \mathbb{R}^p$ qui, à tous vecteur x de E associe le p-uplet $f(x) = (\langle x \,|\, e_1 \rangle, \langle x \,|\, e_2 \rangle, \ldots, \langle x \,|\, e_p \rangle)$. D'après la propriété (i) de 2.2.2, f est linéaire. Son noyau $\operatorname{Ker} f$ est formé des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x)$ est nul dans $\mathbb{R}^p$,

c'est-à-dire tels que $\langle x \,|\, e_j \rangle = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$. En d'autres termes, un vecteur $x \in E$ est dans $\operatorname{Ker} f$ si et seulement s'il est orthogonal à tous les vecteurs de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de F, et donc par linéarité à tout vecteur de F. On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} f = F^{\perp}$. On retrouve au passage que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, ce que l'on savait déjà.
Dès lors, en notant $n = \dim E$, on tire de la formule du rang $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$ que $\dim F^{\perp} = n - \dim \operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^p$, on a $\dim \operatorname{Im} f \leq p$, d'où $\dim F^{\perp} \geq n - p$.
Par ailleurs, $\dim(F + F^{\perp}) = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim(F \cap F^{\perp}) = \dim F + \dim F^{\perp} = p + \dim F^{\perp}$. Comme évidemment $\dim(F + F^{\perp}) \leq n$, il vient $\dim F^{\perp} \leq n - p$. Finalement : $\dim F^{\perp} = n - p$. Ceci prouve que $E = F \oplus F^{\perp}$.
En appliquant ce qui précède à $F^{\perp}$ au lieu de F, on obtient $\dim(F^{\perp})^{\perp} = n - \dim F^{\perp} = n - (n - p) = p$. Ainsi $\dim(F^{\perp})^{\perp} = \dim F$. Comme il est clair (par définition de l'orthogonal de F) que $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$, on conclut à l'égalité. $\square$

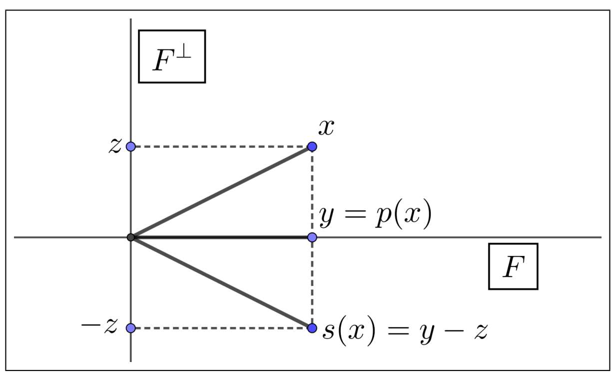
3.2 Projections orthogonales et symétries orthogonales

3.2.1 Définitions. Soient E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On considère pour tout vecteur $x \in E$ sa décomposition $x = y + z$ dans la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$.

(1) L'application p de E dans E qui, à tout vecteur $x \in E$ décomposé en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, associe $p(x) = y$, s'appelle la *projection orthogonale sur F.*

(2) L'application s de E dans E qui, à tout vecteur $x \in E$ décomposé en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, associe $s(x) = y - z$, s'appelle la *symétrie orthogonale par rapport à F.*

On peut représenter symboliquement la situation par la figure suivante :



On synthétise ci-dessous les principales propriétés des projections et symétries orthogonales.

3.2.2 Proposition. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(1) La projection orthogonale p sur F est un endomorphisme de E, vérifiant
$$p \circ p = p, \quad \operatorname{Im} p = F, \quad \operatorname{Ker} p = F^{\perp}.$$
Ses valeurs propres sont 0 et 1, les sous-espaces propres associés sont $E_1 = F$ et $E_0 = F^{\perp}$, de sorte que p est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(2) La symétrie orthogonale par rapport à F est un endomorphisme bijectif de E vérifiant
$$s \circ s = \mathrm{id}_E, \quad \operatorname{Im} s = E, \quad \operatorname{Ker} s = \{0_E\}.$$
Ses valeurs propres sont -1 et 1, les sous-espaces propres associés sont $E_1 = F$ et $E_{-1} = F^{\perp}$, de sorte que s est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Dans le cas d'une projection p, il résulte immédiatement de la définition que p est linéaire, $p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = f = E_1$ et $\operatorname{Ker} p = F^\perp = E_0$. Comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires d'après le théorème 3.1.2, on a donc $E = E_1 \oplus E_0$, et donc p est diagonalisable.
Dans le cas d'une symétrie s, il résulte de la définition que $s \circ s = \mathrm{id}_E$, donc s est bijective de E sur E avec $s^{-1} = s$. En particulier $\operatorname{Im} s = E$ et $\operatorname{Ker} s = \{0_E\}$. Toujours d'après la définition de s, on a cette fois $F = E_1$ et $F^\perp = E_{-1}$, d'où $E = E_1 \oplus E_{-1}$ et s est diagonalisable. □

► *Formes explicite des matrices dans une base adaptée.* Si on note $\ell = \dim F$, on a $\dim F^\perp = n - \ell$. Les matrices de p et de s dans une base adaptée (ie. formée d'une base de F complétée par une base de $F^\perp$) sont alors diagonales de la forme :

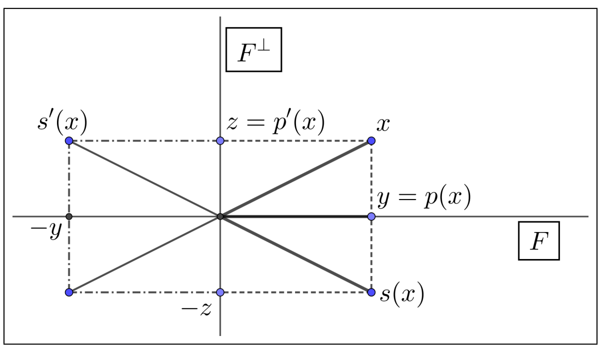
$$\begin{pmatrix} \boxed{I_\ell} & \boxed{O_{\ell,n-\ell}} \\ \boxed{O_{n-\ell,\ell}} & \boxed{O_{n-\ell}} \end{pmatrix} \text{ pour } p, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \boxed{I_\ell} & \boxed{O_{\ell,n-\ell}} \\ \boxed{O_{n-\ell,\ell}} & \boxed{-I_{n-\ell}} \end{pmatrix} \text{ pour s.}$$

► *Remarque sur les cas extrêmes.* Tout ce qui précède reste vrai lorsque $F = E$ avec dans ce cas $p = \mathrm{id}_E$ et $s = \mathrm{id}_E$, et lorsque $F = \{0_E\}$ avec alors $p =$ l'endomorphisme nul et $s = -\mathrm{id}_E$.

► *Formules d'échange entre F et $F^\perp$.* Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soient p la projection orthogonale sur F, et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Considérons de façon duale p' la projection orthogonale sur $F^\perp$, et s' la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$. Alors on a :

$$\boxed{p = \mathrm{id}_E - p' \qquad \text{et} \qquad s = 2p - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2p' = -s'.}$$

Ces relations, dont la preuve se déduit immédiatement des définitions (voir représentation ci-dessous), permettent de déterminer les projections et symétries orthogonales relativement à sous-espace F dès lors que l'on connaît les projections et symétries orthogonales relativement à $F^\perp$.



3.3 Bases orthogonales, bases orthonormales

3.3.1 Définition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel euclidien E.

On dit que la base $\mathcal{B}$ est une *base orthogonale* lorsque tous les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire : $\langle e_i \,|\, e_j \rangle = 0$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$.

On dit que la base $\mathcal{B}$ est une *base orthonormale* lorsque c'est une base orthogonale et que, de plus, tous les vecteurs e_i sont unitaires, c'est-à-dire lorsque : $\langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

► *Symbole de Kronecker.* Rappelons que δ_{ij} désigne le nombre réel qui vaut 1 si $i = j$, et 0 si $i \neq j$.

► *Normalisation.* Il est clair que, si on a une base orthogonale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, il suffit de définir $e'_j = \frac{1}{\|e_j\|} e_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$ pour obtenir une nouvelle base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ qui est orthonormale.

3.3.2 Théorème. Dans tout espace vectoriel euclidien non-nul, il existe des bases orthonormales.

Preuve. On raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.
Si $n = 1$, il suffit de choisir un vecteur non-nul quelconque x de E et de poser $e_1 = \frac{1}{\|x\|}x$; il est clair que (e_1) est une base orthonormale de E.
Supposons la propriété vraie pour tous les espaces vectoriel euclidiens de dimension $n-1$ et considérons un espace vectoriel euclidien E de dimension n. Choisissons un vecteur non-nul quelconque x de E et posons $e_n = \frac{1}{\|x\|}x$. Considérons la droite F de base (e_n). D'après le théorème 3.1.2, on a $E = F \oplus F^\perp$, avec $\dim F^\perp = n-1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$, il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ de $F^\perp$. Il est clair que $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est alors une base orthonormale de E. $\square$

3.3.3 Proposition (expression du produit scalaire dans une base orthonormale)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$.

(i) *Pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :*

$$x_i = \langle x \,|\, e_i \rangle \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n, \text{ et donc } x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle e_i.$$

(ii) *Pour tous $x, y \in E$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :*

$$\langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Preuve. On a : $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$; pour tout $1 \leq i \leq n$, on calcule $\langle x \,|\, e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \,|\, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j \,|\, e_i \rangle = x_i$ puisque $\langle e_j \,|\, e_i \rangle = 0$ si $j \neq i$ et $\langle e_i \,|\, e_i \rangle = 1$. Ce qui montre (i).
Pour (ii) on calcule : $\langle x \,|\, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, d'où la première égalité ; la seconde en découle en prenant $x = y$. $\square$

3.4 Quelques applications classiques

3.4.1 Hyperplans et vecteurs normaux Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Par définition, un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de dimension $n-1$. D'après le théorème 3.1.2, le sous-espace $H^\perp$ est alors une droite vectorielle.

On appelle *vecteur normal* à H tout vecteur directeur de la droite $H^\perp$, c'est-à-dire tout vecteur non-nul a tel que $a \perp x$ pour tout $x \in H$. En d'autres termes :

$$\boxed{H \text{ hyperplan de vecteur normal } a \quad \Leftrightarrow \quad H = \{x \in E \,;\, \langle x \,|\, a \rangle = 0\}.}$$

Ainsi si $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et si l'on note $(a_1, \ldots, a_n)$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur a normal à H, alors H est l'ensemble des vecteurs x dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifient la relation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$. La réciproque étant claire, on retient que :

quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls, l'ensemble des vecteurs $x \in E$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions de l'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est l'hyperplan dont un vecteur normal est $a \in E$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$.

On appelle *réflexion* toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. On montre que : si x et x' sont deux vecteurs non-nuls distincts de même norme, alors il existe une unique réflexion qui les échange : c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan de vecteur normal $x - x'$.

3.4.2 Distance et projection. Soit E un espace vectoriel euclidien. On appelle *distance entre deux vecteurs* x et y de E, et *distance entre un vecteur* x *et une partie* F de E les réels positifs :

$$\boxed{d(x,y) = \|x-y\| \in \mathbb{R}_+} \quad \text{et} \quad \boxed{d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|}.$$

► Lorsque F est un sous-espace vectoriel de E, la distance entre un vecteur x et F est égale à la distance entre x et son projeté orthogonal $p(x)$ sur F ; on a :

$$\boxed{\|p(x)\| \leq \|x\|} \quad \boxed{d(x,F) = d(x,p(x)) = \|x-p(x)\|} \quad \boxed{d(x,F) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in F}.$$

En effet : considérons comme en 3.2 la décomposition $x = y + z$ avec $y = p(x) \in F$ et $z \in F^\perp$. Pour tout $f \in F$, on a $p(x) - f \in F$ comme somme de deux vecteurs de F, et $x - p(x) = z \in F^\perp$. Donc $(p(x)-f) \perp (x-p(x))$. D'où $\|p(x)-f\|^2 + \|x-p(x)\|^2 = \|p(x)-f+x-p(x)\|^2 = \|x-f\|^2$ par la propriété de Pythagore. Ainsi $\|x-p(x)\| \leq \|x-f\|$ pour tout $f \in F$, avec égalité si et seulement si $p(x) = f$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in F$. Ceci montre le résultat voulu. □

3.4.3 Projection et bases orthonormales. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension m, dans un espace vectoriel euclidien E de dimension n. Soit p la projection orthogonale sur F. Alors

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x \,|\, e_i \rangle e_i \quad \text{pour tout } x \in E \text{ et toute base orthonormale } (e_1, \dots, e_m) \text{ de } F.}$$

En effet : complétons une base orthonormale $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_m)$ de F avec une base orthonormale $\mathcal{C}' = (e_{m+1}, \dots, e_n)$ de $F^\perp$, de sorte que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E. On a $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle e_i$ d'après la proposition 3.3.3, et il suffit d'appliquer p aux deux membres de cette égalité en utilisant que $p(e_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $p(e_i) = 0_E$ pour $m+1 \leq i \leq n$. □

► *Algorithme de Gram-Schmidt.* En appliquant ce résultat, on construit par itération, à partir d'une base quelconque $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, une base orthogonale $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ qui vérifie $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ pour tout $1 \leq p \leq n$. Le principe est, à chaque étape, de soustraire à e_i son projeté orthogonal sur le sous-espace engendré par les ε_j précédemment construits :

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = e_2 - \frac{\langle \varepsilon_1 \,|\, e_2 \rangle}{\langle \varepsilon_1 \,|\, \varepsilon_1 \rangle} \varepsilon_1, \quad \dots, \quad \varepsilon_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \varepsilon_j \,|\, e_i \rangle}{\langle \varepsilon_j \,|\, \varepsilon_j \rangle} \varepsilon_j.$$

SYNTHÈSE SUR LES COMPÉTENCES MINIMALES REQUISES

comprendre et connaître :

1. le vocabulaire précis et les notations sur l'orthogonalité,
2. l'existence et l'unicité du supplémentaire orthogonal d'un sous-espace,
3. la définition et toutes les propriétés des projections et symétries orthogonales.

savoir-faire :

4. manipuler ces différentes notions en les combinant dans des situations diversifiées (comme sur les exemples de 3.4, d'autres en travaux dirigés),
5. traduire les différentes hypothèses et questions en termes de coordonnées dans des bases orthonormales.

4 – Endomorphismes orthogonaux (isométries vectorielles)

4.1 Notion d'isométrie vectorielle

4.1.1 Lemme et définition. Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n. Pour tout endomorphisme f de E, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$ pour tous $x, y \in E$ (on dit que f *conserve le produit scalaire)* ;

(ii) $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ (on dit que f *conserve la norme euclidienne)* ;

(iii) pour toute base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E (on dit que f transforme toute base orthonormale en une base orthonormale) ;

(iv) il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E.

On appelle *endomorphisme orthogonal*, ou encore *isométrie vectorielle*, tout endomorphisme de E satisfaisant l'une de ces conditions équivalentes.

Preuve. Il est clair que (i) implique (ii). Puisque $f(x + y) = f(x) + f(y)$, on a aussi que (ii) implique (i) d'après la première identité de polarisation vue en 2.3.5.b.

Supposons que l'on a (ii). Si $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $\|x\| = \|f(x)\| = \|0_E\| = 0$, ce qui implique que $x = 0_E$. En d'autres termes $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Ainsi f est injective, c'est-à-dire bijective car f est un endomorphisme en dimension finie. Considérons une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. La famille $\mathcal{C} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de E puisque f est bijective. De plus d'après (i), pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $\langle f(e_i) \mid f(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{i,j}$. Donc la base $\mathcal{C}$ est orthonormale. Ainsi (iii) est satisfaite. Il est trivial que (iii) implique (iv).

Supposons pour finir qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $\mathcal{C} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit une base orthonormale de E. Quels que soient x, y dans E, de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ comme on l'a vu en 3.3.3. Mais f étant linéaire, $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont aussi les coordonnées respectives de $f(x)$ et $f(y)$ dans la base $\mathcal{C}$. D'où $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle f(x) \mid f(y) \rangle$, ce qui prouve (i). □

4.1.2 Exemple des symétries orthogonales. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, la symétrie orthogonale s par rapport à F est une isométrie vectorielle.

En effet. Soit $x \in E$ quelconque, décomposé en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. On a $s(x) = y - z$, donc $\|s(x)\|^2 = \langle y - z \mid y - z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle y \mid z \rangle$. Mais $y \perp z$ donc $\langle y \mid z \rangle = 0$ et cette expression se réduit à $\|y\|^2 + \|z\|^2$, qui est aussi égale à $\langle y + z \mid y + z \rangle = \|x\|^2$. On déduit que $\|s(x)\| = \|x\|$. On conclut que s conserve la norme.

► Comme on l'a vu dans la preuve : *une isométrie vectorielle est nécessairement bijective.*

Il en résulte par exemple que les projections orthogonales ne sont pas des isométries. Cela conduit surtout au théorème suivant :

4.1.3 Théorème et définition L'ensemble des isométries vectorielles d'un espace vectoriel euclidien E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E, noté $\mathrm{O}(E)$.

Preuve. Rappelons d'abord que $\mathrm{GL}(E)$ désigne le groupe linéaire de E, c'est-à-dire le groupe (pour la loi $\circ$) des automorphismes de l'espace vectoriel E, c'est-à-dire des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On a donc bien $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$. Il est clair aussi que $\mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$.

Soient f et g deux éléments de $\mathrm{O}(E)$. Pour tout $x \in E$, on a $\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| = \|f(x)\| = \|x\|$ en appliquant d'abord le fait que g conserve la norme, puis que f conserve la norme. Ceci montre que $g \circ f \in \mathrm{O}(E)$. Donc $\mathrm{O}(E)$ est stable pour la loi $\circ$.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Notons f^{-1} sa bijection réciproque. On a $\|x\| = \|f(f^{-1}(x))\|$ pour tout $x \in E$. Mais comme f conserve la norme, $\|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\|$. Ainsi $\|x\| = \|f^{-1}(x)\|$. Ceci montre que $f^{-1} \in \mathrm{O}(E)$. Donc $\mathrm{O}(E)$ est stable par passage à la réciproque. □

4.2 Matrices orthogonales

4.2.1 Rappel sur la transposition des matrices. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la transposée de A est la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :

$$\text{si} \quad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}, \quad \text{alors} \quad {}^tA = (a_{ji})_{1 \le i,j \le n}.$$

Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB}, \quad \boxed{{}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA}, \quad \boxed{{}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA}, \quad \boxed{{}^t({}^tA) = A}.$$

4.2.2 Définition. On appelle *matrice orthogonale* d'ordre n toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A\, {}^tA = {}^tA A = I_n.$$

Une matrice orthogonale est donc nécessairement inversible et vérifie $A^{-1} = {}^tA$.

4.2.3 Proposition et définition. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. On le note $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

Preuve. Rappelons d'abord que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc bien $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Il est clair aussi que $I_n \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. On a : ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, ce qui montre que $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est stable par produit. De plus, ${}^t(A^{-1}) = {}^t({}^tA) = A = (A^{-1})^{-1}$. Donc $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse, ce qui achève la preuve. □

► Le fait que l'on utilise la même terminologie et des notations voisines pour désigner à la fois les endomorphismes orthogonaux de E et les matrices orthogonales d'ordre n est justifié par le théorème suivant.

4.2.4 Théorème. Pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est une isométrie vectorielle de E ;
2. pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale ;
3. il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit une matrice orthogonale.

Preuve. Soient f un endomorphisme de E, et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Par définition de A, on a $f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc pour $1 \leq i,j \leq n$, on peut calculer :

$$\langle f(e_i) \,|\, f(e_j) \rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k \,|\, \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} e_\ell \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ki} a_{\ell j} \langle e_k \,|\, e_\ell \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$$

La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale si seulement si $\langle f(e_i) \,|\, f(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i,j \leq n$, c'est-à-dire si et seulement $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i,j \leq n$. Ces n^2 égalités entre coefficients traduisent exactement l'égalité matricielle ${}^t\!AA = I_n$. □

4.2.5 Corollaire. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormale si et seulement la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale. En particulier, toute matrice de passage entre deux bases orthonormales de E est une matrice orthogonale.

Preuve. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donne en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ quand on les exprime dans la base $\mathcal{B}$. En d'autres termes, c'est aussi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f de E qui envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{B}'$. Le corollaire résulte donc de l'application immédiate du théorème précédent et de la conservation de la norme par une isométrie vectorielle. □

► *Remarque.* Sur le plan pratique, on en déduit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes constitue une base orthonormale de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

4.2.6 Corollaire. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. L'application qui, à tout endomorphisme de E, associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ définit un isomorphisme de groupes de $\mathrm{O}(E)$ sur $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Preuve. Considérons l'application Φ qui, à tout endomorphisme f de E associe sa matrice $A = \Phi(f)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. On sait déjà que f est bijective si et seulement si A est inversible, et donc Φ définit une application du groupe $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E dans le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles. On sait aussi que, si g est un autre automorphisme de E de matrice B dans la base $\mathcal{B}$, alors la matrice de $g \circ f$ est BA. En d'autres termes, $\Phi(g \circ f) = \Phi(g)\Phi(f)$ pour tous $f, g \in \mathrm{GL}(E)$, ce qui s'exprime en disant que Φ détermine un isomorphisme de groupe de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.
Le théorème ci-dessus prouve de plus que $f \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $\Phi(f) \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, et donc la restriction de Φ au sous-groupe $\mathrm{O}(E)$ détermine un isomorphisme de $\mathrm{O}(E)$ sur $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. □

4.3 Isométries directes, isométries indirectes

4.3.1 Théorème et définitions. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

(i) Si A est une matrice orthogonale, alors son déterminant vaut $+1$ ou -1.

L'ensemble des matrices orthogonales dont le déterminant vaut $+1$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ appelé *sous-groupe spécial orthogonal*, noté $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}^+(n,\mathbb{R})$.

(ii) Si f est une isométrie vectorielle de E, alors son déterminant vaut $+1$ ou -1.

L'ensemble des isométries vectorielles dont le déterminant vaut $+1$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ appelé le *sous-groupe spécial orthogonal* de E, noté $\mathrm{SO}(E)$ ou $\mathrm{O}^+(E)$.

Ses éléments sont appelés *isométries vectorielles directes.*

(iii) L'application qui, à tout endomorphisme de E, associe sa matrice dans une base orthonormale définit un isomorphisme de groupes de $\mathrm{O}^+(E)$ sur $\mathrm{O}^+(n,\mathbb{R})$.

Preuve. Si $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, on a ${}^tAA = I_n$, donc $\det({}^tAA) = 1$, c'est-à-dire $\det({}^tA) \det A = 1$. Mais $\det({}^tA) = \det A$, d'où $(\det A)^2 = 1$ et finalement $\det A = \pm 1$. Il est clair que I_n est de déterminant $+1$, que le produit de deux matrices de déterminant $+1$ est de déterminant $+1$, et que l'inverse d'une matrice de déterminant $+1$ est de déterminant $+1$; on conclut que $\mathrm{O}^+(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe (c'est le noyau du morphisme de groupe $\det : \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$).

Le point (i) étant ainsi montré, le (ii) en découle de façon immédiate avec le théorème 4.2.4 puisque $\det f = \det A$ où $A = \Phi(f)$. Le point (iii) résulte alors du corollaire 4.2.6. □

► *Remarque.* On note aussi $\mathrm{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles qui sont de déterminant -1, que l'on appelle *isométries vectorielles indirectes.* on a :

$\mathrm{O}(E) = \mathrm{O}^+(E) \cup \mathrm{O}^-(E)$, mais attention, $\mathrm{O}^-(E)$ **n'est pas** un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$.

4.3.2 Corollaire (exemple important des symétries orthogonales)**.** Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p dans un espace vectoriel euclidien E de dimension n. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors :

$$s \in \mathrm{O}(E), \qquad \det s = (-1)^{n-p}, \qquad s \in \mathrm{O}^+(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (\mathrm{n - p \text{ est pair}}).$$

Preuve. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de F. Comme $E = F \oplus F^\perp$, il existe une base orthonormale $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de $F^\perp$ telle que $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. On a $s(e_i) = e_i$ pour tous les $1 \leq i \leq p$ et $s(e_j) = -e_j$ pour tous les $p+1 \leq j \leq n$. La matrice A de s dans la base $\mathcal{B}$ est donc diagonale, avec p termes diagonaux égaux à 1 et $n-p$ termes diagonaux égaux à -1. Il en résulte d'une part que ${}^tAA = I_n$, et d'autre part que $\det A = (-1)^{n-p}$, ce qui montre les résultats voulus. □

► *Remarque.* Si E est de dimension 2, toute symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle est une isométrie indirecte.

► *Remarque.* Si E est de dimension 3, toute symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel est une isométrie indirecte, mais toute symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle est une isométrie directe. D'une façon générale, si E est de dimension n, toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel est une isométrie indirecte.

4.4 Orientation d'un espace vectoriel euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E. On sait qu'il existe un unique automorphisme $f \in \mathrm{GL}(E)$ qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$. Parce que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales, il résulte de la condition (iv) du lemme 4.1.1 que f est une isométrie vectorielle. On peut alors introduire les définitions suivantes :

- Deux bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont dites *de même orientation* lorsque l'unique isométrie vectorielle $f \in O(E)$ qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ est une isométrie directe, c'est-à-dire lorsque $f \in \mathrm{O}^+(E)$.
- Sinon, c'est-à-dire lorsque $f \in \mathrm{O}^-(E)$, on dira que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientations opposées.

Orienter l'espace vectoriel euclidien E consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de référence $\mathcal{B}$; toute base orthonormale $\mathcal{B}'$ ayant la même orientation que $\mathcal{B}$ sera dite *directe*, et toute base orthonormale $\mathcal{B}'$ ayant l'orientation opposée à celle de $\mathcal{B}$ sera dite *indirecte*.

Il résulte immédiatement de ces définitions et des résultats de 4.2.5 et 4.3.1 que :

- Deux bases orthonormales sont de même orientation si et seulement si la matrice de passage de l'une à l'autre est de déterminant $+1$.
- Une isométrie est directe si et seulement si elle conserve l'orientation (ie. elle transforme toute base orthonormale directe en une base orthonormale directe).

SYNTHÈSE SUR LES COMPÉTENCES MINIMALES REQUISES

comprendre et connaître :

1. les différentes définitions équivalentes d'une isométrie vectorielle,
2. la correspondance bijective entre isométries vectorielles et matrices orthogonales (attention "une base" vs "toute base"),
3. la question du signe du déterminant d'une isométrie vectorielle,
4. l'interprétation en termes de groupes de ces définitions et résultats.

savoir-faire :

5. reconnaître si un endomorphisme, donné sous forme matricielle ou par une autre description, est ou non une isométrie vectorielle, directe ou indirecte,
6. manipuler les matrices orthogonales dans leurs diverses caractérisations,
7. mettre en œuvre, dans des contextes diversifiés, la conservation du produit scalaire ou de la norme (voir des exemples en travaux dirigés).

5 – Endomorphismes symétriques

5.1 Transposition

5.1.1 Proposition et définition. Soit E un espace euclidien de dimension n.
Pour tout endomorphisme f de E, il existe un unique endomorphisme de E, noté ${}^tf$, appelé le *transposé* de f, vérifiant :

$$\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, {}^tf(y) \,\rangle \qquad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, la matrice de ${}^tf$ dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans cette même base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}({}^tf) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f),$$

et l'on a ${}^t({}^tf) = f$.

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soient f un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Appelons g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^tA = (a_{ji})_{1 \le i,j \le n}$.
Prenons deux vecteurs quelconques x et y de E. Notons X et Y les matrices colonnes de leurs coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$. Notons X' et Y' les matrices colonnes des coordonnées respectives des vecteurs $f(x)$ et $g(y)$ dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $X' = AX$ et $Y' = {}^tAY$,
Parce que $\mathcal{B}$ est orthonormale, l'expression du produit scalaire donne $\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = {}^tX'\,Y$, d'où :

$$\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tA\,Y = {}^tX\,Y' = \langle\, x \,|\, g(y) \,\rangle.$$

L'endomorphisme g choisi est donc une solution du problème considéré ; les mêmes calculs montrent que c'est l'unique solution. On note alors $g = {}^tf$. L'égalité matricelle voulue en découle puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = {}^tA$ par définition de g. □

5.1.2 Définition. Soit E un espace euclidien de dimension n. Un endomorphisme f de E est dit *symétrique* lorsque ${}^tf = f$ dans $\mathrm{End}\,E$, ce qui est équivalent à :

$$\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, f(y) \,\rangle \qquad \text{pour tous } x, y \in E.$$

► Il est clair d'après la proposition précédente que f est symétrique si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormale de E est une *matrice symétrique*, c'est-à-dire vérifie $A = {}^tA$.

5.1.3 Exemples. Les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques.

En effet. Soient F un sous-espace vectoriel de E, p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Soient x, y deux vecteurs quelconques de E, décomposés sous la forme $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$ avec $x', y' \in F$ et $x'', y'' \in F^\perp$. On alors $\langle x' \,|\, y'' \rangle = \langle x'' \,|\, y' \rangle = 0$, et donc

$$\langle p(x) \,|\, y \rangle = \langle x' \,|\, y' + y'' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle + \langle x' \,|\, y'' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle,$$
$$\langle x \,|\, p(y) \rangle = \langle x' + x'' \,|\, y' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle + \langle x'' \,|\, y' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle,$$
$$\langle s(x) \,|\, y \rangle = \langle x' - x'' \,|\, y' + y'' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle - \langle x'' \,|\, y' \rangle + \langle x' \,|\, y'' \rangle - \langle x'' \,|\, y'' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle - \langle x'' \,|\, y'' \rangle,$$
$$\langle x \,|\, s(y) \rangle = \langle x' + x'' \,|\, y' - y'' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle + \langle x'' \,|\, y' \rangle - \langle x' \,|\, y'' \rangle - \langle x'' \,|\, y'' \rangle = \langle x' \,|\, y' \rangle - \langle x'' \,|\, y'' \rangle,$$

ce qui montre bien que p et s sont des endomorphismes symétriques. □

▶ *Remarque.* On a vu à la proposition 3.2.2 que p et s sont diagonalisables. Dans le cas de p, on a $E = E_0 \oplus E_1$ avec $E_0 = \operatorname{Ker} p = F^\perp$ et $E_1 = \operatorname{Im} p = F$. Dans le cas de s, on a $E = E_{-1} \oplus E_1$ avec $E_{-1} = F^\perp$ et $E_1 = F$. Dans les deux cas, les sous-espaces propres sont donc orthogonaux.

Cet exemple est un cas particulier du théorème suivant, qui est l'un des plus important de la théorie.

5.2 Théorème spectral

5.2.1 Observation. *Si λ et μ sont deux valeurs propres réelles distinctes d'un endomorphisme symétrique, alors les sous-espaces propres associés E_λ et E_μ sont orthogonaux.*

> *Preuve.* Soit f un endomorphisme symétrique de E. Supposons que λ et μ sont deux v.p. distinctes de f. Soient $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$. Donc $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$. L'hypothèse f symétrique se traduit par $\langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, f(y) \rangle$, donc $\langle \lambda x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, \mu y \rangle$, ou encore $\lambda \langle x \,|\, y \rangle = \mu \langle x \,|\, y \rangle$. Comme $\lambda \neq \mu$, on déduit que $\langle x \,|\, y \rangle = 0$, c'est-à-dire $x \perp y$. □

Cette observation met en évidence que le fait pour un endomorphisme d'être symétrique implique des conditions d'orthogonalité entre ses vecteurs propres. En approfondissant le raisonnement, le théorème qui suit montre que l'on a une base orthogonale (et donc aussi une base orthonormale) entièrement formée de vecteurs propres.

5.2.2 Lemme préliminaire. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique est scindé*[2] *sur $\mathbb{R}$.*

> *Preuve.* Soient f un endomorphisme symétrique de E, et A sa matrice dans une base orthonormale de E. En particulier A est une matrice symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $P_f = P_A$ le polynôme caractéristique de f ou A. C'est un polynôme à coefficients réels, et on peut donc le considérer aussi comme polynôme à coefficients complexes. A ce titre, on sait que, dans $\mathbb{C}[X]$, il se décompose sous la forme $P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$ avec les λ_i dans $\mathbb{C}$ (pas forcément deux à deux distincts). Notre but est de montrer que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
>
> La matrice A peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Prenons l'un des λ_i en le notant simplement λ ; c'est un zéro dans $\mathbb{C}$ de P_A, donc une v.p. de g, et l'on peut considérer un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à la v.p. λ. On a $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ et $g(x) = \lambda x$. Notons X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, de sorte que : $AX = \lambda X$. En prenant les conjugués de tous les coefficients dans cette égalité, on a $\overline{A}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. Mais $\overline{A} = A$ puisque A est à coefficients réels. Donc $A\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. Si l'on écrit en ligne cette égalité de colonnes (en transposant), on obtient ${}^t\overline{X}\,{}^tA = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$, c'est-à-dire ${}^t\overline{X} A = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$, puisque A est symétrique.
>
> En combinant les égalités $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X} = {}^t\overline{X} A$ et $AX = \lambda X$, il vient $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}\,X = {}^t\overline{X} A X = \lambda\,{}^t\overline{X}\,X$. Or ${}^t\overline{X}\,X$ est un réel strictement positif (c'est la somme des carrés des modules des coordonnées dans $\mathbb{C}$ du vecteur non-nul x). On conclut que $\overline{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$. □

5.2.3 Théorème. Soit E un espace vectoriel euclidien.
Tout endomorphisme <u>symétrique</u> f de E est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Plus précisément, il existe des bases <u>orthonormales</u> de E constituées de vecteurs propres de f.

2. ce qui signifie que ce polynôme se décompose complètement dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes de degré 1

Preuve. On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Prenons $n \geq 2$, supposons par hypothèse de récurrence le résultat vrai pour tout espace vectoriel euclidien de dimension $n-1$, et considérons un espace vectoriel euclidien E de dimension n. Soit f un endomorphisme symétrique de E. D'après le lemme 5.2.2, il admet des valeurs propres réelles ; soit λ l'une d'elle. Considérons u_n un vecteur propre associé à λ. Quitte à multiplier u_n par le réel $\|u_n\|^{-1}$, on peut sans restriction choisir u_n unitaire. Soit H l'hyperplan vectoriel orthogonal à la droite vectorielle $F = \mathbb{R}u_n$ engendrée par u_n (voir 3.4.1). Pour tout $x \in H$, on a l'égalité $\langle f(x) \,|\, u_n \rangle = \langle x \,|\, f(u_n) \rangle$ puisque f est symétrique ; en utilisant le fait que $f(u_n) = \lambda u_n$, on déduit que $\langle f(x) \,|\, u_n \rangle = \langle x \,|\, \lambda u_n \rangle = \lambda \langle x \,|\, u_n \rangle = 0$ puisque $u_n \in F$ et $x \in H = F^{\perp}$.

Ceci prouve que pour tout $x \in H$, le vecteur $f(x)$ est orthogonal à u_n donc appartient à H ; en d'autres termes H est stable par f. Donc la restriction de f à H détermine un endomorphisme f' de H, qui reste bien sûr symétrique. Par hypothèse de récurrence appliquée à f', il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ de H constituée de vecteurs propres de f' donc de f. En adjoignant u_n, on obtient une famille $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ constituée de vecteurs propres de f, qui est une base orthonormale de E puisque $F \oplus H = E$ avec $F \perp H$. □

5.2.4 Corollaire. Toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Plus précisément, il existe une matrice diagonale D à coefficients réels et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Preuve. Soit A une matrice symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$, qui est bien sûr orthonormale. Comme on l'a vu en 5.1.2, f est un endomorphisme symétrique. En appliquant le théorème 5.2.3, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit une matrice diagonale D. On a alors $A = PDP^{-1}$ en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, qui est une matrice orthogonale d'après le corollaire 4.2.5. □

SYNTHÈSE SUR LES COMPÉTENCES MINIMALES REQUISES

comprendre et connaître :

1. la définition d'un endomorphisme symétrique et sa caractérisation matricielle,
2. les énoncés complets et précis du théorème spectral et de sa traduction matricielle.

savoir-faire :

3. reconnaître si un endomorphisme, donné sous forme matricielle ou par une autre description, est ou non symétrique,
4. mettre en œuvre le théorème spectral dans des contextes diversifiés (voir des exemples en travaux dirigés).

6 – Détermination des isométries vectorielles en petite dimension

6.1 Valeurs propres et sous-espaces propres d'une isométrie vectorielle.

Rappelons que dans un e.v. E, un sous-espace vectoriel F est dit *stable* par un endomorphisme f lorsque l'image par f de tout élément de F appartient encore à F, c'est-à-dire lorsque $f(F) \subseteq F$. Dans le cas où f est bijective, ceci équivaut encore à $f(F) = F$. Dans le cas d'une isométrie vectorielle d'un $\mathbb{R}$-e.v. euclidien, on a de plus la propriété suivante :

6.1.1 Lemme (sous-espaces vectoriels stables par une isométrie vectorielle). Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie vectorielle de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par f.

Preuve. Supposons F stable par f. Soit $y \in f(F^\perp)$ quelconque. Il existe $x \in F^\perp$ tel que $y = f(x)$. Soit $t \in F$ quelconque. Comme par hypothèse $F = f(F)$, il existe $z \in F$ tel que $t = f(z)$. On calcule alors : $\langle y \,|\, t\rangle = \langle f(x) \,|\, f(z)\rangle = \langle x \,|\, z\rangle$ car f est une isométrie. Or $\langle x \,|\, z\rangle = 0$ puisque $x \in F^\perp$ et $z \in F$. Donc $\langle y \,|\, t\rangle = 0$, c'est-à-dire $y \perp t$. On a ainsi montré que y est orthogonal à tout $t \in F$, c'est-à-dire que $y \in F^\perp$. On conclut que $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$. □

6.1.2 Lemme (sous-espace vectoriel des vecteurs fixes). Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie vectorielle de E. Alors les sous-espaces vectoriels :

$$E_1 = \{x \in E\,,\, f(x) = x\} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad E_{-1} = \{x \in E\,,\, f(x) = -x\} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$$

sont orthogonaux.

Preuve. Soient deux vecteurs $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$ quelconques. On a $f(x) = x$ et $f(y) = -y$. On calcule $\langle f(x) \,|\, f(y)\rangle = \langle x \,|\, -y\rangle = -\langle x \,|\, y\rangle$. Mais par ailleurs $\langle f(x) \,|\, f(y)\rangle = \langle x \,|\, y\rangle$ puisque f est une isométrie. Donc $\langle x \,|\, y\rangle = -\langle x \,|\, y\rangle$, d'où $\langle x \,|\, y\rangle = 0$, c'est-à-dire $x \perp y$. □

6.1.3 Proposition (valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle). Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie vectorielle de E.

1. Les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
2. Si 1 et -1 sont toutes les deux valeurs propres de f, alors les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f. Il existe donc un vecteur $x \in E$ non-nul tel que $f(x) = \lambda x$. Comme f est une isométrie, on a $\|x\| = \|f(x)\|$, donc $\|x\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. Mais $\|x\| \neq 0$ puisque $x \neq 0_E$, d'où $|\lambda| = 1$, et finalement $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Si 1 et -1 sont toutes les deux valeurs propres, leurs sous-espaces propres associés sont respectivement E_1 et E_{-1} et le point (ii) résulte alors du lemme précédent. □

6.1.4 Corollaire (diagonalisabilité d'une isométrie vectorielle)**.** Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie vectorielle de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$,

(ii) f est un endomorphisme symétrique,

(iii) f est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

Preuve. On sait que (iii) implique (ii) car toute symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique (voir 5.1.3), et que (ii) implique (i) d'après le théorème spectral (voir 5.2.3). Il suffit donc de montrer que (i) implique (iii).

On suppose donc que f est diagonalisable, c'est-à-dire que $E = E_1 \oplus E_{-1}$ d'après le premier point de la proposition 6.1.3 (y compris si l'un des deux sous-espaces est nul et l'autre égal à E). Avec le lemme 6.1.2, les deux sous-espaces E_1 et E_{-1} sont donc supplémentaires orthogonaux.

Soit $x \in E$ quelconque. D'après ce que l'on vient de voir, il existe $y \in E_1$ et $z \in E_{-1} = E_1^{\perp}$ tels que $x = y + z$. On a alors $f(x) = f(y+z) = f(x) + f(z) = y - z$, ce qui prouve que f est la symétrie orthogonale par rapport à E_1. □

6.2 Classification des isométries vectorielles en dimension 2

6.2.1 Lemme. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et f une isométrie vectorielle de E. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et A la matrice de f dans la bas $\mathcal{B}$.

1. Si f est une isométrie directe, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
2. Si f est une isométrie indirecte, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Preuve. Notons $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. D'après les théorèmes 4.2.4 et 4.3.1, la matrice A est orthogonale, avec un déterminant $ad - bc = \varepsilon$ qui vaut 1 ou -1. Donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = {}^tA = A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon d & -\varepsilon c \\ -\varepsilon b & \varepsilon a \end{pmatrix}.$$

Donc $a = d$ et $c = -b$ lorsque $\varepsilon = 1$, et $a = -d$ et $c = b$ lorsque $\varepsilon = -1$, d'où le résultat. □

Réciproquement il est clair que ces deux types de matrices sont orthogonales, et sont donc les matrices d'une isométrie (respectivement directe ou indirecte) dans une base orthonormale.

6.2.2 Corollaire. Quelles que soient f et g deux isométries vectorielles directes, on a $f \circ g = g \circ f$.

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. D'après le premier point du lemme ci-dessus, les matrices de f et g dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement de la forme $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ et $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{smallmatrix}\right)$.
On a $AA' = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -ba'-ab' \\ ba'+ab' & aa'-bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a-b'b & -b'a-a'b \\ b'a+a'b & a'a-b'b \end{pmatrix} = A'A$, d'où le résultat □

On traduit cette propriété en énonçant que $\boxed{\text{le groupe } \mathrm{O}^+(E) \text{ est abélien.}}$

6.2.3 Proposition et définition (description des isométries indirectes du plan). Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2. Toute isométrie indirecte de E est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de E.

Une telle symétrie orthogonale par rapport à une droite du plan E est appelée une *réflexion* de E.

Preuve. Soit $f \in \mathrm{O}^-(E)$. D'après le second point du lemme ci-dessus, la matrice A de f dans une base orthonormale de E est une matrice symétrique. Comme on l'a remarqué à la fin de 5.1.2, il en résulte que f est un endomorphisme symétrique de E. D'après le théorème 6.1.4, f est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. Si E_1 était de dimension 2 ou 0, on aurait $f = \mathrm{id}_E$ ou $f = -\mathrm{id}_E$, et donc $\det f = 1$, ce qui contredirait que $f \in \mathrm{O}^-$. On conclut que E_1 est une droite, ce qui achève la preuve. □

Ainsi, pour toute isométrie indirecte f de E, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (u, v)$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. En notant $F = \mathrm{Vect}(u)$, on a $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(v)$ et f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite F.

6.2.4 Proposition et définition (description des isométries directes du plan). Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, que l'on suppose orienté. Pour toute isométrie directe f de E, il existe un réel θ défini modulo 2π tel que la matrice de f dans toute base ortonormale directe est égale à

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On dit alors que f est la *rotation d'angle* θ dans E, et l'on note $f = r_\theta$.

Preuve. Soit $f \in \mathrm{O}^+(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E. Comme on l'a vu au premier point du lemme 6.2.1, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $a^2 + b^2 = 1$ tel que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. On sait que l'égalité $a^2 + b^2 = 1$ implique qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, non unique mais défini modulo 2π, tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Donc $A = R_\theta$.

Considérons une autre base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E, notons g l'isométrie transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et A' la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}'$. Donc $A' = P^{-1}R_\theta P$. Si on suppose que $\mathcal{B}'$ est directe, alors $g \in \mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ comme on l'a vu en 4.4, et puisque $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ est abélien, l'égalité $A' = P^{-1}R_\theta P$ devient $A' = R_\theta$. Ce qui montre le résultat voulu. □

6.2.5 Corollaire. Avec les notations de la proposition ci-dessus :

1. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a : $(r_\theta = r_{\theta'}) \Leftrightarrow (R_\theta = R_{\theta'}) \Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta' = \theta + 2k\pi)$.
2. En particulier : $r_0 = \mathrm{id}_E$ et $r_\pi = r_{-\pi} = -\mathrm{id}_E$.
3. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a : $R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ et $r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'}$

Preuve. Les deux premiers points sont clairs. Pour le troisième, on calcule :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}, \quad \text{d'où le résultat.}\end{aligned}$$ □

► *Remarque.* Algébriquement, on traduit ces propriétés en disant que

$$\boxed{\text{l'application } r : \mathbb{R} \to \mathrm{O}^+(\mathrm{E}) \text{ définie par } \theta \mapsto r_\theta \text{ est un morphisme de groupes.}}$$

► *Remarque.* Pour compléter la proposition 6.2.4, on montre facilement que la matrice de la rotation r_θ dans toute base orthonormale indirecte de E est $R_{-\theta}$.

6.2.6 Bilan, en dimension 2.

— les isométries vectorielles directes sont les rotations,
elles n'admettent pas de valeurs propres dès lors qu'elles sont distinctes de id_E et $-\mathrm{id}_E$;

— les isométries vectorielles indirectes sont les réflexions,
elles sont diagonalisables admettant 1 et -1 comme valeurs propres ;

— la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion ;

— la composée d'un nombre quelconque de rotations est une rotation, la composée d'un nombre *pair* de réflexions est une rotation, la composée d'un nombre *impair* de réflexions est une réflexion.

On verra en TD de nombreux exemples concrets d'application de ces résultats en dimension 2.

6.3 Classification des isométries vectorielles en dimension 3

6.3.1 Lemme fondamental. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit f une isométrie vectorielle de E. Trois cas seulement sont possibles :

1. f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$;
2. f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et admet 1 pour unique valeur propre, avec $\dim E_1 = 1$;
3. f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et admet -1 pour unique valeur propre, avec $\dim E_{-1} = 1$.

Preuve. Rappelons d'abord que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impair admet nécessairement au moins une valeur propre réelle.

• En effet son polynôme caractéristique est de degré $\dim E = 2p+1$ impair et de cœfficient dominant $-X^{2p+1}$. La fonction polynomiale associée tend donc vers $+\infty$ en $-\infty$ et vers $-\infty$ en $+\infty$. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle s'annule au moins une fois, et donc le polynôme caractéristique admet au moins une racine réelle.

Soit f une isométrie de E de dimension 3. Elle admet au moins une valeur propre, qui ne peut être que 1 ou -1 d'après la proposition 6.1.3. On suppose que f n'est pas diagonalisable. On montre d'abord que f ne peut pas admettre à la fois 1 et -1 comme valeurs propres.

• En effet, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un vecteur propre $x \in E_1$ et un vecteur propre $y \in E_{-1}$. D'après la proposition 6.1.3, ils sont orthogonaux, donc on peut compléter les vecteurs unitaires $x' = \frac{1}{\|x\|}x$ et $y' = \frac{1}{\|y\|}y$ en une base orthonormale $\mathcal{B}' = (x', y', w)$ de E. Notons (α, β, γ) les coordonnées de $f(w)$ dans la base $\mathcal{B}'$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{smallmatrix}\right)$. Puisque f est une isométrie, A est une matrice orthogonale, ce qui implique $\alpha = \beta = 0$. La matrice serait diagonale, ce qui est exclu par hypothèse.

Soit donc $\lambda \in \{-1, 1\}$ l'unique valeur propre de f, toujours supposée non diagonalisable. Le sous-espace propre E_λ est de dimension ≥ 1. Il ne peut pas être de dimension 3 car f serait alors diagonalisable. S'il était de dimension 2, il existerait par le même raisonnement que ci-dessus une base orthonormale dans laquelle la matrice A de f serait de la forme $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{smallmatrix}\right)$, et l'on aboutirait de même à une contradiction. D'où nécessairement $\dim E_\lambda = 1$. □

Ce lemme permet une étude au cas par cas des différents types d'isométries possibles en dimension 3. On commence par le cas où f est diagonalisable, qui équivaut au cas où f est symétrique comme on l'a vu au corollaire 6.1.4.

6.3.2 Proposition (cas diagonalisable)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit f une isométrie vectorielle de E que l'on suppose <u>diagonalisable</u>. On note $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E_1^\perp$. Alors on est dans l'un des quatre cas suivants :

(a) $E_1 = E$, alors $f = \mathrm{id}_E$, donc $f \in \mathrm{O}^+(E)$;

(b) $\dim E_1 = 2$, alors f est la symétrie orthogonale par rapport au plan E_1, donc $f \in \mathrm{O}^-(E)$;

(c) $\dim E_1 = 1$, alors f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite E_1, donc $f \in \mathrm{O}^+(E)$;

(d) $E_1 = \{0_E\}$, alors $f = -\mathrm{id}_E$, donc $f \in \mathrm{O}^-(E)$.

Preuve. Résulte directement du corollaire 6.1.4. □

▶ *Traduction matricielle.* Soit f une isométrie de E qui est diagonalisable.

— Dans le cas (a), la matrice de f dans toute base est I_3.

— Dans le cas (b), il existe une base orthonormale de vecteurs propres dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc $\operatorname{tr} f = 1$.

— Dans le cas (c), il existe une base orthonormale de vecteurs propres dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc $\operatorname{tr} f = -1$.

— Dans le cas (d), la matrice de f dans toute base est $-I_3$.

▶ *Traduction méthodologique.* Soit A une matrice carrée d'ordre 3 à cœfficients dans $\mathbb{R}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique. On sait que :

f est une isométrie vectorielle si et seulement si A est une matrice orthogonale.

Si c'est le cas, on sait de plus que f est diagonalisable si et seulement A est symétrique.

Si c'est le cas, et si $A \neq I_3$ et $A \neq -I_3$, il suffit de calculer $\operatorname{tr} A$:

si $\operatorname{tr} f = 1$, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan,

si $\operatorname{tr} f = -1$, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

6.3.3 Proposition et définition (rotation)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit $u \in E$ un vecteur unitaire. Soit θ un réel. Il existe une isométrie <u>directe</u> f de E telle que la matrice de f dans toute base orthonormale directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E est :

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Cette isométrie est appelée la *rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par u, et d'angle θ.*
On a :

(a) Si l'on note Δ la droite vectorielle dirigée par u, les vecteurs de l'axe Δ sont fixés par f, et la restriction de f au plan vectoriel $\Delta^\perp$ est la rotation plane d'angle θ.

(b) L'angle θ de f est défini modulo 2π et il est déterminé par les égalités :

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}(f) - 1) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \langle f(v) | w \rangle.$$

Preuve. Soit $u \in E$ unitaire. Soit Δ la droite vectorielle dirigée par u. On choisit deux vecteurs v, w du plan $\Delta^\perp$ tels que (u, v, w) constitue une base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E (on peut par exemple choisir pour v un vecteur unitaire quelconque orthogonal à u et prendre $w = u \wedge v$).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A_θ définie dans l'énoncé. On vérifie immédiatement que $A \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ et $\det A_\theta = +1$, donc $f \in \mathrm{O}^+(E)$. D'après le lemme 6.1.1, le plan $\Delta^\perp$ est stable par f et la restriction f' de f à $\Delta^\perp$ est la rotation plane d'angle θ au sens de 6.2.4. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormale directe de la forme (u, v', w'), alors (v', w') est une autre base orthonormale directe du plan $\Delta^\perp$, et donc la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}^+(2, \mathbb{R})$.
Parce que $\mathrm{O}^+(2, \mathbb{R})$ est abélien d'après 6.2.2, on déduit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} A_\theta P = A_\theta$.
Les égalités du point (b) découlent directement de la forme de la matrice A_θ. □

▶ *Deux cas particuliers diagonaux.* Avec ces notations : $f = \mathrm{id}_E$ si et seulement si $\theta \equiv 0$ modulo 2π, et f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ si et seulement si $\theta \equiv \pi$ modulo 2π.

6.3.4 Corollaire (cas non diagonalisable avec valeur propre 1)**.** Soit f une isométrie vectorielle de E que l'on suppose non-diagonalisable admettant 1 comme valeur propre.
Alors il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ tel que f est la rotation d'axe E_1 et d'angle θ.

Preuve. D'après le lemme 6.3.1, le sous-espace propre E_1 est une droite vectorielle. Soit u un vecteur directeur de cette droite. Quitte à diviser par $\|u\|$, on peut supposer u unitaire. Considérons une base orthonormale directe $\mathcal{B}_0 = (v, w)$ du plan $E_1^\perp$ telle que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base orthonormale directe de E. D'après le lemme 6.1.1, le fait que E_1 soit stable par f implique que $E_1^\perp$ est stable par f, donc la restriction f' de f au plan $E_1^\perp$ est une isométrie de $E_1^\perp$. Parce que f n'est pas diagonalisable, cette isométrie f' n'admet pas de valeurs propres réelles, donc d'après la classification des isométries en dimension 2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que f' soit la rotation d'angle θ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A_\theta$ ce qui achève la preuve. $\square$

6.3.5 Proposition et définition (antirotation)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $u \in E$ un vecteur unitaire et Δ la droite vectorielle dirigée par u. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

La composée f de la rotation d'axe Δ et d'angle θ avec la symétrie orthogonale par rapport au plan $\Delta^\perp$ est une isométrie indirecte, appelée *antirotation d'axe Δ et d'angle θ.*

Preuve. Evident puisque f est la composée d'une isométrie directe (proposition 6.3.3) et d'une isométrie indirecte (corollaire 4.3.2). $\square$

► La matrice d'une telle antirotation dans une base orthonormale directe est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ce qui montre en outre que la composition peut se faire dans un ordre ou l'autre indifféremment.

► *Deux cas particuliers diagonaux.* Avec ces notations $f = -\operatorname{id}_E$ si et seulement si $\theta \equiv \pi$ modulo 2π, et f est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\Delta^\perp$ si et seulement si $\theta \equiv 0$ modulo 2π.

6.3.6 Corollaire (cas non diagonalisable avec valeur propre -1)**.** Soit f une isométrie vectorielle de E que l'on suppose non-diagonalisable admettant -1 comme valeur propre.
Alors il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tel que f est l'antirotation d'axe E_{-1} et d'angle θ.

Preuve. On raisonne comme pour le corollaire 6.3.4. $\square$

6.3.7 Bilan, en dimension 3.

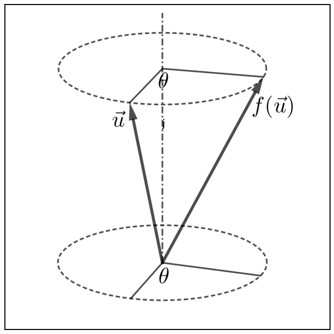
1. les isométries vectorielles directes sont les rotations, que l'on peut subdiviser en :
   - (1.a) $f = \operatorname{id}_E$,
   - (1.b) f est la symétrie par rapport à la droite E_1,
   - (1.c) f est la rotation d'axe E_1 et d'angle $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
2. les isométries vectorielles indirectes sont les antirotations, que l'on peut subdiviser en :
   - (2.a) $f = -\operatorname{id}_E$,
   - (2.b) f est la symétrie par rapport au plan E_1,
   - (2.c) f est l'antirotation d'axe E_{-1} et d'angle $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$.

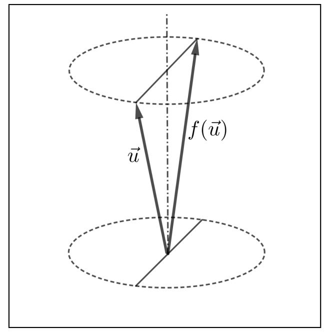
   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f est diagonalisable (ce qui équivaut à f symétrique) dans les cas (1.a), (1.b), (2.a) et (2.b).

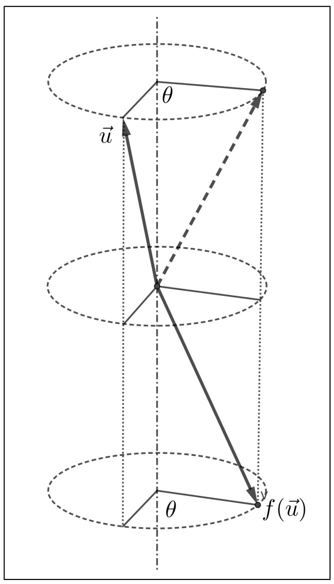
f est non diagonalisable (ce qui équivaut à non symétrique) dans les cas (1.c) et (2.c).



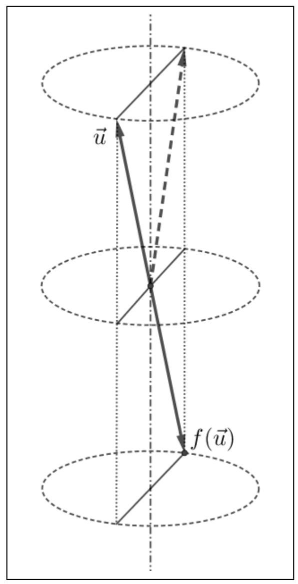
<u>rotation</u> d'angle θ, d'axe E_1



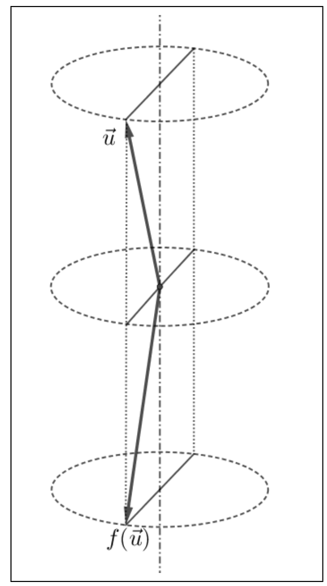
cas particulier $\theta = \pi$
(f = symétrie orthog. p/r à la droite E_1)



<u>antirotation</u> d'axe E_{-1}, d'angle θ



cas $\theta = \pi$
($f = -\,\mathrm{id}_E$)



cas $\theta = 0$
(f = symétrie orthog. p/r plan E_1)

Synthèse sur les compétences minimales requises

comprendre et connaître :

1. le principe de classification suivant le double critère du déterminant ($+1$ ou -1) et des valeurs propres (en particulier l'équivalence <u>pour une isométrie</u> entre être symétrique et être diagonalisable),
2. les différents cas d'isométries, en dimension 2 et en dimension 3, leurs éléments caractéristiques (axe, angle, sous-espaces propres...) et leurs propriétés.

savoir-faire :

3. reconnaître à partir d'une matrice 2×2 ou 3×3 si elle représente une isométrie, de quel type, et déterminer ses éléments caractéristiques,
4. déterminer la matrice dans une base orthonormale adaptée d'une isométrie décrite en termes algébriques ou géométriques dans des contextes variés.

7 – Retour sur les formes quadratiques générales

On retourne dans ce dernier chapitre au contexte général du chapitre 1, c'est-à-dire que les formes bilinéaires symétriques que l'on considère ici ne sont pas nécessairement des produits scalaires. Dans toute la suite on fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Dans la section 7.3, ce sera plus spécifiquement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

7.1 Rang d'une forme quadratique

7.1.1 Noyau d'une forme quadratique. La notion d'orthogonalité que l'on a définie au chapitre 3 dans le cas particulier des produits scalaires s'étend de façon naturelle au contexte plus général considéré ici.

Définition. Soient q une forme quadratique sur E, et φ sa forme bilinéaire symétrique associée. Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux pour la forme quadratique* q lorsque $\varphi(x, y) = 0$.

Proposition et définition. Soient q une forme quadratique sur E, et φ sa forme bilinéaire symétrique associée.

1. L'ensemble $\operatorname{Ker} q = \{x \in E\,;\, \varphi(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le *noyau* de q.
2. On appelle rang de q l'entier naturel $\operatorname{rg} q = n - \dim \operatorname{Ker} q$.
3. On dit que φ est *non-dégénérée* lorsque $\operatorname{Ker} q = \{0_E\}$.

Preuve. Pour tout $y \in E$, notons ℓ_y la forme linéaire $E \to \mathbb{K}$ qui, à tout vecteur $x \in E$, associe le scalaire $\ell_y(x) = \varphi(x, y)$. On sait que $\operatorname{Ker} \ell_y$ est un sous-espace vectoriel de E. Or par définition $\operatorname{Ker} q = \bigcap_{y\in E} \operatorname{Ker} \ell_y$, qui est donc un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels. □

En d'autres termes, $\operatorname{Ker} q$ est le sous-espace vectoriel formé des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de E.

► *Point de vigilance.* On prendra garde que $\operatorname{Ker} q$ n'est pas l'ensemble des vecteurs x tels que $q(x) = 0$. En effet $C(q) = \{x \in E\,;\, q(x) = 0\}$ est l'ensemble des vecteurs *isotropes*, comme on l'a vu en 2.1.1. On a bien sûr $\operatorname{Ker} q \subset C(q)$ mais l'inclusion n'est en général pas une égalité. Rappelons aussi que φ est dite *définie* lorsque $C(q) = \{0_E\}$. Toute forme bilinéaire symétrique φ qui est définie est nécessairement non dégénérée, mais la réciproque est fausse.

Contre-exemple. Soit φ la forme bilinéaire symétrique définie sur $E = \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Si x est dans $\operatorname{Ker} q$, alors $\varphi(x, e_1) = 0$ donc $x_1 = 0$, et $\varphi(x, e_2) = 0$ donc $x_2 = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} q = \{0_E\}$. Et pourtant $C(q) \neq \{0_E\}$ car par exemple $z = (1, 1)$ vérifie $\varphi(z, z) = 0$. Ainsi φ est non dégénérée mais n'est pas définie.

► *Remarque.* Dans le cas particulier où φ est un produit scalaire, alors $\operatorname{Ker} q = C(q) = \{0_E\}$ et $\operatorname{rg} q = n$.

7.1.2 Bases orthogonales. Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonale pour la forme quadratique q lorsque les vecteurs e_i sont deux à deux orthogonaux pour q, c'est-à-dire vérifient $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$. On a la caractérisation matricielle suivante.

Lemme. Soient q une forme quadratique sur E, et φ sa forme bilinéaire symétrique associée. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et A la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$. Alors

1. La base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour la forme q si et seulement A est une matrice diagonale.
2. Dans ce cas, les vecteurs e_i tels que $q(e_i) = 0$ forment une base de $\operatorname{Ker} q$, et le rang de q est égal aux nombres de cœfficients diagonaux non-nuls de A.

Preuve. Par définition de A (voir 1.3.1) les cœfficients de A sont les scalaires $\varphi(e_i, e_j)$. Donc les cœfficients non diagonaux sont tous nuls si et seulement si la base B est orthogonale pour q, ce qui montre le premier point. Pour le second, supposons que $\mathcal{B}$ est orthogonale pour q. Les cœfficients diagonaux de A sont les $q(e_i)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, le vecteur e_i est par hypothèse orthogonal à tous les e_j tels que $j \neq i$. Si $q(e_i) = 0$, alors e_i est aussi orthogonal à lui-même, donc orthogonal à tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, et donc finalement à tous les vecteurs de E, d'où $e_i \in \operatorname{Ker} q$. Si $q(e_i) \neq 0$, alors e_i n'est pas isotrope, donc $e_i \notin \operatorname{Ker} q$. En résumé, $e_i \in \operatorname{Ker} q$ si et seulement si $q(e_i) = 0$.

Montrons plus précisément que les vecteurs e_i tels que $q(e_i) = 0$ forment une base de $\operatorname{Ker} q$. Ils forment évidemment une famille libre (comme sous-famille d'une famille libre). Pour vérifier qu'elle engendre $\operatorname{Ker} q$, prenons $x \in \operatorname{Ker} q$ quelconque, décomposé en $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$. On a $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, l'égalité $\varphi(x, e_i) = 0$ devient $\sum_{k=1}^n x_k \varphi(e_k, e_i) = x_i q(e_i) = 0$. Il en résulte que $x_i = 0$ pour tous les i tels que $q(e_i) \neq 0$. Donc x n'est combinaison linéaire que des vecteurs e_i tels que $q(e_i) = 0$, c'est-à-dire qui sont dans $\operatorname{Ker} q$. Ce qui prouve le résultat. $\square$

► *Commentaire.* On démontre que pour toute forme quadratique q il existe des bases de E qui sont orthogonales pour q. On peut pour le prouver raisonner par récurrence sur la dimension de E en adaptant la preuve faite pour les produits scalaires au théorème 3.3.2. Une autre méthode est un procédé algorithmique connu sous le nom de décomposition de Gauss, que l'on va étudier ci-dessous. Auparavant, soulignons que l'on déduit de l'existence de bases orthogonales et du lemme précédent le résultat suivant, très utile dans la pratique.

Corollaire. Soit q une forme quadratique sur E. Le rang de q est égal au rang de la matrice de q dans n'importe quelle base de E.

Preuve. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E orthogonale pour la forme quadratique q. D'après le lemme précédent, la matrice A de q dans la base $\mathcal{B}$ vérifie $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} q$. Soit A' la matrice de q dans une base quelconque $\mathcal{B}'$ de E. D'après la proposition 1.3.3, les matrices A et A' sont équivalentes, et donc de même rang. D'où $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} q$. $\square$

7.2 Décomposition de Gauss

7.2.1 Présentation du problème. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots, e_n)$ une base de E. On a vu en 1.1.2 et en 1.4.1 que :

(a) Si ℓ est une forme linéaire sur E, alors il existe des scalaires $\alpha_1, \dots \alpha_n$ (ie. des éléments de $\mathbb{K}$) tels que, pour tout vecteur x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\ell(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

(b) Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe des scalaires $(\lambda_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ tels que, pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} x_i^2 \; + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{ij} x_i x_j.$$

Il est clair que si l'on élève une forme linéaire au carré, on obtient une forme quadratique. Plus généralement une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires est une forme quadratique.

► *On étudie dans ce qui suit la réciproque de cette propriété, c'est-à-dire la possibilité de décomposer toute forme quadratique en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.*

7.2.2 Premier exemple préliminaire. Considérons la forme quadratique définie dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par : $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 14x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$. On calcule :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 14x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 \; + \; 4x_2^2 + 14x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + 3x_2^2 - 12x_2x_3 + 10x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + 3(x_2^2 - 4x_2x_3) + 10x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + 3(x_2 - 2x_3)^2 - 12x_3^2 + 10x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + 3(x_2 - 2x_3)^2 - 2x_3^2. \end{aligned}$$

On a ainsi exprimé $q = \ell_1^2 + 3\ell_2^2 - 2\ell_3^2$ comme une combinaison linéaire des carrés de trois formes linéaires, avec :

$$\ell_1 = e_1^\star + e_2^\star + 2e_3^\star, \qquad \ell_2 = e_2^\star - 2e_3^\star, \qquad \ell_3 = e_3^\star,$$

Rappelons (voir 1.1.2) que chaque $e_i^\star$ est la forme linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui, à un vecteur x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$, associe sa i-ième coordonnée, ie. $e_i^\star(x) = x_i$. Il est clair que les trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont linéairement indépendantes.

Pour tout vecteur x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$, les réels :

$$x_1' := x_1 + x_2 + 2x_3 = \ell_1(x), \quad x_2' := x_2 - 2x_3 = \ell_2(x) \quad \text{et} \quad x_3' := x_3 = \ell_3(x)$$

sont les coordonnées de x dans une nouvelle base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$, dans laquelle q s'exprime plus simplement comme :

$$q(x) = (x_1')^2 + 3(x_2')^2 - 2(x_3')^2.$$

La matrice A' de q dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée d'après 1.3.1 par $q(x) = (x_1', x_2', x_3')A' \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$, donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>Conclusion</u> : d'après le lemme 7.1.2, la base $\mathcal{B}'$ est orthogonale pour la forme quadratique q ; le rang de q est égal à 3 et son noyau est $\operatorname{Ker} q = \{0_E\}$. Par ailleurs le fait que $q(e_3') = -2 < 0$ montre que la forme bilinéaire symétrique φ associée à q n'est pas un produit scalaire.

► *Une remarque et un point de vigilance.* Pour passer d'une base à l'autre, on inverse facilement :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

donc P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est définie par :

$$e'_1 = e_1, \qquad e'_2 = -e_1 + e_2, \qquad e'_3 = -4e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Rappelons que par définition (voir 1.3.1) la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$, et d'après la proposition 1.3.3 la matrice A' de q dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par :

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ce qui correspond bien au résultat trouvé précédemment.
Attention, cela n'est pas une diagonalisation de la matrice A car ici ${}^tP \neq P^{-1}$.

7.2.3 Second exemple préliminaire. Considérons la forme quadratique définie dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par : $q(x) = 8x_1x_2 + 4x_1x_3$. On calcule :

$$q(x) = 4x_1(2x_2 + x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_1 - 2x_2 - x_3)^2.$$

On a ainsi exprimé $q = \ell_1^2 - \ell_2^2$ comme une combinaison linéaire des carrés de deux formes linéaires :

$$\ell_1 = e_1^\star + 2e_2^\star + e_3^\star, \qquad \ell_2 = e_1^\star - 2e_2^\star - e_3^\star$$

Il est clair que ces deux formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes. Pour tout vecteur x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$, les réels :

$$x'_1 := x_1 + 2x_2 + x_3 = \ell_1(x), \quad \text{et} \quad x'_2 := x_1 - 2x_2 - x_3 = \ell_2(x)$$

sont les deux premières coordonnées de x dans une nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_3 \in \operatorname{Ker} q$, dans laquelle q s'exprime plus simplement comme :

$$q(x) = (x'_1)^2 - (x'_2)^2.$$

La matrice A' de q dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : d'après le lemme 7.1.2, la base $\mathcal{B}'$ est orthogonale pour la forme quadratique q ; le rang de q est égal à 2 et son noyau est la droite engendrée par e'_3. Il est clair que la forme bilinéaire symétrique φ associée à q n'est pas un produit scalaire, puisque e'_3 est un vecteurs isotrope non-nul, ou encore puisque $q(e'_2) = -1 < 0$.

7.2.4 Théorème. Toute forme quadratique sur un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie est une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

Preuve. Remarquons tout d'abord que le nombre de termes d'une telle décomposition est inférieur ou égal à la dimension de E puisque $\dim E^\star = \dim E$.
On raisonne par récurrence sur la dimension n de E. Le résultat est trivial si $n = 1$. Supposons-le vrai pour tout $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n-1$ et considérons q une forme quadratique non identiquement nulle sur un $\mathbb{R}$-e.v. E de dimension n. Comme on l'a vu au théorème 1.4.2, il existe des scalaires $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ non tous nuls tel que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base $\mathcal{B}$, on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

On scinde alors la preuve en deux cas.
• Premier cas : supposons que l'un au moins des α_{ii} est non-nul. Quitte à permuter les coordonnées, on peut pour simplifier les notations supposer que $\alpha_{11} \neq 0$. Le réel $q(x)$ peut s'écrire :

$$q(x) = \alpha_{11}x_1^2 + x_1 \underbrace{\left(2\sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j}x_j\right)}_{L(x_2,\dots,x_n)} + \underbrace{\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 \ +2 \sum_{2\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}x_ix_j\right)}_{Q(x_2,\dots,x_n)}.$$

Il est clair que L est une forme linéaire en $(x_2,\dots,x_n)$ et Q une forme quadratique en $(x_2,\dots,x_n)$. En regardant les deux premier termes de cette expression comme le début du développement de la première identité remarquable, on a :

$$q(x) = \alpha_{11}\left(x_1 + \tfrac{1}{2\alpha_{11}}L(x_2,\dots,x_n)\right)^2 + \left(Q(x_2,\dots,x_n) - \tfrac{1}{4a_{11}}L(x_2,\dots,x_n)^2\right).$$

Le premier terme est le carré d'une forme linéaire en $(x_1,\dots,x_n)$ et le second est une forme quadratique en $(x_2,\dots,x_n)$, d'où le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence à cette forme quadratique.

• Second cas : supposons que $\alpha_{ii} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Il existe au moins un cœfficient α_{ij} pour $i < j$ qui est non-nul. Une fois encore pour simplifier les notations supposons que $\alpha_{12} \neq 0$. On écrit alors $q(x)$ sous la forme :

$$q(x) = \alpha_{12}x_1x_2 + x_1 \underbrace{\left(2\sum_{j=3}^{n} \alpha_{1j}x_j\right)}_{L_1(x_3,\dots,x_n)} + x_2 \underbrace{\left(2\sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j}x_j\right)}_{L_2(x_3,\dots,x_n)} + \underbrace{\left(2\sum_{3\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}x_ix_j\right)}_{Q(x_3,\dots,x_n)}.$$

Il est clair que L_1 et L_2 sont des formes linéaires en $(x_3,\dots,x_n)$ et Q une forme quadratique en $(x_3,\dots,x_n)$. On transforme en

$$q(x) = \alpha_{12}\left(x_1 + \tfrac{1}{\alpha_{12}}L_2\right)\left(x_2 + \tfrac{1}{\alpha_{12}}L_1\right) + \left(Q - \tfrac{1}{\alpha_{12}}L_1L_2\right),$$

puis en utilisant la troisième identité remarquable

$$q(x) = \tfrac{1}{4}\alpha_{12}\left[\left(x_1 + x_2 + \tfrac{1}{\alpha_{12}}(L_1+L_2)\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \tfrac{1}{\alpha_{12}}(L_2-L_1)\right)^2\right] + \left[Q - \tfrac{1}{\alpha_{12}}L_1L_2\right].$$

Le premier crochet est la différence de deux carrés de formes linéaires en $(x_1,\dots,x_n)$ qui sont clairemenent linéairement indépendantes (au vu des cœfficients de x_1 et de x_2), et le second crochet est une forme quadratique en $(x_3,\dots,x_n)$ auquel on applique l'hypothèse de récurrence pour conclure. □

► Remarquons que le premier cas correspond à la méthode mise en œuvre dans l'exemple 7.2.2 et le second cas à celle utilisée dans l'exemple 7.2.3.

► On peut maintenant en déduire que, comme on l'avait annoncé à la fin du paragraphe 7.1.2, il existe pour toute forme quadratique q des bases orthogonales pour q.

7.2.5 Corollaire. Soit q une forme quadratique non identiquement nulle. Soient $\ell_1,\dots,\ell_p$ des formes linéaires sur E linéairement indépendantes, et $\alpha_1 \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tous non-nuls tels que

$$q(x) = \alpha_1\ell_1(x)^2 + \cdots + \alpha_p\ell_p(x)^2 \qquad \text{(avec } 1 \leq p \leq n).$$

Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E orthogonale pour q telle que $q(e_i) = \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$.

La matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, et p est le rang de q.

Preuve. Remarquons d'abord qu'avec les données de l'énoncé, on a pour tous $x, y \in E$ l'égalité :

$$q(x+y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(\ell_i(x+y))^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(\ell_i(x) + \ell_i(y))^2 = q(x) + q(y) + 2\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ell_i(x)\ell_i(y),$$

de sorte que, d'après les formules de polarisation, la forme bilinéaire associée φ vérifie

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ell_i(x)\ell_i(y).$$

Complétons la famille libre $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_p, \ell_{p+1}, \ldots, \ell_n)$ de $E^\star$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base de E telle que $\ell_i = e_i^\star$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Rappelons que cela signifie que $\ell_i(e_j) = \delta_{ij}$. Avec la formule ci-dessus, on a donc pour tous $1 \leq j, k \leq n$:

$$\varphi(e_j, e_k) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ell_i(e_j)\ell_i(e_k) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_{ij}\delta_{ik}.$$

On en déduit $\varphi(e_j, e_k) = 0$ pour tous $1 \leq j \neq k \leq n$, de sorte que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale pour φ, c'est-à-dire pour q. On en déduit aussi que $q(e_j) = \alpha_j$ pour tout $1 \leq j \leq p$ et que $q(e_j) = 0$ pour tout $p+1 \leq j \leq n$, ce qui achève la preuve. □

7.3 Signature, loi d'inertie de Sylvester

7.3.1 Remarque préliminaire. *La décomposition d'une forme quadratique en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes n'est pas unique.*

Prenons par exemple $q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ dans $\mathbb{R}^3$. Selon que l'on applique l'algorithme de Gauss d'abord en x_1 puis en x_3, ou d'abord en x_3 puis en x_1 on trouve :

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 - x_3^2 = -(x_3 - x_1 - 2x_2)^2 + 2(x_1 + \tfrac{3}{2}x_2)^2 - \tfrac{1}{2}x_2^2.$$

En revanche le nombre de termes dans deux telles décompositions reste le même puisqu'il s'agit du rang de q (ici 3 sur cet exemple). De plus *lorsque le corps des scalaires est* $\mathbb{R}$, on va voir que le nombre de termes respectivement affectés d'un signe positif et d'un signe négatif est également invariant quelles que soient les décompositions considérées (ici un positif et deux négatifs).

7.3.2 Théorème et définition. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n. Soit q une forme quadratique de E. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E orthogonale pour q, le nombre s de vecteurs de $\mathcal{B}$ tels que $q(e_i) > 0$ et le nombre t de vecteurs de $\mathcal{B}$ tels que $q(e_i) < 0$ sont indépendants de $\mathcal{B}$.

Le couple (s,t) est appelé la *signature* de la forme quadratique q. Elle vérifie $s + t = \operatorname{rg} q$.

Preuve. Prenons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases orthogonales pour q. Soient s, t les deux entiers naturels définis comme dans l'énoncé pour $\mathcal{B}$, et s', t' définis de même pour $\mathcal{B}'$. D'après le point 2 du lemme 7.1.2, il est clair que $s + t = \operatorname{rg} q$, et donc $s + t = s' + t'$.

Soient F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e_i tels que $q(e_i) > 0$ et H le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e'_i tels que $q(e'_i) \leq 0$. On a $\dim F = s$ et $\dim H = n - s'$. Or $F \cap H = \{0_E\}$.

> *En effet.* Soit $x \in E$. En considérant ses coordonnées dans chacune des deux bases, on a $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \cdots + x'_ne'_n$. On en déduit que :
>
> $$q(x) = x_1^2q(e_1) + \cdots + x_n^2q(e_n) = (x'_1)^2q(e'_1) + \cdots + (x'_n)^2q(e'_n).$$
>
> La première égalité implique que si $x \in F$ et si $x \neq 0_E$, alors $q(x) > 0$. La seconde implique que si $x \in H$ alors $q(x) \leq 0$. D'où le résultat.

On en déduit que $n = \dim E \geq \dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H) = s + n - s'$ donc $s - s' \leq 0$, ou encore $s \leq s'$. Mais les deux bases jouent de rôles symétriques et donc en les échangeant on obtient de même $s' \leq s$. Finalement $s = s'$, d'où $t = t'$ puisque $s + t = s' + t'$. □

7.3.3 Exemples. Reprenons les exemples vus précédemment :

dans l'exemple 7.2.2, la signature de q est $(2, 1)$, et on a bien $\operatorname{rg} q = 3 = 2 + 1$,
dans l'exemple 7.2.3, la signature de q est $(1, 1)$, et on a bien $\operatorname{rg} q = 2 = 1 + 1$,
dans l'exemple 7.3.1, la signature de q est $(1, 2)$, et on a bien $\operatorname{rg} q = 3 = 1 + 2$.

D'autres exemples seront vus en cours et en travaux dirigés.

Synthèse sur les compétences minimales requises

comprendre et connaître :

1. la définition du noyau et du rang d'une forme linéaire, et leur traduction en termes de base orthogonale et de matrice,
2. le théorème de décomposition d'une forme quadratique en carrés de formes linéaires indépendantes et son interprétation en termes de base orthogonale et de matrice,
3. la notion de signature d'une forme quadratique dans le cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

savoir-faire :

4. mettre en œuvre la méthode algorithmique de Gauss pour déterminer une décomposition de q (en particulier dans les cas un peu plus délicats où il n'y a pas de carré d'une coordonnée dans la forme donnée au départ),
5. déduire d'une décomposition de Gauss le rang de q, sa signature, et une base orthogonale pour q.